28/5/04

ΠΑΙΓΝΙΑ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ : PARETO ΚΑΙ NASH

• ΕΝΑ ΠΑΙΓΝΙΟ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ (COOPERATIVE) ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΔΕΣΜΕΥΤΙΚΩΝ ΣΥΜΦΩΝΙΩΝ: ΑΝ ΟΙ ΠΑΙΚΤΕΣ "ΣΥΜΦΩΝΗΣΟΥΝ" ΣΕ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ σ_0 ΓΙΑ ΤΟΝ I ΚΑΙ τ_0 ΓΙΑ ΤΟΝ II, ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΟΤΙ ΟΝΤΩΣ ΘΑ ΤΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΟΥΝ (ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΟΠΟΙΟΣ ΑΘΕΤΗΣΕΙ ΤΗΝ ΣΥΜΦΩΝΙΑ ΥΦΙΣΤΑΤΑΙ ΜΕΓΑΛΗ ΠΟΙΝΗ)

• ΚΑΤΙ ΤΕΤΟΙΟ ΙΣΧΥΕΙ ΣΤΙΣ ΔΙΑΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΡΩΝ ΠΟΥ ΑΝΑΜΕΝΟΥΝ ΝΑ ΣΥΝΕΡΓΑΖΟΝΤΑΙ ΣΥΧΝΑ: ΤΟΤΕ ΑΘΕΤΗΣΗ ΜΙΑΣ ΣΥΜΦΩΝΙΑΣ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΟΡΙΣΤΙΚΗ ΡΗΞΗ ΤΩΝ ΜΕΡΩΝ ΚΑΤΙ ΠΟΥ ΘΕΛΟΥΝ ΝΑ ΑΠΟΦΥΓΟΥΝ ΠΑΣΗ ΘΥΣΙΑ.

• ΜΙΑ ΑΝΤΙΡΡΗΣΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΥΤΟ ΕΙΝΑΙ ΟΤΙ ΕΙΣΑΓΟΝΤΑΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΕΞΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ. ΓΙΑΤΙ ΝΑ ΜΗΝ ΓΡΑΦΕΙ ΠΛΗΡΕΣΤΕΡΗ ΕΚΤΕΤΑΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ ΠΟΥ ΝΑ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΚΑΙ ΤΗΝ ΠΟΙΝΗ ΑΘΕΤΗΣΗΣ;

ΑΣΚΗΣΗ - ΕΡΓΑΣΙΑ : ΠΡΟΤΕΙΝΕΤΕ ΕΝΑ ΤΕΤΟΙΟ ΣΧΗΜΑ ΚΑΙ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΤΕ ΤΟ

• ΜΕ ΤΗΝ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΑΡΑΔΟΧΗ ΔΕΣΜΕΥΤΙΚΩΝ ΣΥΜΦΩΝΙΩΝ, ΔΕΧΟΜΑΣΤΕ ΟΤΙ ΟΙ ΠΑΙΚΤΕΣ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΣΥΜΦΩΝΗΣΟΥΝ ΔΙΑΠΡΑΓΜΑΤΕΥΟΜΕΝΟΙ ΣΕ ΕΝΑ ΖΕΥΓΟΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΕΝΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ (σ_0, τ_0) ΟΠΟΤΕ ΘΑ ΠΡΟΚΥΨΟΥΝ ΤΑ ΚΕΡΔΗ $[K_I(\sigma_0,\tau_0), K_{II}(\sigma_0,\tau_0)]$. ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑ ΕΙΝΑΙ ΠΟΙΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΘΑ ΣΥΜΦΩΝΗΘΟΥΝ;

Έστω δύο ζεύγη στρατηγικών (σ_1, τ_1) και (σ_2, τ_2) με την ιδιότητα

$$\text{και} \begin{cases} K_I(\sigma_1, \tau_1) > K_I(\sigma_2, \tau_2) \\ K_{II}(\sigma_1, \tau_1) > K_{II}(\sigma_2, \tau_2) \end{cases}$$

- Εφόσον τόσο ο I όσο και ο II προτιμούν το (σ_1, τ_1) από το (σ_2, τ_2), το (σ_2, τ_2) δεν είναι εύλογη έκβαση ορθολογικής διαπραγμάτευσης

- Λέμε ότι το (σ_1, τ_1) κυριαρχεί (αυστηρά) κατά Pareto του (σ_2, τ_2). Αν μία από τις ανισότητες επιτραπεί να είναι ισότητα λέμε ότι κυριαρχεί ασθενώς κατά Pareto.

- Εύλογα σημεία έκβασης διαπραγμάτευσης είναι τα (σ, τ) που δεν κυριαρχούνται από άλλα ζεύγη. Αυτά ονομάζονται <u>σύνορο Pareto</u> (Pareto frontier)

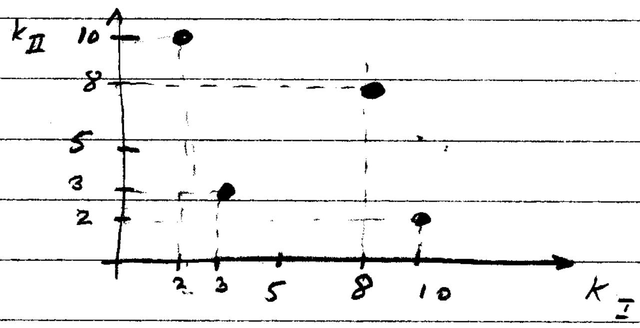
Συμβολικά

$$\text{ParetoFront} = \left\{ (\sigma,\tau) \;\middle|\; \forall (\sigma',\tau') \neq (\sigma,\tau) \;\; \begin{array}{l} \text{είτε } K_I(\sigma,\tau) > K_I(\sigma',\tau') \\ \text{είτε } K_{II}(\sigma,\tau) > K_I(\sigma',\tau') \end{array} \right\}$$

- Έστω το παίγνιο διλήμματος φυλακισμένων (βλέπτε σημειώσεις)

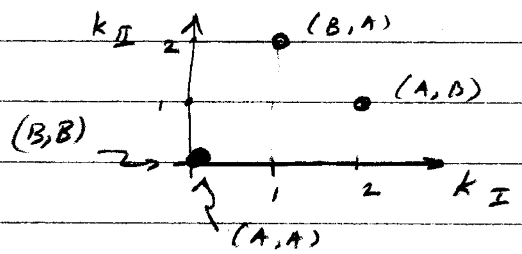
	τ_1	τ_2
σ_1	(8,8)	(2,10)
σ_2	(10,2)	(3,3)

· ΣΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ $K_I - K_{II}$ ΠΑΡΙΣΤΑΤΑΙ ΩΣ



· ΤΟ ΖΕΥΓΟΣ (Σ_2, Σ_2) ΜΕ ΚΕΡΔΗ (3,3) ΕΙΝΑΙ ΤΟ **ΜΟΝΟ** ΣΗΜΕΙΟ ΠΟΥ ΚΥΡΙΑΡΧΕΙΤΑΙ (ΑΠΟ ΤΟ (8,8)) ΑΛΛΑ ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ ΤΟ ΜΟΝΑΔΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ NASH

· ΣΤΟ ΠΑΙΓΝΙΟ ΤΗΣ ΜΑΧΗΣ ΤΩΝ ΦΥΛΛΩΝ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ NASH ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ ΣΤΟ ΣΥΝΟΡΟ PARETO:



· ΑΝ ΣΕ ΚΑΠΟΙΟ ΠΑΙΓΝΙΟ ΤΟ ΜΟΝΑΔΙΚΟ ΤΟΥ NASH ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ PARETO ΛΕΜΕ ΟΤΙ ΤΟ ΠΑΙΓΝΙΟ ΕΧΕΙ ΤΟΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΑ ΔΙΛΗΜΜΑΤΟΣ ΦΥΛΑΚΙΣΜΕΝΟΥ.

· **ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΡΟΥ PARETO ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΠΑΙΓΝΙΑ**

· ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΟΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΤΩΝ ΠΑΙΚΤΩΝ ΕΙΝΑΙ $x, y \in \mathbb{R}$ ΚΑΙ ΤΑ K_I, K_{II} ΕΙΝΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

· ΤΟΤΕ Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΑΝΙΣΟΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ

$$\max_{x,y} \; K_{II}(x,y)$$

ΜΕ x, y ΤΕΤΟΙΑ ΩΣΤΕ $K_I(x,y) \geq a$

ΕΙΝΑΙ ΣΗΜΕΙΟ PARETO.

ΔΙΟΤΙ ΑΝ Η ΛΥΣΗ ΗΤΑΝ (x_0, y_0) ΚΑΙ ΥΠΗΡΧΕ (x_1, y_1) ΜΕ $K_I(x_1,y_1) > K_I(x_0,y_0)$ ΚΑΙ $K_{II}(x_1,y_1) > K_{II}(x_0,y_0)$, ΤΟΤΕ ΤΟ (x_1, y_1) ΕΙΝΑΙ ΠΑΡΑΔΕΚΤΗ ΛΥΣΗ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΔΙΝΕΙ ΚΑΛΥΤΕΡΗ ΤΙΜΗ ΣΤΗΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ, ΠΡΑΓΜΑ ΑΤΟΠΟ.

• ΙΣΧΥΕΙ ΚΑΙ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ! ΓΙΑΤΙ

• ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ (x_0, y_0) ΤΟΥ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ λ (≥ 0) ΤΕΤΟΙΟΣ ΩΣΤΕ

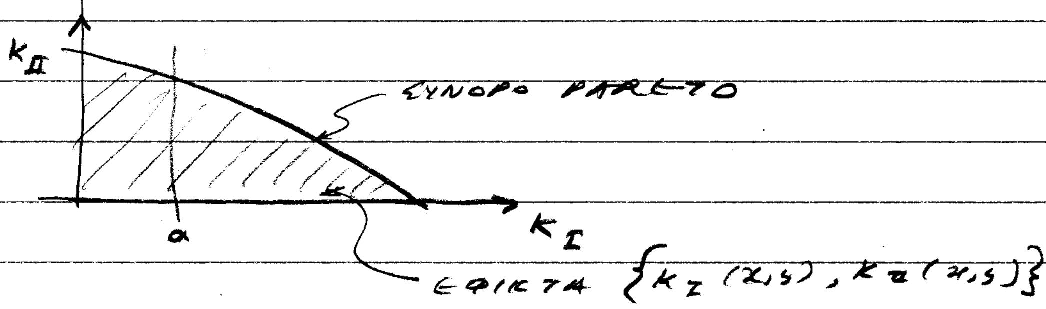
- $$\frac{\partial K_I}{\partial x}(x_0,y_0) + \lambda \frac{\partial K_{II}}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$$
- $$\frac{\partial K_I}{\partial y}(x_0,y_0) + \lambda \frac{\partial K_{II}}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$
- $$\lambda \cdot (K_I(x_0,y_0) - a) = 0$$
- $$K_I(x_0,y_0) \geq a$$

• ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΟΠΟΥ $K_I(x_0,y_0) = a$ ΚΑΙ ΕΠΙΠΛΕΟΝ $\lambda > 0$

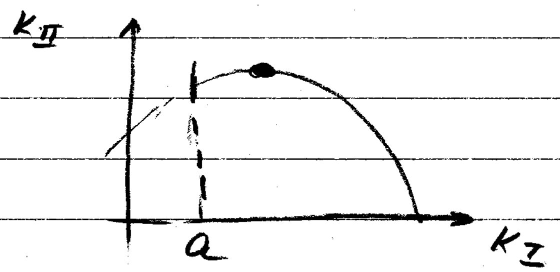
ΟΙ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥΝ ΜΕ ΤΟ (ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΟ
ΠΡΟΒΛΗΜΑ $\max_{x,y} \mu K_I(x,y) + (1-\mu) K_{II}(x,y)$

ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΟ μ ΜΕΤΑΞΥ 0 ΚΑΙ 1.

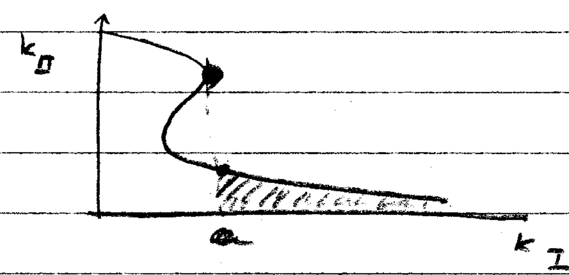
• ΑΥΤΟ ΙΣΧΥΕΙ ΣΤΟ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΣΧΗΜΑ



ΑΛΛΑ ΟΧΙ ΣΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ



$K_I(x_0,y_0) > a$



ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΕΦΙΚΤΩΝ (x,y) ΕΧΕΙ ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΙ ΔΕΝ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

• ΘΕΩΡΩΝΤΑΣ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΑΠΛΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ Ο ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΥΝ. PARETO ΕΙΝΑΙ ΣΧΕΤΙΚΑ ΑΠΛΟΣ: ΛΥΝΟΥΜΕ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ $\max \mu K_I + (1-\mu) K_{II}$ ΓΙΑ ΟΛΑ ΤΑ μ ΣΤΟ $[0,1]$.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΚΑΝΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΣΗΜΕΙΑ PARETO ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ NASH ΣΕ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΥ !

• ΔΕΝ ΘΑ ΥΠΗΡΧΕ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΑΝ ΚΑΠΟΙΟ ΣΗΜΕΙΟ $(\bar{x}, \bar{y})$ ΗΤΑΝ ΑΠΟΛΥΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΤΟΣΟ ΓΙΑ ΤΟ K_I ΟΣΟ ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΟ K_{II}

• ΑΝ ΤΟ (x_0, y_0) ΗΤΑΝ PARETO ΚΑΙ NASH ΘΑ ΙΣΧΥΑΝ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ ΟΙ ΣΧΕΣΕΙΣ

NASH: $\partial K_I/\partial x\,(x_0, y_0) = 0 \qquad \partial K_{II}/\partial y\,(x_0, y_0) = 0$

PARETO
$$\begin{cases} \partial K_{II}/\partial x\,(x_0, y_0) + \lambda\, \partial K_I/\partial x\,(x_0, y_0) = 0 \\ \partial K_{II}/\partial y\,(x_0, y_0) + \lambda\, \partial K_I/\partial y\,(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$
ΚΑΙ $\lambda \neq 0$

ΑΛΛΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΥΤΕΣ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΟΤΙ $\partial K_I/\partial x = \partial K_I/\partial y = \partial K_{II}/\partial x = \partial K_{II}/\partial y = 0$

ΣΤΟ (x_0, y_0) ΚΑΙ ΑΡΑ (ΔΕΧΟΜΕΝΟΙ ΣΥΝΘΗΚΕΣ Β' ΤΑΞΗΣ) ΘΑ ΗΤΑΝ ΜΕΓΙΣΤΟ ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΟ K_I ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΟ K_{II} ΚΑΙ ΔΕΝ ΘΑ ΥΠΗΡΧΕ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Η ΖΗΜΙΑ ΤΟΥ Ι ΑΠΟ (x, y) ΕΙΝΑΙ
$$Z_I(x, y) = (1 - x)^2 + 2(x - y)^2$$
ΚΑΙ ΤΟΥ ΙΙ
$$Z_{II}(x, y) = y^2 + (x - y)^2$$

ΤΟ NASH ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ (ΒΛΕΠΕ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ) ΩΣ
$$(x_N, y_N) = (1/2, 1/4)$$

· ΛΟΓΩ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ ΤΑ PARETO ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΛΥΝΟΝΤΑΣ ΤΟ

$$\min_{\lambda} \lambda Z_I + (1-\lambda) Z_{II} = \min_{\lambda} \left\{ \lambda (1-x)^2 + 2\lambda (x-y)^2 + (1-\lambda) y^2 + (1-\lambda)(x-y)^2 \right\}$$

ΚΑΙ ΑΡΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΖΟΝΤΑΣ ΕΧΟΥΜΕ

$$\partial/\partial x \rightarrow \quad -\lambda(1-x) + (1+\lambda)(x-y) = 0 \Rightarrow (1+2\lambda)x - (1+\lambda)y = \lambda$$

$$\partial/\partial y \rightarrow \quad (1+\lambda)(y-x) + (1-\lambda)y = 0 \Rightarrow -(1+\lambda)x + 2y = 0$$

$$\Rightarrow x(\lambda) = \frac{2\lambda}{1+2\lambda-\lambda^2} \qquad y(\lambda) = \frac{\lambda(1+\lambda)}{1+2\lambda-\lambda^2}$$

· <u>ΚΑΝΕΝΑ</u> ΑΠΟ ΑΥΤΑ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ NASH

· ΓΙΑΤΙ ΤΟ NASH ΕΙΝΑΙ $(1/2, 1/4)$ ΟΠΟΤΕ

$$x(\lambda) = x_N = \frac{1}{2} = \frac{2\lambda}{1+2\lambda-\lambda^2} \Rightarrow \lambda = \sqrt{2}-1$$

(ΓΙΑΤΙ;)

ΑΛΛΑ ΤΟΤΕ

$$y(\lambda) = y(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(ΓΙΑΤΙ)

ΕΝΩ $y_N = 1/4$!