Διάλεξη 17

Ο αλγόριθμος simplex, αρχικοποίηση, εκφυλισμένα ΓΠ, Πέμπτη 19/5/16

Ο αλγόριθμος simplex

Θεωρήστε το ΓΠ:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Έτσι ώστε $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + z_i = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$z_i, x_j \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$$

Εφόσον στα επόμενα λεξικά εκτός του πρώτου, οι μεταβλητές χαλαρότητας θα βρίσκονται εκατέρωθεν των =, βολεύει ο ομοιόμορφος συμβολισμός των μεταβλητών απόφασης και χαλαρότητας. Για αυτό ορίζουμε $x_{n+i} = z_i \, , i = 1, \ldots, m$.
Έτσι, το αρχικό λεξικό είναι:

$$\max \zeta = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m+n$$

Όπου οι x_{n+i} είναι οι μεταβλητές χαλαρότητας.

Μετά από μερικά βήματα pivot, έστω ότι οι βασικές μεταβλητές είναι αυτές με δείκτες στο σύνολο $\mathcal{B} \subset \{1, \ldots, n+m\}$, δηλαδή x_i βασική μεταβλητή εάν και μόνο εάν $i \in \mathcal{B}$. Προφανώς οι μη βασικές μεταβλητές είναι αυτές με δείκτες στο σύνολο $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n+m\} \setminus \mathcal{B}$. Έστω ότι το αντίστοιχο λεξικό είναι

$$\max \zeta = b'_0 + \sum_{j \in \mathcal{N}} c'_j x_j \tag{2}$$

$$x_i = b'_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} a'_{ij} x_j\,, \quad i \in \mathcal{B}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m+n$$

για κάποιους συντελεστές $b'_0, b'_i, c'_j, a'_{ij},\ i \in \mathcal{B}, j \in \mathcal{N}$.

Η αντίστοιχη βασική εφικτή λύση (β.ε.λ.) είναι η λύση του παραπάνω συστήματος (που ικανοποιεί τους περιορισμούς θετικότητας) που προκύπτει θέτοντας τις μη βασικές μεταβλητές ίσες με μηδέν: $x_j = 0\,, j \in \mathcal{N}$ και κατά συνέπεια οι βασικές μεταβλητές ικανοποιούν $x_i = b'_i\,, i \in \mathcal{B}$. Επίσης η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη β.ε.λ. αυτή είναι $\zeta = b'_0$.

1. Έλεγχος για βέλτιστη λύση

Εάν οι συντελεστές $c'_j\,, j \in \mathcal{N}$ είναι όλοι αρνητικοί (ή μηδέν) τότε $\zeta = b'_0 + \sum_{j \in \mathcal{N}} c'_j x_j \leq b'_0$ για κάθε λύση του λεξικού (που ικανοποιεί τους περιορισμούς θετικότητας). Εφόσον η β.ε.λ. ικανοποιεί $\zeta = b'_0$, αυτό σημαίνει ότι η β.ε.λ. είναι βέλτιστη.
Σε αυτό το σημείο τερματίζει ο simplex αφού έχει βρει τη βέλτιστη λύση.

2. Επιλογή μεταβλητής που μπαίνει στη βάση

Εάν ο simplex δεν έχει τερματίσει σημαίνει ότι υπάρχει $c'_k > 0$ για κάποιο $k \in \mathcal{N}$. Κατά συνέπεια, υπάρχει λύση του λεξικού που επιτυγχάνει μεγαλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση, αυξάνοντας την τιμή της x_k από το 0 που βρίσκονταν πριν (αφού $k \in \mathcal{N}$).

3. Επιλογή μεταβλητής που βγαίνει από τη βάση

Εφόσον μεγαλύτερες τιμές της x_k οδηγούν σε μεγαλύτερες τιμές της $\zeta = b'_0 + c'_k x_k$, θα θεωρήσουμε τη μεγαλύτερη δυνατή αύξηση της.
Η αύξηση αυτή εμποδίζεται από τον περιορισμό θετικότητας κάθε βασικής μεταβλητής $x_i = b'_i - a'_{ik} x_k$. Η πρώτη x_i που θα μηδενιστεί καθώς αυξάνει η x_k είναι εκείνη με τον μικρότερο λόγο b'_i / a'_{ik} από εκείνες όπου $a'_{ik} > 0$ (διαφορετικά, ο περιορισμός θετικότητας δε θα εμπόδιζε την αύξηση της x_k). Έστω ότι η μεταβλητή x_l πληρεί τις παραπάνω προϋποθέσεις, δηλαδή $a'_{lk} > 0$ και $b'_l / a'_{lk} \leq b'_i / a'_{ik}$ για κάθε $i \in \mathcal{B}$. Τότε για τη μέγιστη δυνατή αύξηση της x_k έχουμε $x_k = b'_l / a'_{lk}$ και $x_l = 0$.
Η μεταβλητή x_l θα πρέπει να βγει από τη βάση εφόσον μηδενίζεται και αυτό γίνεται ανταλλάσσοντας ρόλο με την x_k, άρα γίνεται pivot μεταξύ των x_k, x_l.

Σε αυτό το σημείο συνεχίζουμε όπως παραπάνω, με τον έλεγχο για βέλτιστη λύση κ.ο.κ. μέχρι να τερματίσει ο simplex.

Συνοπτικά, τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα εξής:

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX

0. Σχηματισμός αρχικού λεξικού (1) και έλεγχος εάν η βασική λύση που αντιστοιχεί στο αρχικό λεξικό (η οποία προκύπτει θέτοντας τις μεταβλητές $x_j, j = 1, \ldots, n$ ίσες με μηδέν) είναι εφικτή. Αν ναι, τότε συνεχίζουμε. Αν όχι τότε θα πρέπει να εκτελέσουμε τον αλγόριθμο simplex δύο φάσεων.

1. **Εάν οι συντελεστές των μεταβλητών στην εξίσωση που συμμετέχει η ζ είναι όλες μη θετικές (δηλ. $c'_j \leq 0$ για κάθε $j \in \mathcal{N}$ στο (2)) τότε έχουμε βρει τη βέλτιστη λύση και τερματίζουμε.**
2. **Επιλέγουμε οποιαδήποτε x_k που εμφανίζεται με θετικό συντελεστή ($c'_k > 0$ στο (2)) στην εξίσωση της ζ .**
3. **Επιλέγουμε την εξίσωση που αντιστοιχεί στη βασική μεταβλητή x_l όπου $a'_{lk} > 0$ και $b'_l / a'_{lk} = \min_{i \in \mathcal{B}, a'_{ik} > 0} b'_i / a'_{ik}$.**
4. **Κάνουμε pivot μεταξύ των μεταβλητών x_k, x_l και συνεχίζουμε στο βήμα 1.**

Πολλές φορές, αντί να χρησιμοποιείται λεξικό, δηλαδή το σύστημα εξισώσεων (2), ο simplex εκτελείται σε μορφή πίνακα (το λεγόμενο ταμπλό του simplex) που περιέχει τους συντελεστές του (2). Οι δύο αυτοί τρόποι είναι ισοδύναμοι.

Αρχικοποίηση: simplex 2 φάσεων

Πολλές φορές η βασική λύση του αρχικού λεξικού δεν είναι εφικτή. Σε εκείνες τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο simplex 2 φάσεων, όπου:

1. Στη 1η φάση γίνεται αναζήτηση μιας βασικής εφικτής λύσης,
2. στη 2η φάση επιλύεται το αρχικό πρόβλημα αρχίζοντας τον simplex από το λεξικό που αντιστοιχεί στη βασική εφικτή λύση που βρέθηκε στη φάση 1.

Παράδειγμα

Θεωρήστε το πρόβλημα

(3)

$$\max -2x_1 - x_2$$

Έτσι ώστε $-x_1 + x_2 \leq -1$

$$-x_1 + -2x_2 \leq -2$$

$$x_2 \leq 1$$

Όπου $x_1, x_2 \geq 0.$

Το αρχικό λεξικό είναι:

$$\max \zeta = \qquad -2x_1 - x_2$$

$$z_1 = -1 + x_1 - x_2$$

$$z_2 = -2 + x_1 + 2x_2$$

$$z_3 = 1 - x_2$$

$$x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0.$$

Παρατηρήστε ότι η βασική λύση (που προκύπτει θέτοντας τις μεταβλητές δεξιά των =, ίσες με 0) είναι μη εφικτή αφού τότε $z_1 = -1 < 0$.

Simplex 1ης φάσης

Για την αναζήτηση μιας β.ε.λ. σχηματίζουμε το βοηθητικό ΓΠ:

$$\max -x_0$$

$$-x_1 + x_2 \leq -1 + x_0 \qquad (4)$$

$$-x_1 - 2x_2 \leq -2 + x_0$$

$$x_0, x_1, x_2 \geq 0$$

Μπορούμε εύκολα να βρούμε μια β.ε.λ. για αυτό το ΓΠ θέτοντας $x_1 = x_2 = 0$ και το x_0 να είναι αρκετά μεγάλο ώστε να ικανοποιούνται όλες οι ανισότητες, πχ, $x_0 = 2$.
Παρατηρήστε ότι για το αρχικό ΓΠ (3) υπάρχει εφικτό σημείο αν και μόνο αν το βοηθητικό ΓΠ (4) έχει εφικτό σημείο με $x_0 = 0$.

Το κλειδί στην κατανόηση του simplex 1ης φάσης είναι η παρατήρηση ότι οποιοδήποτε εφικτό σημείο του (4) με $x_0 = 0$ **αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση του** (4) αφού η αντικειμενική συνάρτηση είναι πάντα μικρότερη ή ίση του 0 λόγω του περιορισμού $x_0 \geq 0$.

Συνεπώς θα πρέπει να βρούμε τη βέλτιστη λύση του (4) με simplex:
Το αρχικό λεξικό είναι:

$$\max \xi = \qquad -x_0 \qquad (5)$$

$$z_1 = -1 + x_0 + x_1 - x_2$$

$$z_2 = -2 + x_0 + x_1 + 2x_2$$

$$z_3 = 1 + x_0 + \qquad\quad -x_2$$

$$x_0, x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0$$

Όπου με ξ συμβολίζουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο (4). (Θα χρησιμοποιήσουμε το ζ για την “πραγματική” αντικειμενική συνάρτηση στο (3).)

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Παρότι οι μεταβλητές στην 1η εξίσωση έχουν αρνητικό συντελεστή, ο simplex 1ης φάσης δεν έχει τερματίσει αφού εάν θέσουμε όλες τις μεταβλητές δεξιά των = ίσες με μηδέν τότε εξακολουθούμε να λαμβάνουμε μια μη εφικτή βασική λύση. Η ιδέα είναι να μεταφέρουμε μεταβλητές δεξιά και αριστερά των = ώστε η αντίστοιχη βασική λύση να είναι και εφικτή. Συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε την εφικτή λύση $x_1 = x_2 = 0, x_0 = 2$ που αναφέραμε παραπάνω, δηλαδή θεωρούμε τη λύση που προκύπτει θέτοντας τις μεταβλητές απόφασης του αρχικού προβλήματος (3) ίσες με 0 και το x_0 ίσο με τη μικρότερη δυνατή τιμή ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί του (4). Η λύση αυτή είναι η $(x_0, x_1, x_2, z_1, z_2, z_3) = (2, 0, 0, 1, 0, 3)$. Για να κατορθώσουμε να φέρουμε τις μηδενικές μεταβλητές δεξιά των =, αρκεί να κάνουμε pivot μεταξύ των x_0, z_2 στο λεξικό (5):

$$\begin{aligned}
&\max \xi = -2 - z_2 + x_1 + 2x_2 \\
&z_1 = 1 + z_2 \qquad - 3x_2 \\
&x_0 = 2 + z_2 - x_1 - 2x_2 \\
&z_3 = 3 + z_2 - x_1 - 3x_2 \\
&x_1, x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Τώρα δεξιά των = εμφανίζονται μόνο μη βασικές μεταβλητές της βασικής εφικτής λύσης $(x_0, x_1, x_2, z_1, z_2, z_3) = (2, 0, 0, 1, 0, 3)$. Από αυτό το σημείο μπορούμε να εκτελέσουμε τα βήματα του simplex, οπότε κάνουμε pivot μεταξύ των x_1, x_0:

$$\begin{aligned}
&\max \xi = \qquad -x_0 \\
&z_1 = 1 + z_2 \qquad - 3x_2\ , \\
&x_1 = 2 + z_2 \qquad - 2x_2\ , \\
&z_3 = 1 \qquad\qquad - x_2 \\
&x_1, x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι σε αυτό το σημείο τερματίζει ο simplex και η βέλτιστη λύση (της 1ης φάσης) είναι $(x_0, x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3) = (0, 2, 0, 1, 1, 0, 1)$. Εκ κατασκευής η λύση αυτή αντιστοιχεί σε εφικτό σημείο του ΓΠ (3).

Simplex 2ης φάσης

Τώρα είμαστε έτοιμοι να εκτελέσουμε τον simplex για το αρχικό πρόβλημα όπου αρχίζουμε με τη β.ε.λ. που βρήκαμε στην 1η φάση. Ήδη στο τελευταίο λεξικό της φάσης 1, οι μη βασικές μεταβλητές βρίσκονται δεξιά και οι βασικές αριστερά των =. Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο λεξικό διαγράφοντας όμως τη μεταβλητή x_0 εφόσον δεν χρησιμοποιείται στο (3).

Επίσης θα πρέπει στη θέση της εξίσωσης με την ξ να χρησιμοποιήσουμε τη $\zeta = -2x_1 - x_2$. Βέβαια αφού οι x_1, x_2 είναι βασικές μεταβλητές, για να εμφανίζονται μόνο μη βασικές στην εξίσωση της ζ, αρκεί να αντικαταστήσουμε τις τιμές των x_1, x_2 από τις αντίστοιχες ισότητες του τελευταίου λεξικού της 1ης φάσης. Δηλαδή, $\zeta = -2x_1 - x_2 = -4 - 2z_2 + 3x_2$.

Συνολικά το αρχικό λεξικό της 2ης φάσης είναι

$$\begin{aligned}
&\max \zeta = -4 - 2z_2 + 3x_2 \\
&z_1 = 1 + z_2 \qquad - 3x_2 \\
&x_1 = 2 + z_2 \qquad - 2x_2 \\
&z_3 = 1 \qquad\qquad\;\; - x_2 \\
&x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0
\end{aligned}$$

όπου μετά από pivot των x_2, z_1 καταλήγουμε στο λεξικό:

$$\begin{aligned}
&\max \zeta = -3 - z_1 - z_2 \\
&x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 \\
&x_1 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 \\
&z_3 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}z_1 - \frac{1}{3}z_2 \\
&x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Εδώ τερματίζει ο simplex 2ης φάσης με βέλτιστη λύση την $(x_1, x_2) = (4/3, 1/3)$.

Εκφυλισμένα ΓΠ

Ένα ΓΠ είναι εκφυλισμένο εάν σε κάποιο λεξικό του simplex, ο σταθερός όρος μιας εξίσωσης που αντιστοιχεί σε βασική μεταβλητή (δηλαδή εκτός της ζ) είναι μηδέν, δηλαδή $b'_i = 0$ για κάποιο $i \in \mathcal{B}$ σύμφωνα με τον συμβολισμό του γενικού λεξικού (2).

Παράδειγμα

Θεωρήστε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} &\max 2x_1 - x_2 \\ \text{Έτσι ώστε } &2x_2 \leq 1 \\ &x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ &-x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Το αρχικό λεξικό είναι:

$$\begin{aligned} \max \zeta &= \quad 2x_1 - x_2 \\ z_1 &= 1 \quad - 2x_2 \\ z_2 &= \quad -x_1 + 2x_2 \\ z_3 &= \quad x_1 - 3x_2 \\ & x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Όπου στις δύο τελευταίες εξισώσεις οι σταθεροί όροι είναι 0. Κατά συνέπεια το πρόβλημα αυτό είναι εκφυλισμένο. (Σημειώστε ότι γενικά δεν είναι απαραίτητο να εμφανίζονται μηδενικοί σταθεροί όροι στο <u>αρχικό</u> λεξικό - μπορεί να συμβεί στο λεξικό ενός επόμενου βήματος.)

Η ιδιαιτερότητα των εκφυλισμένων ΓΠ είναι ότι ο simplex μπορεί να μη συγκλίνει αναλόγως με τον τρόπο που γίνονται τα pivots. Ένας τρόπος να κάνουμε pivots όπου πάντα οδηγούν σε σύγκλιση είναι ο κανόνας του Bland:

ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ BLAND

Μεταξύ των μεταβλητών που μπορούν να μπουν και να βγουν από τη βάση, επιλέγουμε αυτές με τους μικρότερους δείκτες. Δηλαδή επιλέγουμε τις μεταβλητές που θα γίνουν pivot εξετάζοντάς τις στη σειρά $x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_m$.

Βέβαια ο simplex μπορεί να συγκλίνει ακόμη και αν δεν ακολουθείται ο κανόνας του Bland. Μάλιστα, σε ΓΠ με λιγότερες από 7 μεταβλητές απόφασης, ο simplex πάντα συγκλίνει.