Διάλεξη 15

Αλγόριθμος εσωτερικού σημείου, Πέμπτη 3/5/18

Στις Διαλέξεις 8, 9, 10 είδαμε μεθόδους λύσης προβλημάτων βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς. Για προβλήματα με ανισοτικούς περιορισμούς θα δούμε δύο αλγόριθμους λύσης:

1. Τη **μέθοδο εσωτερικού σημείου** η οποία βασίζεται στην ενσωμάτωση όλων των περιορισμών στην αντικειμενική συνάρτηση.
2. Τον **αλγόριθμο simplex**, <u>ο οποίος εφαρμόζεται μόνο σε γραμμικά προγράμματα</u> και βασίζεται στην ενσωμάτωση της αντικειμενικής συνάρτησης στους περιορισμούς.

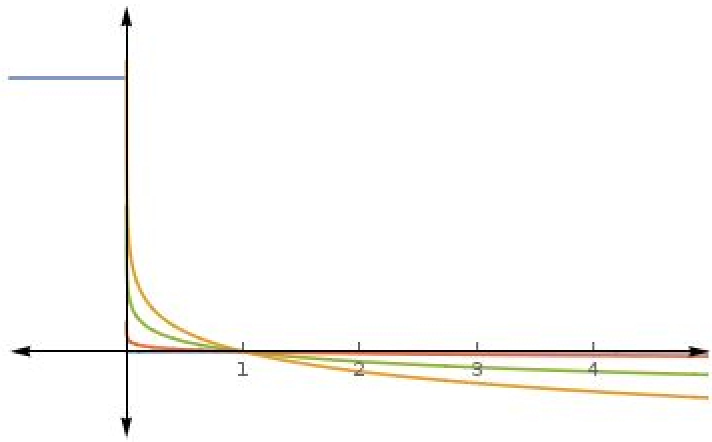
1. Αλγόριθμος εσωτερικού σημείου

Η ιδέα της μεθόδου είναι η ενσωμάτωση των περιορισμών στην αντικειμενική συνάρτηση ώστε να προκύψει ένα πρόβλημα χωρίς περιορισμούς. Κατόπιν χρησιμοποιείται μια μέθοδος λύσης προβλημάτων χωρίς περιορισμούς.

Το πρόβλημα $\min\limits_{x \leq 1} f(x)$ μπορεί να γραφεί χωρίς περιορισμούς ως $\min\limits_{x} f(x) + B(1-x)$, όπου $B(z) = \begin{cases} 0, & z \geq 0 \\ +\infty, & z < 0 \end{cases}$

Η βέλτιστη λύση x^* του δεύτερου προβλήματος δε μπορεί να ικανοποιεί $x^* > 1$, αφού η αντικειμενική συνάρτηση θα λάμβανε τιμή $+\infty$. Για $x \leq 1$, η τιμή είναι $f(x) + B(1-x) = f(x) < +\infty$, άρα η βέλτιστη λύση (του δεύτερου προβλήματος) θα ικανοποιεί $x \leq 1$ και μάλιστα θα επιτυγχάνει τη μικρότερη τιμή $f(x)$. Άρα η βέλτιστη λύση θα είναι επίσης βέλτιστη λύση του πρώτου προβλήματος.

Το δεύτερο πρόβλημα δεν είναι εύκολο να λυθεί γιατί η συνάρτηση $B(z)$ όχι μόνο δεν έχει παράγωγο στο $z = 0$, αλλά δεν είναι καν συνεχής στο σημείο αυτό. Για να υπερβούμε αυτό το εμπόδιο, μπορούμε αντί της $B(z)$ να χρησιμοποιήσουμε πιο “ομαλές” συναρτήσεις $B_\epsilon(z)$, οι οποίες προσεγγίζουν τη $B(z)$ κατά κάποια έννοια. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $B_\epsilon(z) = -\epsilon \log z, B_\epsilon(z) = \frac{\epsilon}{z}$ έχουν την ιδιότητα ότι για κάθε $z \geq 0$ ισχύει $B_\epsilon(z) \to B(z)$ καθώς $\epsilon \to 0$. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **συναρτήσεις φραγμού ([barrier functions]())**.



Η συνάρτηση $B(z)$ (μπλέ) και οι λογαριθμικές συναρτήσεις φραγμού $-\log z$ (πορτιοκαλί), $-0.5\log z$ (πράσινη καμπύλη) και $-0.1\log z$ (κόκκινη). Παρατηρήστε ότι καθώς το ϵ τείνει στο 0 οι συναρτήσεις $-\epsilon\log z$ τείνουν στη $B(z)$.

Τώρα το $\min_{x<1} f(x) + B_\epsilon(1-x)$ είναι πρόβλημα βελτιστοποίησης στο ανοιχτό σύνολο $x < 1$ και μπορεί να λυθεί πχ, με τη μέθοδο Newton ή αναζήτηση. (Ο περιορισμός $x < 1$ δε μας απασχολεί γιατί η βέλτιστη λύση βρίσκεται σε εσωτερικό σημείο του συνόλου.)

Προφανώς η βέλτιστη λύση x^*_ϵ αυτού του προβλήματος δεν είναι βέλτιστη για το αρχικό πρόβλημα, μιας και έχουμε "νοθεύσει" την αντικειμενική του συνάρτηση με τον όρο $B_\epsilon(1-x)$. Όμως αφού ο όρος αυτός γίνεται μικρός καθώς $\epsilon \to 0$, περιμένουμε η x^*_ϵ να αποτελεί καλή προσέγγιση της βέλτιστης λύσης x^* του αρχικού προβλήματος, για μικρά ϵ.

Αυτή είναι η ιδέα του αλγορίθμου εσωτερικού σημείου: προσεγγίζουμε τη βέλτιστη λύση x^* με τις λύσεις x^*_ϵ για $\epsilon = 1, 1/2, 1/2^2, 1/2^2, \ldots$, οι οποίες υπολογίζονται (προσεγγιστικά) με κάποιον αλγόριθμο βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς.

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το

(Π) $$\min f(x_1, \ldots, x_n)$$

έτσι ώστε $g_i(x_1, \ldots, x_n) \le b_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$

$$(x_1, \ldots, x_n) \in A$$

όπου το A είναι ανοιχτό σύνολο και υπάρχει σημείο $\vec{x}^0 \in A$ το οποίο ικανοποιεί όλες τις ανισότητες αυστηρά, δηλαδή $g_i(\vec{x}^0) < b_i$ για κάθε i. Το σημείο $\vec{x}^0$ θα χρησιμοποιηθεί ως αρχική προσέγγιση της λύσης $\vec{x}^*$.

Για $\epsilon > 0$ θα προσεγγίσουμε το λύση του (Π) χρησιμοποιώντας μια λογαριθμική συνάρτηση φραγμού $B_\epsilon(z) = -\epsilon\log z$ για κάθε περιορισμό και λύνοντας το πρόβλημα:

$$(\Pi_\epsilon) \qquad \min f(x_1, \ldots, x_n) - \epsilon \sum_{i=1}^{m} \log\left(b_i - g_i(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

για $(x_1, \ldots, x_n) \in A$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ (ΜΕΘΟΔΟΣ ΦΡΑΓΜΟΥ)

Είσοδος: αρχικό σημείο $\vec{x}^0$ όπως παραπάνω, $\epsilon_0 > 0$

1. **Θέσε $\epsilon = 1$**
2. **Προσέγγιση της βέλτιστης λύσης $\vec{x}_\epsilon^*$ του προβλήματος (Π_ϵ) (Για παράδειγμα, εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton με οπισθοδρόμηση μαζί με ένα κριτήριο τερματισμού.)**
3. **Εάν $\epsilon \leq \epsilon_0$ τότε τερμάτισε αλλιώς θέσε $\vec{x}^0 = \vec{x}_\epsilon^*, \epsilon = \epsilon/2$ και επανέλαβε από το βήμα 2.**

Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν η παράμετρος ϵ γίνει μικρότερη μιας προκαθορισμένης μικρής τιμής ϵ_0.

Ο αλγόριθμος εσωτερικού σημείου έχει πολύ καλή θεωρητική επίδοση: για να επιτύχουμε $|f(\vec{x}_\epsilon^*) - f(\vec{x}^*)| \leq \delta$ απαιτούνται $O\left(\log\log\frac{1}{\delta}\right)$ βήματα (συμπεριλαμβάνοντας και τα βήματα για τη λύση του βήματος 2), εάν χρησιμοποιηθεί στο βήμα 2 ο αλγόριθμος Newton με οπισθοδρόμηση. Με άλλα λόγια, για να επιτύχουμε λύση που προσεγγίζει τη βέλτιστη τιμή μέχρι το N-οστό δεκαδικό ψηφίο, απαιτούνται $O(\log N)$ βήματα! (χρησιμοποιήστε $\delta = 10^{-N}$)