Δυναμικός προγραμματισμός σε συνδυαστικά παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος — πεπερασμένα γραφήματα

Πολλές ανταγωνιστικές καταστάσεις επιδέχονται υποδείγματα όπου δύο παίκτες βρίσκονται σε κορυφές ενός πεπερασμένου γραφήματος $G=(V,E)$ $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ οι κορυφές ενώ $E\subseteq V\times V$ οι (προσανατολισμένες) ακμές. Αν ο παίκτης I βρίσκεται σε κάποια φάση του παιχνιδιού στην κορυφή v_i πρέπει να επιλέξει κάποια ακμή $(v_i,v_j)\in E$. Αν <u>δεν</u> υπάρχει ακμή που να ξεκινά από την v_i τότε "χάνει" το ποσό K_i που κερδίζει ο αντίπαλος II. Αντίστοιχα ισχύουν για τον II. Πώς θα εξελιχθεί το παιχνίδι;

Έστω ότι η ελάχιστη ζημία που μπορεί να επιτύχει ο I αν είναι η σειρά του να παίξει από την κορυφή v_i είναι $U(v_i)$. Αν το v_i δεν έχει ακμή που να ξεκινά από εκεί είναι $U(v_i)=K_i$. Διαφορετικά, έστω ότι υπάρχει η ακμή (v_i,v_j) και ότι ο παίκτης II ξεκινώντας από το v_j έχει ελάχιστη ζημία $U(v_j)$. Αν η U ορίζεται για κάθε "επόμενη" κορυφή v_k (όπου δηλαδή υπάρχει ακμή (v_i,v_k)) ο παίκτης I μπορεί να επιτύχει ζημία* $-U(v_k)$. Η ελάχιστη ζημία είναι $\min\limits_{k,\,(v_i,v_k)\in E}\{-U(v_k)\}$

οπότε έχουμε $U(v_i)=\min\limits_{k,\,(v_i,v_k)\in E}\{-U(v_k)\}$ ή

ή τελικά

---

* λόγω του μηδενικού αθροίσματος...

$$U(v_i) = -\max_{v_k \in \gamma(v_i)} U(v_k) \qquad (1)$$

όπου $\gamma(v_i) = \{k \mid (v_i, v_k) \in E\}$ δηλαδή η ακμή (v_i, v_k) υπάρχει. Η σχέση (1) ερμηνεύεται εύκολα: ο κάθε παίκτης συνεχίζει ώστε να μεγιστοποιήσει την ζημία του αντιπάλου του. Προφανώς αυτό ισχύει μόνο για παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Αν επιπλέον η διέλευση από την ακμή (v_i, v_k) έχει κόστος a_{ik}, η επιλογή της ακμής (v_i, v_k) έχει κόστος $a_{ik} - U(v_k)$ οπότε η (1) γίνεται

$$U(v_i) = \min_{v_k \in \gamma(v_i)} \{a_{ik} - U(v_k)\}$$

$$= -\max_{k \in \gamma(v_i)} \{-a_{ik} + U(v_k)\} \qquad (2)$$

Σε ένα ακυκλικό γράφημα οι σχέσεις (1) ή (2) μπορούν να λυθούν εύκολα όπως θα δούμε. Προφανώς σε γραφήματα με κύκλους ενδέχεται να μην ορίζεται λύση. Σε ακυκλικά λοιπόν γραφήματα η λύση της (1) ή (2) γίνεται ως εξής:

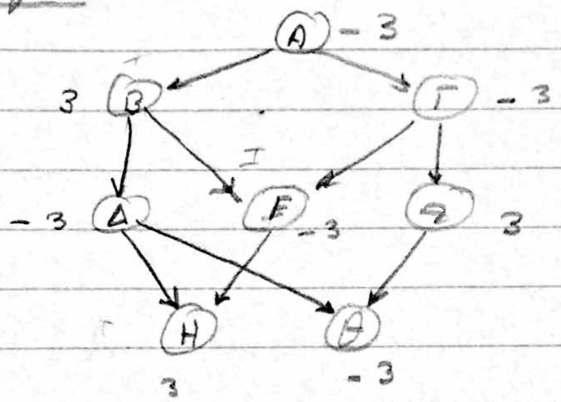
Παρατηρούμε ότι σε ένα πεπερασμένο ακυκλικό γράφημα πάντοτε υπάρχουν κορυφές από όπου δεν ξεκινούν κορυφές, και άρα σε αυτές η συνάρτηση U ορίζεται ως $U(v_i) = k_i$. Εξετάζουμε τώρα το γράφημα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε τις κορυφές που δεν έχουν επόμενες καθώς και τις ακμές που οδηγούν σε αυτές. Στο νέο γράφημα δεν υπάρχουν κύκλοι και α άρα υπάρχουν κορυφές που δεν έχουν επόμενες, δηλαδή που στο αρχικό γράφημα είχαν <u>μόνο</u> ακμές που οδηγούν σε κορυφές όπου η V έχει οριστεί ως $V(v_i) = k_i$, καθώς είναι τελικές κορυφές. Άρα και σε αυτές τις κορυφές που δεν έχουν επόμενη στο νέο γράφημα ορίζεται η V από την (1) εφόσον $V(v_i) = -\max\limits_{v_k \in \gamma(i)} V(v_k)$

$= -\max\limits_{v_k \in \gamma_i} k_k$. Προχωρώντας με αυτόν τον τρόπο ορίζεται η V σε όλες τις κορυφές.

Η στρατηγική των παικτών καθορίζεται στην θέση v_i με την επιλογή της ακμής (v_i, v_{k^*}) όπου επιτυγχάνεται το μέγιστο της (1), δηλαδή, $\max\limits_{v_k \in \gamma(v_i)} V(v_k) = V(v_{k^*})$

Άρα η λύση γίνεται ουσιαστικά με τον προσδιορισμό μιας "σωστής" σειράς κορυφών $v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_3} \ldots$ τέτοια ώστε οι ακμές που ξεκινούν από την v_{i_k} να καταλήγουν σε "προηγούμενες" κορυφές, δηλαδή τις $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{k-1}}$. Η σειρά αυτή ονομάζεται <u>τοπολογική</u> ταξινόμηση.

Εφαρμογή



- Είναι $v(H) = 3 = k_H$ και $v(\Theta) = -3 = k_\Theta$.
- Είναι $v(Z) = -(-3) = 3$, $v(E) = -3$
  $v(\Delta) = -\max\{3, -3\} = -3$
- Είναι $v(\Gamma) = -\max\{3, -3\} = -3$ και
  $v(B) = -\max(-3, -3) = 3$
- Τέλος $v(A) = -\max\{3, -3\} = -3$

Άρα αν ο I ξεκινά από την θέση A έχει εξασφαλίσει κέρδος 3 μονάδων επιλέγοντας την ακμή (A, B). Ο II παίζοντας από το Δ θα οδηγήσει τον I στο Δ ή το E και από εκεί ο I θα οδηγήσει τον II στην θέση H όπου ο II θα υποστεί ζημιά 3 μονάδων, δηλαδή κέρδος 3 μονάδων για τον I.