Ε13 Βελτιστοποίηση με Αβεβαιότητα

Στην οικονομία πολλές αποφάσεις παίρνονται σε περιβάλλον αβεβαιότητας. Η αβεβαιότητα αυτή εκφράζεται με μια κατανομή πιθανοτήτων όσον αφορά τις τιμές των διαφόρων παραμέτρων. Σαυτή την περίπτωση το αποτέλεσμα των επιλογών δεν είναι κάποιο σίγουρο μέγεθος, αλλά ένα σύνολο δυνητικών αποτελεσμάτων με αντίστοιχες πιθανότητες. Το πρόβλημα της σύγκρισης μεταξύ τέτοιων αβέβαιων μεγεθών αντιμετωπίζεται χρησιμοποιώντας τον δείκτη χρησιμότητας των Von Newman-Morgestern, όπου τα ενδεχόμενα αντιμετωπίζονται ως εναλλακτικά αγαθά και ο δείκτης ερμηνεύεται ως μέση χρησιμότητα. Όσον αφορά τη στάση στην αβεβαιότητα, τα άτομα είναι συνήθως επιφυλακτικά με την έννοια ότι προτιμούν τον σίγουρο μέσο όρο από την αβεβαιότητα, και γιαυτό ασφαλίζονται απέναντι στον κίνδυνο. Αλλά ορισμένα άτομα μπορεί να είναι ριψοκίνδυνα με την έννοια ότι προτιμούν το αβέβαιο αποτέλεσμα που δίνει κάποια πιθανότητα υψηλότερης απόδοσης αλλά βέβαια και χαμηλότερης σε σχέση με το σίγουρο του μέσου όρου. Μαθηματικά οι δύο αυτές περιπτώσεις αντιστοιχούν σε κοίλες και κυρτές συναρτήσεις χρησιμότητας. Γενικότερα οι συναρτήσεις χρησιμότητας χαρακτηρίζονται ως προς την κυρτότητα χρησιμοποιώντας τους δείκτες Arrow-Pratt. Δύο περιοχές σημαντικής οικονομικής δραστηριότητας με έντονο το στοιχείο της αβεβαιότητας είναι ο χώρος των ασφαλίσεων και ο χώρος των επενδύσεων. Στο χώρο των ασφαλίσεων εξετάζουμε το πρόβλημα του μέγιστου ασφάλιστρου που θα δεχόταν να καταβάλει ένας ασφαλιζόμενος σε σχέση με το αντικειμενικό ασφάλιστρο της ανταγωνιστικής αγοράς, ενώ στο χώρο των επενδύσεων εξετάζουμε τις συνθήκες αβέβαιης απόδοσης υπό τις οποίες ένα άτομο θα δεχόταν να επενδύσει ένα μέρος της περιουσίας του.

1. Αβεβαιότητα. Υποθέτουμε ότι πρέπει να επιλεγεί επένδυση κεφαλαίου K με συνάρτηση παραγωγής: $Q = Q(K)$, σε συνθήκες αβεβαιότητας όσον αφορά την μελλοντική τιμή του προϊόντος p και το κόστος του κεφαλαίου, δηλαδή το μεταβλητό επιτόκιο r. Στην απλούστερη περίπτωση η αβεβαιότητα αυτή μπορεί να εκφράζεται με δύο διαφορετικές ενδεχόμενες μελλοντικές καταστάσεις του επιχειρηματικού περιβάλλοντος. Στη μία περίπτωση η μοναδιαία τιμή του προϊόντος θα είναι p_1 και το επιτόκιο r_1 ενώ στην άλλη θα είναι p_2 και r_2 αντίστοιχα. Τώρα κάθε επένδυση K δεν δίνει ένα σίγουρο κέρδος:

$$\Pi = pQ(K) - (1+r)K,$$

οπότε επιλέγουμε αυτή που δίνει μέγιστο, αλλά δύο δυνητικά κέρδη:

$$\{\Pi_1, \Pi_2\}, \text{ όπου } \Pi_1 = p_1Q(K) - (1+r_1)K, \quad \Pi_2 = p_2Q(K) - (1+r_2)K$$

Δηλαδή, η επιλογή για το βέλτιστο K δεν είναι μεταξύ σίγουρων αποτελεσμάτων

$$\{\Pi(K)\}$$

οπότε επιλέγεται αυτό που αποφέρει μέγιστο Π, αλλά μεταξύ ζευγών δυνητικών αποτελεσμάτων

$$\{\Pi_1(K),\ \Pi_2(K)\}$$

Γενικότερα μπορεί να έχουμε πλήθος τέτοιων μελλοντικών καταστάσεων και αντίστοιχων δυνητικών αποτελεσμάτων. Κάθε διαδικασία βελτιστοποίησης προϋποθέτει τη δυνατότητα σύγκρισης μεταξύ τους. Θα δούμε στη συνέχεια ένα υπόδειγμα όπου τέτοια σύνολα μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους όπως ακριβώς δέσμες αγαθών στην κατανάλωση χρησιμοποιώντας κατάλληλη συνάρτηση χρησιμότητας.

2. Δείκτης χρησιμότητας (Utility index)**.** Σ' ένα περιβάλλον αβεβαιότητας έχουμε συνήθως πολλές δυνητικές καταστάσεις με τις αντίστοιχες πιθανότητες. Για ευκολία θα θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση με δύο καταστάσεις. Αρχίζοντας μένα απλό παράδειγμα υποθέτουμε ότι η λιανική τιμή του πετρελαίου τον ερχόμενο χειμώνα εξαρτάται από τις καιρικές συνθήκες, και συγκεκριμένα από το αν ο χειμώνας είναι «βαρύς» ή «ελαφρύς». Από τα ιστορικά δεδομένα προκύπτει ότι:
1. Ένας στους τέσσερις χειμώνες είναι βαρύς.
2. Το πετρέλαιο κοστίζει v ευρώ τον τόνο αν ο χειμώνας είναι βαρύς οπότε η ζήτηση θα είναι αυξημένη, $w < v$ ευρώ αν είναι ελαφρύς οπότε η ζήτηση θα είναι μειωμένη.

Υποθέτουμε τώρα ότι ένας έμπορος πρέπει να αποφασίσει εκ των προτέρων την ποσότητα Q που θα προμηθευτεί στην τρέχουσα τιμή p. Το κέρδος την επόμενη χρονική περίοδο θα είναι:

$$\{X = (v - p)Q \text{ με πιθανοτητα } s = 1/4 = 0.25\},$$

$$\{Y = (w - p)Q \text{ με πιθανοτητα } t = 3/4 = 0.75\}$$

Για να επιλέξει ο έμπορος την βέλτιστη ποσότητα Q, θα πρέπει να μπορεί να συγκρίνει μεταξύ τους τα ζεύγη συνδυασμών $\{X,Y\}$ που προκύπτουν για τις διάφορες επιλογές Q, με βάση κάποια συνάρτηση χρησιμότητας:

$$V = V(X,Y),$$

όπως θα έκανε ένας καταναλωτής. Η διαφορά από τις συνηθισμένες περιπτώσεις είναι ότι ο κάθε συνδυασμός $\{X,Y\}$ δεν αντιπροσωπεύει την ταυτόχρονη κατανάλωση δύο διαφορετικών αγαθών, ούτε την διαχρονική κατανάλωση του ίδιου αγαθού σε διαφορετικές χρονικές περιόδους αλλά την κατανάλωση *μόνο του ενός εκ των δύο ποσοτήτων,* με πιθανότητες $\{s,t\}$ αντίστοιχα. Στην απλούστερη περίπτωση η σύγκριση μπορεί να γίνει με συνάρτηση χρησιμότητας την *μέση τιμή* (mean value) του κέρδους στις διάφορες εκβάσεις:

$$M = sX + tY$$

Στη γενική περίπτωση χρησιμοποιείται συνήθως η θεωρία του δείκτη χρησιμότητας των Von-Neumann/Morgenstern. Στα πλαίσια αυτής της θεωρίας αποδεικνύεται ότι υπό αρκετά γενικές προϋποθέσεις συμπεριφοράς, η συνάρτηση χρησιμότητας σε συνθήκες αβεβαιότητας παίρνει την γενική μορφή:

$$V = sU(X) + tU(Y)$$

όπου $U = U(C)$ εκφράζει την χρησιμότητα της ποσότητας C σε συνθήκες βεβαιότητας. Δηλαδή:

Ο δείκτης χρησιμότητας εκφράζει την μέση τιμή όχι των ίδιων των ενδεχόμενων: $\{X,Y\}$*, αλλά της χρησιμότητάς τους:* $\{U(X),U(Y)\}$.

Έτσι ο κάθε καταναλωτής χαρακτηρίζεται από τη γνωστή συνάρτηση χρησιμότητας $U = U(C)$, που καθορίζει την προτίμησή του αν το αποτέλεσμα C ήταν βέβαιο. Αλλά τώρα η συνάρτηση αυτή έχει ποσοτική έννοια και δύο τέτοιες συναρτήσεις χρησιμότητας είναι ισοδύναμες, με την έννοια ότι οι αντίστοιχοι δείκτες χρησιμότητας έχουν τις ίδιες ισοσταθμικές, μόνο αν η μία είναι αύξων γραμμικός μετασχηματισμός της άλλης, όπως αναφέραμε σε προηγούμενη ενότητα {E2(5)}. Στη συνέχεια θα εντάξουμε το πρόβλημα στο γενικότερο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων.

3. Χαρακτηρισμός παικτών. Κάθε άτομο που πρέπει να επιλέξει σε συνθήκες αβεβαιότητας αντιμετωπίζεται ως *παίκτης* (player) *τυχερού παίγνιου* (game of chance) που επιλέγει με βάση κάποια συνάρτηση χρησιμότητας. Γενικά, ένα *τυχερό παίγνιο* με δύο *δυνητικά αποτελέσματα* αντιμετωπίζεται ως μια *κατανομή* (distribution) σε δύο *ενδεχόμενα* $\{X,Y\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες $\{s,t : s+t=1\}$. Στην πραγματικότητα δεν έχουμε αβεβαιότητα αν τα δύο ενδεχόμενα είναι ίσα: $X = Y$, ή αν το ένα ενδεχόμενο είναι σίγουρο με πιθανότητα 1 οπότε το άλλο θα έχει μηδενική πιθανότητα. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι το παίγνιο είναι ισοδύναμο με το *σίγουρο* ή *βέβαιο* (certain) αποτέλεσμα X. Αν αυτό δεν ισχύει τότε θα λέμε ότι είναι *γνήσιο παίγνιο* ή *γνήσια κατανομή*. Ως *μέση τιμή* (average, mean value) της κατανομής ορίζεται το μέγεθος

$$M = sX + tY$$

Αν το αποτέλεσμα είναι σίγουρο τότε συμπίπτει με τη μέση τιμή. Θεωρούμε τώρα και έναν παίκτη με συνάρτηση χρησιμότητας $U = U(C)$, και δείκτη χρησιμότητας:

$$V = sU(X) + tU(Y)$$

Συνήθως χαρακτηρίζουμε τη συμπεριφορά του παίκτη απέναντι στην αβεβαιότητα με βάση την προτίμηση που δείχνει μεταξύ ενός τέτοιου παιγνίου και του βέβαιου αποτελέσματος που δίνεται από την μέση τιμή του. Χρησιμοποιώντας και τις ιδιότητες των κυρτών/κοίλων συναρτήσεων που παρουσιάζονται σε χωριστή ενότητα: {Θ2(1)}, διακρίνουμε τα άτομα ως παίκτες ανάλογα με την αντιμετώπιση της αβεβαιότητας, σε τρεις κατηγορίες, ως εξής:

1. *Ουδέτερος* (risk neutral) αν είναι πάντοτε αδιάφορος μεταξύ ενός παιγνίου και του βέβαιου της μέσης τιμής του:

$$sU(X) + tU(Y) = U(sX + tY)$$

Είναι οι παίκτες με γραμμική συνάρτηση χρησιμότητας: $U'' = 0$, όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα παρακάτω.

2. *Επιφυλακτικός* (risk averse) αν προτιμάει πάντοτε αντί ενός γνήσιου παιγνίου την βεβαιότητα της μέσης τιμής του:

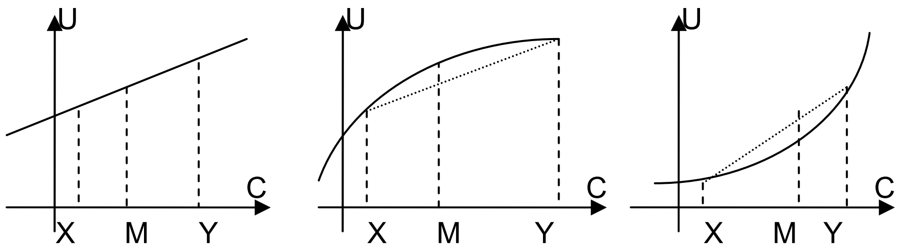
$$sU(X) + tU(Y) < U(sX + tY)$$

Είναι οι παίκτες με γνήσια κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας: $U'' < 0$, όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα παρακάτω.

3. Ριψοκίνδυνος (risk lover) αν προτιμάει πάντοτε ένα γνήσιο παίγνιο αντί της βεβαιότητας της μέσης τιμής του:

$$sU(X) + tU(Y) > U(sX + tY)$$

Είναι οι παίκτες με γνήσια κυρτή συνάρτηση χρησιμότητας: $U'' > 0$, όπως φαίνεται στο τρίτο γράφημα παρακάτω.



$V(X,Y) = U(M)$ ουδέτερος $\quad$ $V(X,Y) < U(M)$ επιφυλακτικός $\quad$ $V(X,Y) > U(M)$ ριψοκίνδυνος

στάση στην αβεβαιότητα

Παραδείγματα. Οι παρακάτω κατανομές έχουν όλες την ίδια μέση τιμή, ίση με 1.

K_1. $X = 1$ με $s = 1$: βέβαιο αποτελέσματα με $M = 1$

K_2. $\{X,Y\} = \{0,4\}$ με $\{s,t\} = \{0.75, 0.25\} \Rightarrow M = 0(0.75) + 4(0.25) = 1$,

K_3. $\{X,Y\} = \{0,100\}$ με $\{s,t\} = \{0.99, 0.01\} \Rightarrow M = 0(0.99) + 100(0.01) = 1$

Επομένως ένας παίκτης που χρησιμοποιεί την μέση τιμή ως μέτρο σύγκρισης θα είναι αδιάφορος ως προς αυτά τα τρία παίγνια. Στη πραγματικότητα ενώ ορισμένοι παίκτες μπορεί να χρησιμοποιούν το παραπάνω κριτήριο της μέσης τιμής, άλλοι προτιμούν το βέβαιο του παίγνιου K_1 που τους δίνει μικρό αλλά σίγουρο έσοδο $X = 1$, άλλοι προτιμούν το μεγάλο ρίσκο του παίγνιου K_3 που έχει τη δυνατότητα μεγάλου εσόδου $Y = 100$ έστω με μικρή πιθανότητα $t = 1/100$, ενώ έχει και πολύ μεγάλη πιθανότητα $t = 99/100$ να μην πάρουν τίποτε $X = 0$, και τέλος άλλοι το ενδιάμεσο K_2.

Παράδειγμα. Θα συγκρίνουμε τα τρία παίγνια με την ίδια μέση τιμή που εξετάσαμε προηγουμένως, ως προς το δείκτη προτίμησης που ορίζουν οι παρακάτω συναρτήσεις χρησιμότητας

$$U_A(C) = C, \quad U_B(C) = \sqrt{C}, \quad U_\Gamma(C) = C^2$$

Α. Με γραμμική συνάρτηση χρησιμότητας ο παίκτης είναι ουδέτερος στον κίνδυνο. Τα τρία παίγνια έχουν την ίδια μέση τιμή και επομένως τον ίδιο δείκτη χρησιμότητας $V = U(1) = 1$. Ο παίκτης είναι αδιάφορος:

$$K_1 \sim K_2 \sim K_3.$$

Β. Με κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας ο παίκτης είναι επιφυλακτικός στον κίνδυνο. Τα τρία παίγνια έχουν δείκτη χρησιμότητας:

$$U_1 = \sqrt{1} = 1,\ U_2 = \frac{3}{4}\sqrt{0} + \frac{1}{4}\sqrt{4} = \frac{1}{2},\ U_3 = \frac{99}{100}\sqrt{0} + \frac{1}{100}\sqrt{100} = \frac{1}{10}$$

Η σειρά προτίμησης είναι:

$$K_1 > K_2 > K_3$$

Γ. Με κυρτή συνάρτηση χρησιμότητας ο παίκτης είναι ριψοκίνδυνος. Τα τρία παίγνια έχουν δείκτη χρησιμότητας.

$$U_1 = 1^2 = 1,\ U_2 = \frac{3}{4}0^2 + \frac{1}{4}4^2 = 4,\ U_3 = \frac{99}{100}0^2 + \frac{1}{100}100^2 = 100$$

Η σειρά προτίμησης είναι:

$$K_1 < K_2 < K_3.$$

□

4. Ασφάλιση. Ένας χώρος οικονομικής δραστηριότητας με έντονο το στοιχείο της αβεβαιότητας αφορά τις *ασφάλειες* (insurance). Έτσι αν μια ασφαλιστική εταιρεία ασφαλίζει για ενδεχόμενο κίνδυνο απώλειας μια περιουσία αξίας c με *ασφάλιστρο* (premium) $p < 1$ και η πιθανότητα του ατυχήματος είναι t, τότε υποθέτοντας για ευκολία μηδενικό κόστος, η εταιρεία αντιμετωπίζει τα παρακάτω ενδεχόμενα όσον αφορά το κέρδος:

$$\begin{cases} X = pc & \text{με πιθανότητα } s = 1 - t \\ Y = pc - c & \text{με πιθανότητα } t \end{cases}$$

Το μέσο κέρδος είναι:

$$m = sX + tY = (1-t)(pc) + t(pc - c) = (p - t)c$$

Λόγω της στατιστικής του μεγάλου αριθμού πελατών το παραπάνω μέσο κέρδος αντιπροσωπεύει και το μέσο πραγματικό κέρδος της εταιρίας ανά πελάτη. Επομένως για να έχει κερδοφορία αρκεί να χρεώσει ασφάλιστρο τουλάχιστον ίσο με την πιθανότητα της εκταμίευσης:

$$p \geq t$$

Σε συνθήκη πλήρους ανταγωνισμού στην ασφαλιστική αγορά η κερδοφορία θα είναι μηδενική και το ασφάλιστρο θα είναι το ελάχιστο δυνατό, δηλαδή ίσο με την πιθανότητα της εκταμίευσης:

$$p = t$$

Καλείται *αντικειμενικό ασφάλιστρο* (fair premium).

5. Πλήρης ασφάλιση. Ένα άτομο με συνολική περιουσία c αντιμετωπίζει το ενδεχόμενο να χάσει ένα τμήμα της α, με πιθανότητα t. Δηλαδή αντιμετωπίζει ένα τυχερό παίγνιο, με ενδεχόμενα.

$$\begin{cases} X = c - \alpha & \text{με πιθανοτητα } t \\ Y = c & \text{με πιθανοτητα } s = 1 - t \end{cases}$$

Η μέση τιμή του παίγνιου είναι:

$$m = (c - \alpha)t + c(1 - t) = c - t\alpha$$

Αν το άτομο ασφαλιστεί πλήρως έναντι της απώλειας α με ασφάλιστρο $p < 1$ ανά μονάδα απώλειας, τότε θα εξασφαλίσει το σίγουρο αποτέλεσμα

$$Z = c - p\alpha$$

Θα δείξουμε ότι:

Το μέγιστο ασφάλιστρο p *που είναι διατεθειμένο να πληρώσει ένα άτομο για πλήρη κάλυψη είναι:*

ίσο , μεγαλύτερο, μικρότερο

από το αντικειμενικό ασφάλιστρο t*, αν το άτομο είναι αντίστοιχα:*

ουδέτερο, επιφυλακτικό, ριψοκίνδυνο.

Απόδειξη. Για κάθε άτομο, το παίγνιο έχει ένα συγκεκριμένο δείκτη χρησιμότητας:

$$V(X, Y) = (1 - t)U(c) + tU(c - \alpha)$$

Όσον αφορά το σίγουρο αποτέλεσμα $Z = c - p\alpha$, αυτό ελαττώνεται καθώς το ασφάλιστρο p αυξάνει, επομένως και η χρησιμότητά του επίσης ελαττώνεται. Το μέγιστο ασφάλιστρο p που θα δεχτεί το άτομο είναι αυτό για το οποίο η αντίστοιχη χρησιμότητα Z θα πέσει στο επίπεδο χρησιμότητας του παίγνιου:

$$U(Z) = V(X, Y)$$

Το παραπάνω ισχύει σε κάθε περίπτωση. Αν το άτομο είναι επιφυλακτικό τότε προτιμάει την μέση τιμή από το παίγνιο, οπότε η χρησιμότητα της μέσης τιμής είναι μεγαλύτερη από τον δείκτη του παίγνιου:

$$U(m) > V(X, Y)$$

Επομένως το μέγιστο που θα δεχτεί ο ασφαλιζόμενος, ικανοποιεί τη σχέση:

$$U(m) > U(Z) \Rightarrow m > Z \Rightarrow c - t\alpha > c - p\alpha \Rightarrow p > t$$

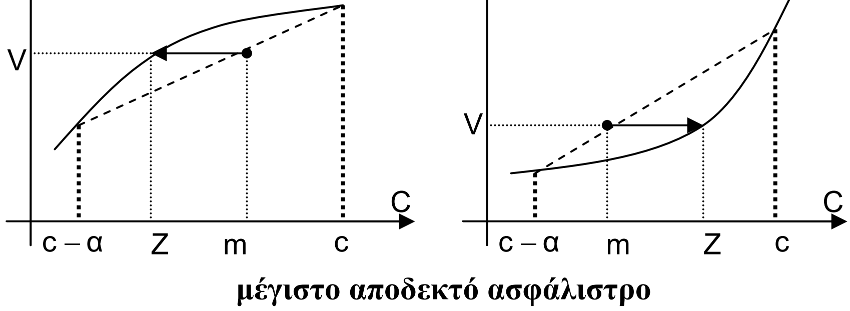
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.

□

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το μέγιστο ασφάλιστρο p που θα ήταν διατεθειμένος να πληρώσει ο ασφαλιζόμενος για πλήρη κάλυψη, είναι αυτό για το οποίο η χρησιμότητα του σίγουρου $Z = c - p\alpha$ συμπίπτει με τον δείκτη χρησιμότητας του παίγνιου:

$$U(c - p\alpha) = (1 - t)U(c) + tU(c - \alpha)$$

Για κάθε συγκεκριμένη συνάρτηση U το μέγιστο p εξαρτάται από τα $\{c, \alpha, t\}$, και βρίσκεται γραφικά όπως στα παρακάτω γραφήματα, ως εξής:



μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο

1. Βρίσκουμε τον δείκτη χρησιμότητας του παίγνιου από τη σχέση:

$$m = (1 - t)c + t(c - \alpha) \Rightarrow V = (1 - t)U(c) + tU(c - \alpha)$$

2. Βρίσκουμε το Z με την ίδια χρησιμότητα: $V = U(Z)$
3. Βρίσκουμε το p από τη σχέση: $Z = c - p\alpha$

Παρατηρούμε ότι το t ικανοποιεί τη σχέση $m = c - t\alpha$, οπότε έχουμε:

$Z < m \Rightarrow p > t$, για επιφυλακτικό όπως στο πρώτο γράφημα

$Z > m \Rightarrow p < t$, για ριψοκίνδυνο όπως στο δεύτερο γράφημα

$Z = m \Rightarrow p = t$, για ουδέτερο

Παραδειγμα. Θα υπολογίσουμε το μέγιστο ασφάλιστρο p που θα ήταν διατεθειμένος να καταβάλει ο ασφαλιζόμενος για πλήρη κάλυψη, με τις παρακάτω συναρτήσεις χρησιμότητας, από την σχέση:

$$U(c - p\alpha) = (1-t)U(c) + tU(c-\alpha)$$

1. $U(C) = \ln C$, επιφυλακτικός στον κίνδυνο:

$$\ln(Z) = (1-t)\ln c + t\ln(c-\alpha) = \ln c^{1-t}(c-\alpha)^t$$

Επομένως:

$$c - p\alpha = c^{1-t}(c-\alpha)^t \Rightarrow p = \frac{c}{\alpha} - \left(\frac{c}{\alpha}\right)^{1-t}\left(\frac{c}{\alpha} - 1\right)^t$$

Παρατηρούμε ότι το σίγουρο αποτέλεσμα με την ίδια χρησιμότητα όπως το παίγνιο, είναι:

$$Z = c^{1-t}(c-\alpha)^t$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε:

2. $U(C) = C$, ουδέτερος στον κίνδυνο:

$$c - p\alpha = (1-t)c + t(c-\alpha) \Rightarrow p = t$$

3. $U(C) = C^2$, ριψοκίνδυνος:

$$(c - p\alpha)^2 = (1-t)c^2 + t(c-\alpha)^2 \Rightarrow p = \frac{c}{\alpha} - \sqrt{(1-t)\left(\frac{c}{\alpha}\right)^2 + t\left(\frac{c}{\alpha} - 1\right)^2}$$

Παράδειγμα. Με πιθανότητα $50\% \Rightarrow t = 0.5$ να χαθεί όλη η περιουσία: $\alpha = c$, βρίσκουμε το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις:

1. Για τον επιφυλακτικό: $p = 1$. Δηλαδή θα δεχόταν να πληρώσει οιοδήποτε τμήμα της περιουσίας του για να έχει σίγουρα το υπόλοιπο. Λόγω της λογαριθμικής χρησιμότητας προσπαθεί με οιοδήποτε κόστος να αποφύγει το ενδεχόμενο να χάσει όλη την περιουσία του που θα του έδινε χρησιμότητα $-\infty$.
2. Για τον ουδέτερο: $p = 1/2$. Δηλαδή θα δεχόταν να πληρώσει μέχρι το μισό της περιουσίας του για να έχει σίγουρα το υπόλοιπο.
3. Για τον ριψοκίνδυνο: $p = 1 - \sqrt{0.5} \approx 0.3$. Δηλαδή θα δεχόταν να πληρώσει μέχρι περίπου το ένα τρίτο της περιουσίας του για να έχει σίγουρα το υπόλοιπο.

Παράδειγμα. Με πιθανότητα $50\% \Rightarrow t = 0.5$ να χαθεί η μισή περιουσία: $\alpha = c/2$, βρίσκουμε το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις:

1. Για τον επιφυλακτικό: $p = 2 - \sqrt{2} \approx 0.6 \Rightarrow p/2 \approx 0.3$, δηλαδή θα δεχόταν να πληρώσει μέχρι περίπου το ένα τρίτο της περιουσίας του για να έχει σίγουρα την υπόλοιπη.
1. Για τον ουδέτερο: $p = 0.5 \Rightarrow p/2 = 0.25$, δηλαδή θα δεχόταν να πληρώσει το ένα τέταρτο της περιουσίας του για να έχει σίγουρα την υπόλοιπη.
3. Για τον ριψοκίνδυνο: $p = 2 - \sqrt{2.5} \approx 0.4 \Rightarrow p/2 \approx 0.2$, δηλαδή θα δεχόταν να πληρώσει περίπου το ένα πέμπτο της περιουσίας του για να έχει σίγουρα την υπόλοιπη.

□

6. Δείκτες επιφυλακτικότητας Arrow-Pratt. Στο πρόβλημα της πλήρους ασφαλιστικής κάλυψης που εξετάσαμε παραπάνω, το μέγιστο ασφάλιστρο p που θα ήταν διατεθειμένος να καταβάλει ο ασφαλιζόμενος, εξαρτάται από την «καμπυλότητα» της συνάρτησης χρησιμότητας $U = U(C)$. Για ουδέτερα άτομα η συνάρτηση έχει μηδενική καμπυλότητα και όπως διαπιστώσαμε το μέγιστο p είναι το αντικειμενικό:

$$p = t$$

Καθώς η καμπυλότητα αυξάνει τότε το p απομακρύνεται από αυτή την τιμή. Αυξάνει όταν η U γίνεται περισσότερο κοίλη και επομένως το άτομο περισσότερο επιφυλακτικό, ελαττώνεται όταν η U γίνεται λιγότερο κοίλη και επομένως το άτομο λιγότερο επιφυλακτικό. Η καμπυλότητα της U καθορίζεται από το ρυθμό μεταβολής της κλίσης, δηλαδή της οριακής χρησιμότητας:

$$U'(C)$$

Συνήθως τα άτομα είναι επιφυλακτικά στον κίνδυνο, δηλαδή έχουν κοίλες συναρτήσεις χρησιμότητας, οπότε για ευκολία παίρνουμε την δεύτερη παράγωγο με αρνητικό πρόσημο ώστε να είναι θετική για τις κοίλες συναρτήσεις. Εκτός από τη δεύτερη παράγωγο:

$$-U''(C),$$

δηλαδή την παράγωγο της παραγώγου, χρησιμοποιούνται συνήθως δύο άλλοι δείκτες κυρτότητας που αφορούν τον σχετικό ρυθμό και την ελαστικότητα της παραγώγου:

$r = R(C) = -\dfrac{U''(C)}{U'(C)}$: *Arrow-Pratt απόλυτος δείκτης*

$\rho = E(C) = -\dfrac{CU''(C)}{U'(C)}$:*Arrow-Pratt σχετικός δείκτης*

Οι παραπάνω δύο δείκτες έχουν την χρήσιμη ιδιότητα να παραμένουν *αναλλοίωτοι* (invariant) ως προς γραμμικούς μετασχηματισμούς των συναρτήσεων χρησιμότητας {Ε2(5)}, με την έννοια ότι οι συναρτήσεις

$$U(C) \;\&\; V = \alpha U(C) + \beta$$

έχουν το ίδιο r και το ίδιο ρ. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι συναρτήσεις που έχουν σταθερό κάποιον από τους παραπάνω δείκτες. Εκτός από τις παραβολικές συναρτήσεις:

$$U = -\alpha C^2 + \beta C + \gamma$$

που έχουν σταθερή τη δεύτερη παράγωγο, σταθερούς δείκτες θα έχουν οι συναρτήσεις των οποίων οι παράγωγοι είναι εκθετικές ή δυνάμεις αντίστοιχα, ως εξής:

1. Σταθερό σχετικό δείκτη r *έχουν οι εκθετικές:* $U(C) = \alpha e^{-rC} + \beta$

2α. Σταθερό απόλυτο δείκτη $\rho \neq 1$ *έχουν οι δυνάμεις:* $U = \alpha C^{1-\rho} + \beta$

2β. Σταθερό απόλυτο δείκτη $\rho = 1$ *έχει ο λογάριθμος:* $U = \alpha \ln C + \beta$

Απόδειξη. Σταθερούς δείκτες θα έχουν οι συναρτήσεις των οποίων η παράγωγος $U'(C)$ έχει σταθερό σχετικό ρυθμό και σταθερή ελαστικότητα ίσα με $-r \;\&\; -\rho$ αντίστοιχα. Από τη θεωρία των ρυθμών μεταβολής {1β.4(2)} προκύπτει ότι η συνάρτηση της παραγώγου θα είναι εκθετική και δύναμη αντίστοιχα:

$$U'(C) = Ae^{-rC} \;\&\; U'(C) = AC^{-\rho}$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε το ζητούμενο.

□

Οι παραπάνω συναρτήσεις καλύπτουν όλο το φάσμα σταθερών τιμών για τους δύο δείκτες, και είναι οι μοναδικές συναρτήσεις με αυτή την ιδιότητα. Οι σταθερές $\{\alpha, \beta\}$ είναι αυθαίρετες. Συνήθως επιλέγονται έτσι ώστε σε κάποιο επίπεδο αναφοράς να ικανοποιούνται οι συνθήκες:

$$U(C_0) = 0,\; U'(C_0) = 1$$

Βρίσκουμε έτσι τις παρακάτω συναρτήσεις:

1. Εκθετικές: $U_r(C) = \dfrac{1 - e^{-rC}}{r}$, με $C_0 = 0$

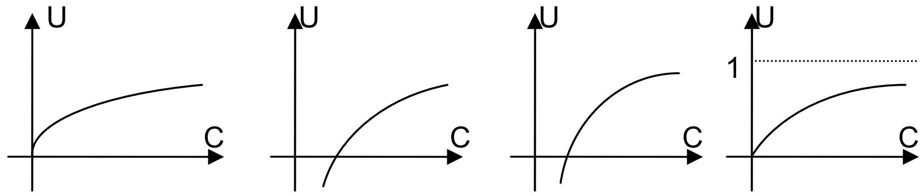
2α. Δυνάμεις: $U_\rho(C)=\dfrac{C^{1-\rho}-1}{1-\rho}$ για $\rho\neq 1$, με $C_0=1$

2β. Λογάριθμος: $U_1(C)=\ln C$ για $\rho=1$, με $C_0=1$

Παρατήρηση. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα l' Hopital βρίσκουμε ότι ο λογάριθμος 2β προκύπτει ως το όριο των δυνάμεων 2α όταν $\rho\to 1$. Πράγματι, θεωρώντας τις παραστάσεις ως συναρτήσεις του ρ, και παίρνοντας το όριο (με σταθερό C), βρίσκουμε:

$$U_\rho=\frac{C^{1-\rho}-1}{1-\rho}\sim\frac{0}{0}\sim\frac{(C^{1-\rho}-1)'}{(1-\rho)'}=\frac{-C^{1-\rho}\ln C}{-1}\to\ln C \text{ όταν } \rho\to 1.$$

□



$0<\rho<1$	$\rho=1$	$\rho>1$	$r>0$
$\dfrac{C^{1-\rho}-1}{1-\rho}$	$\ln C$	$\dfrac{1-C^{1-\rho}}{\rho-1}$	$\dfrac{1-e^{-rC}}{r}$

Συναρτήσεις χρησιμότητας με σταθερό δείκτη Arrow-Pratt

Στο παραπάνω σχήμα δίνουμε και τα γραφήματα αυτών των συναρτήσεων. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις με σταθερό απόλυτο δείκτη $\rho>0$, χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες και μία ειδική ενδιάμεση, ανάλογα της τιμής του ρ:

$0<\rho<1$: ρίζες, $\rho>1$: υπερβολικές, $\rho=1$: λογαριθμική

Οι υπερβολικές έχουν αρνητικό πρόσημο για να γίνουν αύξουσες.

7. Επένδυση με αβεβαιότητα. Εκτός από τις ασφάλειες μια άλλη σημαντική οικονομική δραστηριότητα με έντονο το στοιχείο της αβεβαιότητας αφορά τις επενδύσεις. Θεωρούμε έναν επενδυτή με συνάρτηση U γνήσια αύξουσα και με αρχικό πλούτο c. Μπορεί να επενδύσει ένα οιαδήποτε τμήμα Z του αρχικού πλούτου σε μια επιχείρηση υψηλού ρίσκου, με:

1. Πιθανότητα s να έχει θετική απόδοση $r>0$
2. Πιθανότητα $t=1-s$ να έχει αρνητική απόδοση $-\rho<0$.

Το άτομο αντιμετωπίζει ένα παίγνιο όπου κάθε επιλογή $0\le Z\le c$ έχει ως αποτέλεσμα τα παρακάτω ενδεχόμενα εισοδήματα:

$$\begin{cases} X=(c-Z)+Z(1+r)=c+rZ & \text{με πιθανότητα } s, \text{ (ευνοικό)}\\ Y=(c-Z)+Z(1-\rho)=c-\rho Z & \text{με πιθανότητα } t=1-s, \text{ (δυσμενές)}\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το Y μπορεί να είναι και αρνητικό αν $-\rho$ είναι πολύ αρνητικό. Για ευκολία υποθέσαμε ότι η αποταμίευση $c-Z$ δεν αποδίδει. Για να επιλέξουμε την βέλτιστη επένδυση, μεγιστοποιούμε τον αντίστοιχο δείκτη χρησιμότητας του ατόμου, ως συνάρτησης του Z:

$$V(Z)=sU(X)+tU(Y)=sU(c+rZ)+tU(c-\rho Z),\ 0\le Z\le c$$

με παραγώγους:

$$V'(Z)=srU'(c+rZ)-t\rho U'(c-\rho Z)$$
$$V''(Z)=sr^2U''(c+rZ)+t\rho^2U''(c-\rho Z)$$

Έχει τις ίδιες ιδιότητες κυρτότητας που έχει και η συνάρτηση χρησιμότητας. Αν το άτομο είναι ουδέτερο στον κίνδυνο ή ριψοκίνδυνο, τότε ο δείκτης ορίζει γραμμική ή κυρτή συνάρτηση αντίστοιχα, και η λύση θα είναι ακραία. Θα επενδύσει καθόλου ή όλο το ποσό, ανάλογα πια επιλογή δίνει μεγαλύτερο δείκτη:

$$\max\{V(0),\ V(c)\} \Rightarrow \max\{U(c),\ sU[(1+r)c)+tU((1-\rho)c]\}$$

Αν είναι επιφυλακτικό τότε ο δείκτης ορίζει κοίλη συνάρτηση και διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Α. Το βέλτιστο θα είναι στο αριστερό σύνορο $Z=0$,οπότε δεν θα επενδυθεί κανένα ποσό και το άτομο θα είναι *καθαρός αποταμιευτής* (saver) αν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$V'(0)\le 0:(sr-t\rho)U'(c)\le 0 \Rightarrow sr-t\rho\le 0 \quad \text{διότι } U'>0$$

Συμπεραίνουμε ότι ένα επιφυλακτικό άτομο θα επενδύσει μόνο αν η *μέση απόδοση* (mean return) είναι γνήσια θετική:

$$m=sr-t\rho>0 \Rightarrow sr>t\rho$$

Σαυτή την περίπτωση:

Β. Το βέλτιστο θα είναι στο δεξιό σύνορο $Z=c$, οπότε θα επενδυθεί ολόκληρο το ποσό και το άτομο θα είναι *καθαρός επενδυτής* (investor), αν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$V'(c)\ge 0: srU'[(1+r)c]-t\rho U'[(1-\rho)c]\ge 0$$

$$\Rightarrow srU'[(1+r)c]\ge t\rho U'[(1-\rho)c]$$

Γ. Σε κάθε άλλη περίπτωση το βέλτιστο θα είναι ενδιάμεσο: $0<Z<c$, οπότε το άτομο θα είναι και αποταμιευτής και επενδυτής. Σαυτή την περίπτωση το ποσό της επένδυσης καθορίζεται από τη στάσιμη λύση:

$$V'(Z)=0: srU'(c+rZ)-t\rho U'(c-\rho Z)=0$$

$$\Rightarrow srU'(c+rZ)=t\rho U'(c-\rho Z)$$

Παράδειγμα. Υποθέτοντας επιφυλακτικό καταναλωτή με χρησιμότητα $U=\ln C$, και επένδυση με αποδόσεις $r=0.2$, $-\rho=-0.1$ και αντίστοιχες πιθανότητες $\{s,t\}$, βρίσκουμε:

$$V(Z)=s\ln(c+0.2Z)+t\ln(c-0.1Z)$$

$$V'(Z)=s\frac{0.2}{c+0.2Z}-t\frac{0.1}{c-0.1Z}=\frac{2s}{10c+2Z}-\frac{1-s}{10c-Z}$$

$$V'(0)=\frac{3s-1}{10c},\quad V'(c)=\frac{2s}{12c}-\frac{1-s}{9c}=\frac{10s-4}{36c}$$

Συμπεραίνουμε ότι θα έχουμε:

Α. Μηδενική επένδυση: $Z=0$, αν $V'(0)\le 0 \Rightarrow s\le 1/3$, δηλαδή αν η πιθανότητα για θετική απόδοση είναι μικρότερη του 33.3%.

Β. Πλήρη επένδυση: $Z=c$, αν $V'(c)\ge 0 \Rightarrow s\ge 2/5$, δηλαδή αν η πιθανότητα για θετική απόδοση είναι τουλάχιστον 40%

Γ. Μερική επένδυση αν η πιθανότητα θετικής απόδοσης είναι γνήσια μεταξύ του $s=1/3 \Rightarrow 33.3\%$ και του $s=2/5 \Rightarrow 40\%$. Σαυτή την περίπτωση, η επένδυση θα είναι:

$$V'(Z)=0 \Rightarrow Z=c(15s-5)$$

Π.χ. με $s:35\%$, βρίσκουμε: $15s-5=0.25$, δηλαδή θα επενδύσει το 1/4 της περιουσίας του.

□

8. Γραφική λύση. Για την γραφική λύση του προβλήματος, το διατυπώνουμε στην αρχική του μορφή ως πρόβλημα μεγιστοποίησης χρησιμότητας σε δύο μεταβλητές:

$$\max_{X,Y}\{V(X,Y)=sU(X)+tU(Y)\}$$

όπου τα καταναλωτικά αγαθά είναι τα ενδεχόμενα εισοδήματα στις δύο περιπτώσεις: $\{X,Y\}$. Υπάρχει και ένας περιορισμός ο οποίος βρίσκεται απαλείφοντας το Z που εδώ παίζει το ρόλο της παραμέτρου. Βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{l} X = c + rZ \\ Y = c - \rho Z \end{array}\right\} \Rightarrow \rho X + rY = \rho c + rc$$

Η σχέση έχει την μορφή εισοδηματικού περιορισμού {E7(11)} για τα δύο ενδεχόμενα εισοδήματα $\{X, Y\}$, με τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Το κάθε ενδεχόμενο εισόδημα έχει μοναδιαίο κόστος όπως ακριβώς τα αγαθά στην κατανάλωση. Μάλιστα το κάθε κόστος είναι ίσο με την απόδοση στο άλλο ενδεχόμενο. Είναι το λεγόμενο *κόστος χαμένων ευκαιριών* (lost opportunities cost). Έτσι μπορούμε να υποκαταστήσουμε εισόδημα από το ένα ενδεχόμενο στο άλλο, με ρυθμό υποκατάστασης:

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{\rho}{r}$$

Πράγματι αν επενδύσουμε μία επιπλέον μονάδα Z, το X θα αυξηθεί κατά r και το Y θα μειωθεί κατά ρ.

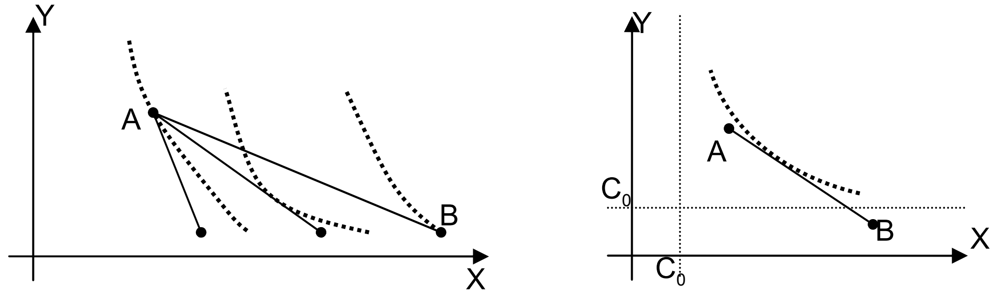
2. Ο εισοδηματικός περιορισμός στο δεξιό μέρος είναι εκφρασμένος με αρχικά εισοδήματα, όπου στο κάθε ενδεχόμενο αυτά δίνονται από τον αρχικό πλούτο c. Καθορίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα στο επίπεδο των $\{X, Y\}$, με τα εξής χαρακτηριστικά:

2.1 Αρχίζει από το σημείο $A:(c, c)$ με $Z = 0$. Αντιστοιχεί στην επιλογή του *καθαρού* ή *πλήρως αποταμιευτή* που δεν επενδύει καθόλου, και έχει τον αρχικό πλούτο c στο κάθε ενδεχόμενο

2.2 Καθώς το Z αυξάνει κινείται προς τα δεξιά κάτω, διότι το X αυξάνει και το Y μειώνεται, με αρνητική κλίση ίση $-\rho / r$. Η κλίση μικραίνει σε μέτρο όταν η θετική απόδοση r μεγαλώνει ή όταν η αρνητική ρ μικραίνει.

2.4 Καταλήγει στο σημείο $B:\{(1+r)c, (1-\rho)c\}$ με $Z = c$. Αντιστοιχεί στην επιλογή του *καθαρού* ή *πλήρως επενδυτή* που επενδύει όλο τον αρχικό πλούτο.

Στο πρώτο γράφημα παρακάτω δείχνουμε την *θέση* (position) ενός επιφυλακτικού επενδυτή με κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας, σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις όσον αφορά την θετική απόδοση r. Καθώς το r μεγαλώνει η κλίση της ευθείας μικραίνει και η θέση του επενδυτή μετατοπίζεται ως εξής. Αρχίζοντας από το σημείο A της καθαρής αποταμίευσης για μικρά r, μετατοπίζεται σε ενδιάμεσα σημεία μερικής αποταμίευσης και μερικής επένδυσης για ενδιάμεσα r για να καταλήξει στη θέση B της καθαρής επένδυσης για μεγάλα r.



θέση επενδυτή

Όσον αφορά το γράφημα, παρατηρούμε και τα εξής:

1. Επειδή μεταβάλλεται μόνο το r, η Y−συντεταγμένη της κάτω κορυφής B παραμένει σταθερή στην σταθερή τιμή $Y_B = (1-\rho)c$, την οποία εδώ υποθέσαμε θετική αλλά θα μπορούσε να είναι και αρνητική αν το ρ είναι μεγαλύτερο του 1 οπότε χάνεται όλο το αρχικό κεφάλαιο.

2. Υπό ορισμένες συνθήκες ιδιαίτερης επιφυλακτικότητας, η θέση B της πλήρους επένδυσης μπορεί να μην καταλαμβάνεται ποτέ. Αυτό θα συμβεί αν το αντίστοιχο εισόδημα

$Y_B = (1-\rho)c$ είναι μικρότερο από ένα ελάχιστο ανεκτό εισόδημα C_0, π.χ. αν η συνάρτηση χρησιμότητας έχει την μορφή:

$$U = \ln(C - C_0)$$

οπότε εισόδημα χαμηλότερο του C_0 γίνεται απαγορευτικό, όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα. Ειδικά για $C_0 = 0$ δεν θα είχαμε ποτέ πλήρη επένδυση αν $Y_B = (1-\rho)c \le 0 \Rightarrow \rho \ge 1$, δηλαδή αν υπήρχε και η ελάχιστη πιθανότητα να χαθεί όλο το κεφάλαιο. Αντίστοιχη διερεύνηση μπορεί να γίνει και για το άλλο άκρο Α του πλήρως αποταμιευτή.