1 6!+1
2 10!
3 8
4 10
9,5
35!

Θέμα 1

A) ϑ_1: ευνοϊκή συγκυρία, $P(\vartheta_1)=0{,}5$

ϑ_2: Δυσμενής συγκυρία, $P(\vartheta_2)=0{,}5$

Έρευνα Α:-Β:

s_1: Πρόβλεψη ευνοϊκής συγκυρίας

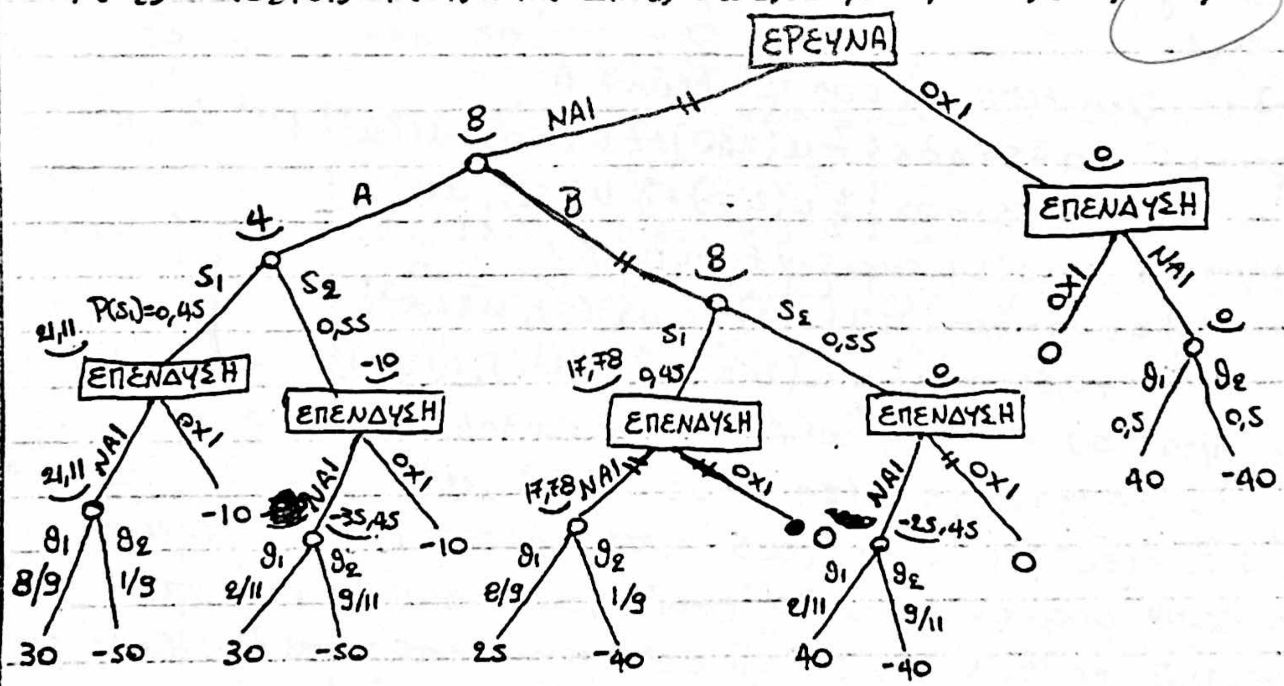
s_2: Πρόβλεψη δυσμενούς συγκυρίας.

$P(s_1|\vartheta_1)=0{,}8 \quad P(s_2|\vartheta_1)=1-P(s_1|\vartheta_1)=0{,}2$

$P(s_1|\vartheta_2)=0{,}1 \quad P(s_2|\vartheta_1)=1-P(s_2|\vartheta_2)=0{,}9$

$P(s_1)=P(s_1|\vartheta_1)\cdot P(\vartheta_1)+P(s_1|\vartheta_2)\cdot P(\vartheta_2)=0{,}8\cdot 0{,}5+0{,}1\cdot 0{,}5=0{,}45$

$P(s_2)=P(s_2|\vartheta_1)\cdot P(\vartheta_1)+P(s_2|\vartheta_2)\cdot P(\vartheta_2)=0{,}2\cdot 0{,}5+0{,}9\cdot 0{,}5=0{,}55$



$P(\vartheta_1|s_1)=\dfrac{P(s_1|\vartheta_1)\cdot P(\vartheta_1)}{P(s_1)}=\dfrac{0{,}8\cdot 0{,}5}{0{,}45}=\dfrac{8}{9} \quad P(\vartheta_2|s_1)=1-P(\vartheta_1|s_1)=\dfrac{1}{9}$

$P(\vartheta_1|s_2)=\dfrac{P(s_2|\vartheta_1)\cdot P(\vartheta_1)}{P(s_2)}=\dfrac{0{,}2\cdot 0{,}5}{0{,}55}=\dfrac{2}{11} \quad P(\vartheta_2|s_2)=1-P(\vartheta_1|s_2)=\dfrac{9}{11}$

$u(\text{Έρευνα } A \mid S_1) = \max\left\{ \frac{8}{9} u(30) + \frac{1}{9} u(-50),\ u(-10) \right\} =$

$= \max\{ 8/9 \cdot 30 - 50/9,\ -10 \} = 21{,}11$

$u(\text{Έρευνα } A \mid S_2) = \max\left\{ \frac{2}{11} \cdot 30 + \frac{9}{11}(-50);\ -10 \right\} = \max\{-35{,}45,\ -10\} = -10.$

$u(\text{Έρευνα } B \mid S_1) = \max\left\{ \frac{8}{9} u(25) + \frac{1}{9} u(-40),\ u(0) \right\} =$

$= \max\left\{ \frac{8}{9} \cdot 25 - \frac{40}{9},\ 0 \right\} = 17{,}78$

$u(\text{Έρευνα } B / S_2) = \max\{ 2/11 \cdot 40 - 9/11 \cdot 40,\ 0 \} = \max\{-25{,}45,\ 0\} = 0$

$u(\text{Έρευνα } A) = 0{,}45 \cdot 21{,}11 + 0{,}55 \cdot (-10) = 4$

$u(\text{Έρευνα } B) = 0{,}45 \cdot 17{,}78 + 0{,}55 \cdot 0 = 8$

$u(\text{Όχι Έρευνα}) = \max\{ 0{,}5 \cdot u(40) + 0{,}5\, u(-40),\ 0 \} = \max\{0, 0\} = 0$

Επομένως ο επενδυτής θα πραγματοποιήσει την έρευνα B, καθώς
$u(\text{Έρευνα } B) > u(\text{Έρευνα } A) > u(\text{Όχι έρευνα})$

ii) Έστω ότι ο επενδυτής είχε γνωστή μη γραμμική ωφελιμότητα ως προς την περιουσία.
Θα υπολόγιζε την ωφελιμότητα που θα προέκυπτε από τις τρεις επιλογές ως εξής.

Ωφελιμότητα επενδυτή από την έρευνα A:

$u(\text{Έρευνα } A) = 0{,}45 \cdot \max\left\{ \frac{8}{9} u(230) + \frac{1}{9} u(150),\ u(190) \right\} + 0{,}55 \cdot \max\left\{ \frac{2}{11} u(230) + \frac{9}{11} u(150),\ u(190) \right\}$

Ωφελιμότητα επενδυτή από την έρευνα B:

$u(\text{Έρευνα } B) = 0{,}45 \cdot \max\left\{ \frac{8}{9} u(225) + \frac{1}{9} u(160),\ u(200) \right\} + 0{,}55 \max\left\{ \frac{2}{11} u(240) + \frac{9}{11} u(160),\ u(200) \right\}$

Ωφελιμότητα του επενδυτή αν δεν πραγματοποιήσει έρευνα:

$u(\text{Όχι έρευνα}) = \max\{ 0{,}5 \cdot u(240) + 0{,}5\, u(160),\ u(200) \}$

Καθώς η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι γνωστή, οι τιμές των τριών περιπτώσεων μπορούν να υπολογιστούν και επομένως και να συγκριθούν.
Ο επενδυτής επιλέγει την επιλογή που ~~[illegible]~~ του δίνει τη μεγαλύτερη ωφελιμότητα.

ΛΥΣΗ ΤΟΥ 18

5/9

ΘΕΜΑ 1ο Β)

$$50\%\, u(100) + 50\%\, u(20) = u(50)$$

$$u(x) = -(x-a)^2 \rightarrow \text{συντηρητικός}$$

• $2u(50) = u(100) + u(20)$

$$-2(50-a)^2 = -(100-a)^2 + -(20-a)^2$$

$$-2(50^2 - 100a + a^2) = -(100^2 - 200a + a^2) - (20^2 - 40 + a^2)$$

$$-2\cdot 50^2 + \cancel{200a} = -100^2 + 200a - 20^2 + 40a$$

$$-2\cdot 50^2 + 100^2 + 20^2 = 140a$$

$$10000 + 400 - 5000 = 140a$$

$$5400 = 140a$$

$$\frac{540}{14} = a \Rightarrow \boxed{a = 38,571}$$

$$1/3\, u(-30) + 2/3\, u(100) \quad ή \quad \frac{1}{2}u(40) + \frac{1}{2}u(60)$$

Ποιο είναι μεγαλύτερο?

$$-1/3(-30-38,75)^2 - 2/3(100-39,75)^2 \quad ή \quad \frac{1}{2}(40-38,57)^2 + \frac{1}{2}(60-38,57)^2$$

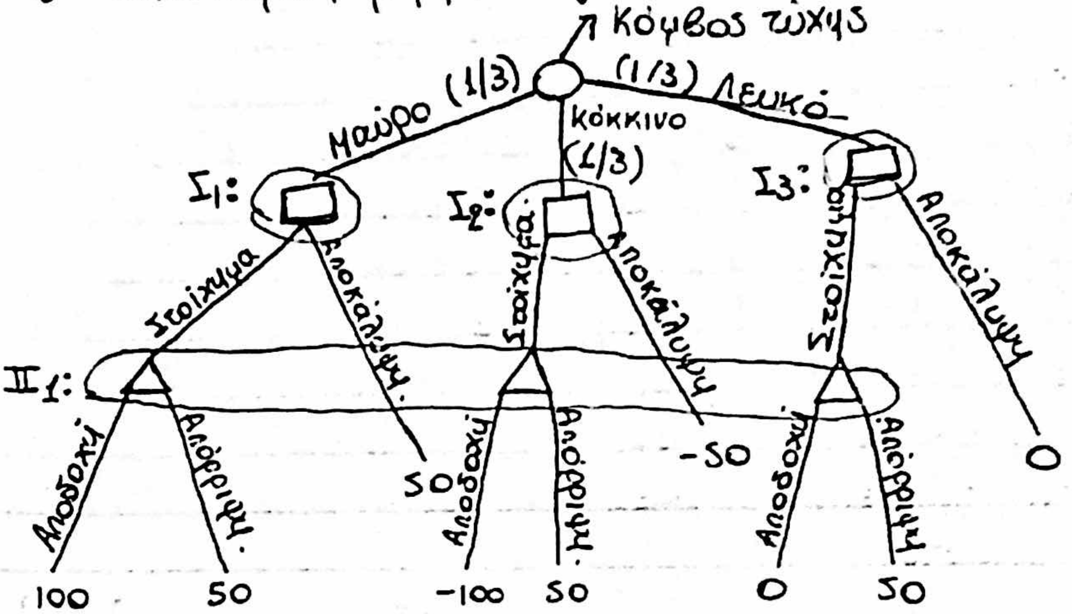
$$-1.567.281 - 2.515.763$$

$=$

Προτιμώ το δεύτερο σενάριο στο δέντρο αποφάσεων, επειδή έχει μεγαλύτερη ωφελιμότητα.

Θέμα 2

i) Εκτεταμένη μορφή παιγνίου:



Ο παίκτης I έχει τρία πληροφοριακά σύνολα και 2 επιλογές. Επομένως έχει $2^3=8$ στρατηγικές.

Ο παίκτης II έχει ένα πληροφοριακό σύνολο και 2 επιλογές. Επομένως έχει 2 στρατηγικές. (Έστω η επιλογή "Στοίχημα" συμβολίζεται ως "Σ" και η επιλογή αποκάλυψη ως "Α")

<u>Στρατηγικές του παίκτη I:</u>

	Μαύρο	Κόκκινο	Λευκό
$σ_1$	Σ	Σ	Σ
$σ_2$	Σ	Σ	Α
$σ_3$	Σ	Α	Σ
$σ_4$	Α	Σ	Σ
$σ_5$	Σ	Α	Α
$σ_6$	Α	Α	Σ
$σ_7$	Α	Σ	Α
$σ_8$	Α	Α	Α

Έστω τ_1 η στρατηγική αποδοχής του στοιχήματος από τον παίκτη ΙΙ και τ_2 η στρατηγική απόρριψης.

<u>Κανονική μορφή παιχνιδιού:</u>

ΚΙ	τ_1	τ_2
σ_1	$\frac{1}{3}100-\frac{1}{3}100+\frac{1}{3}0$	$\frac{1}{3}(50+50+50)$
σ_2	$\frac{1}{3}(100-100+0)$	$\frac{1}{3}(50+50+0)$
σ_3	$\frac{1}{3}(100-50+0)$	$\frac{1}{3}(50-50+50)$
σ_4	$\frac{1}{3}(50-100+0)$	$\frac{1}{3}(50+50+50)$
σ_5	$\frac{1}{3}(100-50+0)$	$\frac{1}{3}(50-50+0)$
σ_6	$\frac{1}{3}(50-50+0)$	$\frac{1}{3}(50-50+50)$
σ_7	$\frac{1}{3}(50-100+0)$	$\frac{1}{3}(50+50+0)$
σ_8	$\frac{1}{3}(50-50+0)$	$\frac{1}{3}(50-50+0)$

=

ΚΙ	τ_1	τ_2
σ_1	0	50
σ_2	0	100/3
σ_3	50/3	50/3
σ_4	−50/3	50
σ_5	50/3	0
σ_6	0	50/3
σ_7	−50/3	100/3
σ_8	0	0

~~Όπου ο πίνακας εκφράζεται~~

Όπου τα στοιχεία του πίνακα εκφράζουν το κέρδος του παίκτη Ι (ΚΙ)

ii)

ΚΙ	τ_1	τ_2
σ_1	$\underline{0}$	$\overline{50}$
~~σ_2~~	~~$\underline{0}$~~	~~100/3~~
σ_3	$\underline{\overline{50}/3}$	$\underline{50/3}$
~~σ_4~~	~~−50/3~~	~~$\overline{50}$~~
~~σ_5~~	~~$\overline{50}/3$~~	~~$\underline{0}$~~
~~σ_6~~	~~$\underline{0}$~~	~~50/3~~
~~σ_7~~	~~$\underline{-50/3}$~~	~~100/3~~
~~σ_8~~	~~$\underline{0}$~~	~~$\underline{0}$~~

Η $2^{η}$ γραμμή του πίνακα ($2^{η}$ στρατηγική του παίκτη Ι) κυριαρχείται από την $1^{η}$. Το ίδιο ισχύει και για ~~την 4η και για την 6η και για τις 7~~ τις γραμμές 4, 6, 7 και 8 του πίνακα.

Επίσης, η $5^{η}$ γραμμή του πίνακα κυριαρχείται από την $3^{η}$.

Επομένως έχουμε τον απλοποιημένο πίνακα:

ΚΙ	τ_1	τ_2
σ_1	$\underline{0}$	$\overline{50}$
σ_3	$\underline{\overline{50}/3}$	$\underline{50/3}$

$$V_I = \max_i \min_j \alpha_{ij} = \max\{\min(0,50), \min(50/3, 50/3)\} = \max(0, 50/3) = \frac{50}{3}$$

$$V_{II} = \min_j \max_i \alpha_{ij} = \min\{\max(0, 50/3), \max(50, 50/3)\} = \min(50/3, 50) = \frac{50}{3}.$$

Συνεπώς υπάρχει ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές.

Για την εύρεσή της βάζω μία κάτω παύλα στο μικρότερο ~~στοιχείο~~ στοιχείο της κάθε γραμμής, δηλαδή στη βέλτιστη επιλογή του παίκτη ΙΙ για κάθε στρατηγική του Ι και μία άνω παύλα στο μεγαλύτερο στοιχείο της κάθε στήλης,

δηλαδή στη βέλτιστη επιλογή του παίκτη I, για κάθε στρατηγική του II.
Το στοιχείο που θα έχει -σ -ay άνω και κάτω παύλα είναι σημείο ισορροπίας
Εδώ το σημείο ισορροπίας είναι το ~~σημείο που περιγράφεται από το~~
~~σημείο~~ (σ_3, τ_1), δηλαδή το ~~σημείο~~ στοιχείο που περιγράφεται από τις
στρατηγικές σ_3 του I και τ_1 του II.
Επομένως η βέλτιστη στρατηγική για τον παίκτη I είναι η
σ_3 = ({Στοίχημα | Μαύρο}, {Αποκάλυψη | Κόκκινο}, {Στοίχημα | Λευκό})
Η βέλτιστη στρατηγική του παίκτη II είναι η τ_1 = {Αποδοχή Στοιχήματος}

Θέμα 3

i) Το κέρδος της εταιρίας A ορίζεται ως εξής:

$K_A(x,y) = x \cdot d(x,y) \cdot 1_{x+y<20} \Leftrightarrow K_A(x+y) = x(100-5(x+y))\,1_{x+y<20} \Leftrightarrow$
$K_A(x,y) = (100x - 5x^2 - 5xy)\cdot 1_{x+y<20}$.

Η εταιρία A μεγιστοποιεί το κέρδος της για:

$\frac{\partial K_A(x,y)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow (100 - 10x - 5y)\,1_{x+y<20} = 0 \Leftrightarrow$

$x = 10 - \frac{1}{2}y$ ① υπό τον περιορισμό ότι $x+y<20$.

Το κέρδος της εταιρίας B ορίζεται ως εξής:

$K_B(x,y) = y\,d(x,y)\,1_{x+y<20} - 20y = y(100-5(x+y))\,1_{x+y<20} - 20y \Leftrightarrow$
$K_B(x,y) = (100y - 5xy - 5y^2)\,1_{x+y<20} - 20y$.

Η εταιρία B μεγιστοποιεί το κέρδος της για:

$\frac{\partial K_B(x,y)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow (100 - 5x - 10y)\,1_{x+y<20} - 20 = 0 \Leftrightarrow$

$y = 8 - \frac{1}{2}x$ ② υπό τον περιορισμό ότι $x+y<20$

Αφού οι εταιρίες αποφασίζουν ταυτόχρονα, λύνω το σύστημα.

$$\begin{cases} x = 10 - \frac{1}{2}y \\ y = 8 - \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 1/2\,y \\ y = 8 - 5 + 1/4\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$$

Βλέπουμε πως $x+y = 12 < 20$, επομένως ικανοποιείται ο περιορισμός.

(ii) Η Α αναγγέλει 1η την ποσότητα που θα παράγει.
Επομένως η Β αναγγέλει y, γνωρίζοντας το x.
Επομένως μεγιστοποιεί το κέρδος της για

$$\frac{\partial K_B(x,y)}{\partial y}=0 \iff y^*=8-\frac{1}{2}x \text{ ή για } y^*=19-x.$$

Η Α αντιμετωπίζει κέρδος

$$K_A(x,y^*) = \max \begin{cases} K_A(x,8-\frac{1}{2}x) = 100x-5x^2-5x(8-\frac{1}{2}x) \\ K_A(x,19-x) = 100x-5x^2-5x(19-x) \end{cases} = \text{(iii)};$$

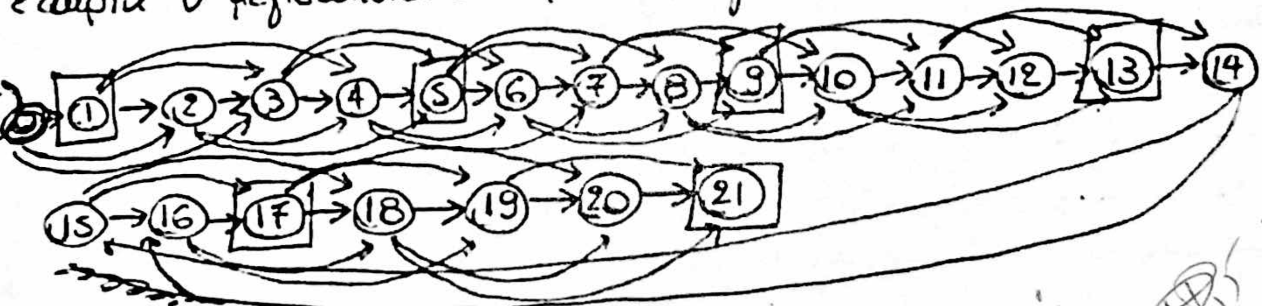
$$= \max \begin{cases} 60x-\frac{5}{2}x^2 \\ 5x \end{cases}$$

Επομένως μεγιστοποιεί το κέρδος της για

$$\max_x \frac{\partial K_A(x,y^*)}{\partial x}=0 \iff \max_x \begin{cases} 60-5x=0 \\ 5x=0 \end{cases} \iff \max_x \begin{cases} x=12 \\ x=0 \end{cases}$$

Η εταιρία Α μεγιστοποιεί το κέρδος της για $x^*=12$.
Η εταιρία Β μεγιστοποιεί το κέρδος της για $y^*=2$

(B)



Ο πυρήνας εδώ είναι $K=\{1,5,9,13,17,21\}$
Ο παίκτης Ι ξεκινά το παιχνίδι από τη θέση ~~[illegible]~~ ~~συγκεκριμένα θα αναγγείλει~~ 0 αναγγέλοντας 1 και στέλνοντας το σε θέση πυρήνα. Στη συνέχεια ο παίκτης ΙΙ, ότι και να παίξει θα στείλει το παιχνίδι εκτός πυρήνα, στη θέση 2,3 ή 4 ανάλογως με το αν θα αναγγείλει 1,2 ή 3. Ο παίκτης ένα πάλι θα στείλει το παιχνίδι σε θέση πυρήνα, ~~παίζοντας~~ (θέση 5), παίζοντας 3,2 ή 1 αντίστοιχα. Έπειτα ο παίκτης ΙΙ, ξεκινώντας από θέση πυρήνα (θέση 5) θα το στείλει στη θέση 6 ή 7 ή 8 και κατόπιν ο παίκτης Ι, πάλι στη θέση 9. Έπειτα ο παίκτης ΙΙ θα το στείλει στη θέση 10 ή 11 ή 12. και μετά ο παίκτης Ι στη θέση 13 (θέση

πυργίνα και πάλι), παίζοντας 3 ή 2 ή 1 αντίστοιχα. Μετά ο παίκτης ΙΙ θα στείλει το παιχνίδι στη θέση 14 ή 15 ή 16 και στη συνέχεια ο παίκτης Ι θα το στείλει στη θέση 17. Μετά ο παίκτης ΙΙ θα παίξει 1 ή 2 ή 3, στέλνοντας το παιχνίδι στη θέση 18 ή 19 ή 20. Έτσι ο παίκτης Ι θα παίξει 3 ή 2 ή 1 αντίστοιχα και θα στείλει το παιχνίδι στη θέση 21 (θέση πυργίνο) κερδίζοντάς το με αυτό τον τρόπο, διότι μετά ότι και να παίξει ο παίκτης ΙΙ θα κάνει το άθροισμα > 21 και θα χάσει.

Θέμα 4

3	2	~~2~~	1,5	~~4~~
2	3	~~4~~	5	~~2~~
~~1~~	~~2~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~

Η στήλη 5 κυριαρχείται από την 3
Η γραμμή 3 κυριαρχείται από την 2.
Η στήλη 3 κυριαρχείται από τη 2.

Επομένως ο πίνακας απλοποιείται σε:

K_I	6	1-6	0
π	3	2	1,5
1-π	2	3	5

$V_I = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{\min(3,2,1{,}5), \min(2,3,5)\} \Leftrightarrow$

$V_I = \max(1{,}5\ ,\ 2) = 2$

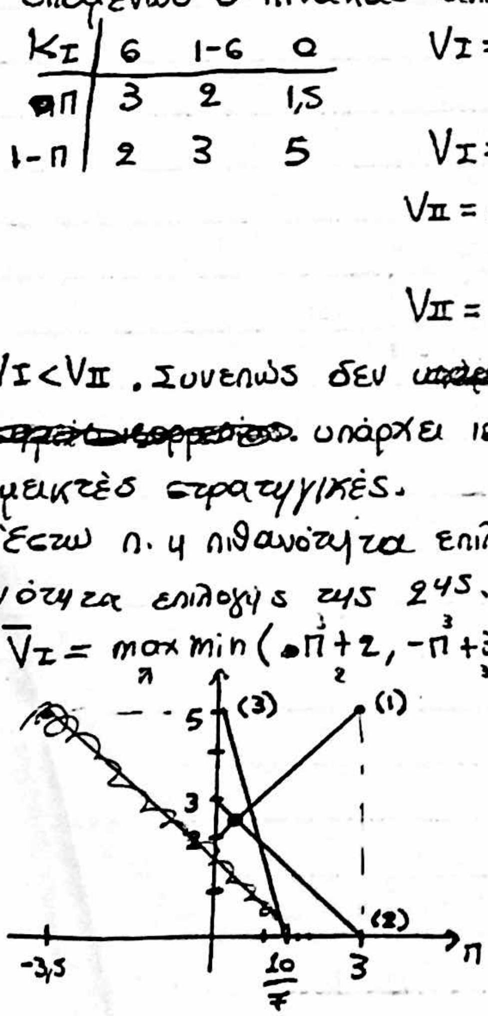
$V_{II} = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{\max(3,2), \max(2,3), \max(1{,}5, 5)\} \Leftrightarrow$

$V_{II} = \min(3, 3, 5) = 3$

$V_I < V_{II}$. Συνεπώς δεν ~~υπάρχουν αμιγείς στρατηγικές που να οδηγούν σε σημείο ισορροπίας~~ υπάρχει ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές. Θα εισαχθούν μεικτές στρατηγικές.

Έστω π. η πιθανότητα επιλογής της 1ης γραμμής από τον Ι και 1-π η πιθανότητα επιλογής της 2ης.

$\overline{V}_I = \max_\pi \min(\pi+2, -\pi+3, -3{,}5\pi+5)$



Η maxmin είναι η τομή των ευθειών (1) και (2) επομένως

$2\pi^* = 1 \Leftrightarrow \pi^* = 1/2$.

$\overline{V}_I = 5/2$.

Για την εύρεση της μεικτής στρατηγικής του ΙΙ θα χρησιμοποιήσω τις στήλες (1) και (2)

$\overline{V}_{II} = \min_{\sigma} \max (\sigma+2, -\sigma+3)$

Το min max είναι η τομή των 2 ευθειών, επομένως
$2\sigma^* = 1 \Leftrightarrow \sigma^* = 1/2$
και $\overline{V}_{II} = 5/4$.
Οι μικτές στρατηγικές των I και II διαμορφώνονται ως εξής
Στρατηγική του παίκτη I: $[1/2, 1/2, 0]$
Στρατηγική του παίκτη II: $[1/2, 1/2, 0, 0, 0]$

B) Λόγω τετραγωνικής ωφελιμότητας:

$$C = \begin{bmatrix} Var(R_1) & Cov(R_1,R_2) \\ Cov(R_2,R_1) & Var(R_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{100} & -1/80 \\ -1/80 & 1/16 \end{bmatrix} = \frac{1}{400} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 25 \end{bmatrix}$$

Άρα $C^{-1} = 400 \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

$$C^{-1}\left(\frac{R}{R_0} - 1\right) = 400 \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}1/0{,}05 - 1 \\ 0{,}15/0{,}05 - 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 400 \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 400 \begin{bmatrix} 35 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Άρα $\pi = \frac{C^{-1}(R/R_0 - 1)}{1\, C^{-1}(R/R_0 - 1)} = \frac{400 \begin{bmatrix} 35 \\ 13 \end{bmatrix}}{[1\ 1]\, 400 \begin{bmatrix} 35 \\ 13 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 35 \\ 13 \end{bmatrix}}{48}$.

Άρα $\pi_1 = \frac{35}{48}$ και $\pi_2 = \frac{13}{48}$

Συνεπώς $x_1 = 1{,}2 \cdot \frac{35}{48} = 0{,}875$

$x_2 = 1{,}2 \cdot \frac{13}{48} = 0{,}125$.

Δανεισμός 20% στο βέβαιο Π.Σ. και επένδυση 87,5 % στο 1ο αβέβαιο Π.Σ. και 12,5 % στο 2ο