Διάλεξη 2

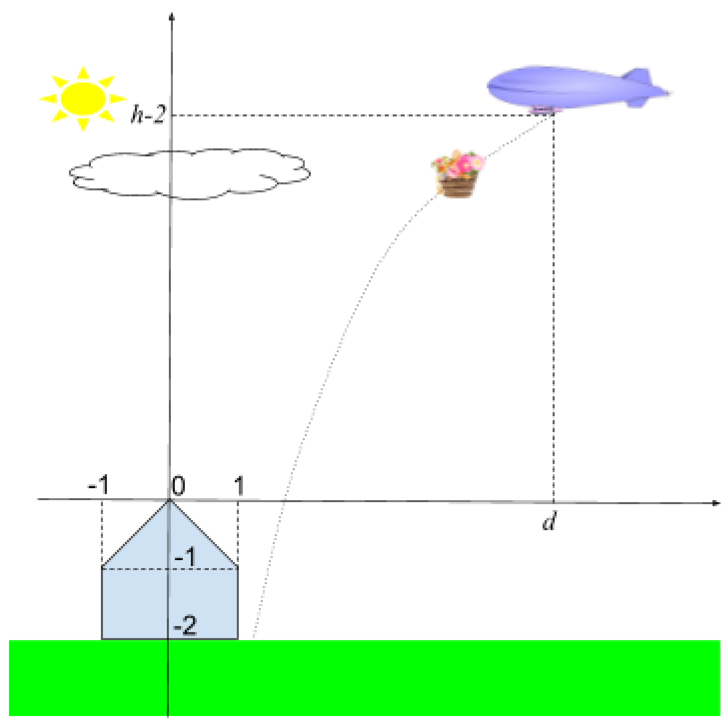
Διαμόρφωση προβλημάτων βελτιστοποίησης 2, Τρίτη 20/2/18

Περιεχόμενα

1. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Θα τη γλιτώσει το σπίτι;

Μια γλάστρα πετιέται από ένα Ζέπελιν το οποίο βρίσκεται σε ύψος $h = 200$ μ και σε οριζόντια



απόσταση $d = 100$ μ από ένα σπίτι όπως φαίνεται στο σχήμα. Εάν η ταχύτητα του Ζέπελιν είναι $u = 15$ μ/δ, η γλάστρα θα χτυπήσει το σπίτι;

Η ιδέα είναι να υπολογίσουμε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ σημείων του σπιτιού και της τροχιάς της γλάστρας. Το σημείο με συντεταγμένες (x, y) ανήκει στο σπίτι εάν ισχύουν ταυτόχρονα οι ανισότητες: $x \geq -1, x \leq 1, y \geq -2, y \leq x, y \leq -x$. Η ιδέα είναι ότι τα σημεία του σπιτιού βρίσκονται στην τομή των 5 ημιεπιπέδων που ορίζει κάθε μια από τις 5 πλευρές του.
Το σημείο (x', y') που βρίσκεται η γλάστρα τη χρονική στιγμή t μετά τη ρίψη της, ικανοποιεί $x' = d - ut, y' = h - 2 - \frac{1}{2}gt^2$, όπου $g = 10\ \mu/\delta^2$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Συνεπώς η ελάχιστη απόσταση του σπιτιού από την τροχιά είναι η βέλτιστη τιμή του προβλήματος:

$$
\begin{aligned}
&\min \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \\
&\qquad x' = d - ut \\
&\qquad y' = h - 2 - \frac{1}{2}gt^2 \\
&\qquad t \geq 0 \\
&\qquad -1 \leq x \leq 1 \\
&\qquad y \geq -2 \\
&\qquad y \leq x \\
&\qquad y \leq -x
\end{aligned}
$$

Το πρόβλημα αυτό έχει τις μεταβλητές απόφασης: x, y, x', y', t και το σύνολο εφικτών σημείων ορίζεται ως οι τιμές των μεταβλητών απόφασης που ικανοποιούν ταυτόχρονα όλες τις παραπάνω ισότητες και ανισότητες. Οι οκτώ λογικές συνθήκες που ορίζουν το εφικτό σύνολο ονομάζονται **περιορισμοί**. Οι δύο πρώτοι είναι **ισοτικοί** και οι υπόλοιποι είναι **ανισοτικοί περιορισμοί**.
Περιορισμοί που περιέχουν μόνο γραμμικούς όρους των μεταβλητών απόφασης, όπως όλοι οι παραπάνω περιορισμοί εκτός του δεύτερου, λέγονται **γραμμικοί**. Ο δεύτερος περιορισμός είναι **μη γραμμικός**.

Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με τη χρήση λογισμικού, διατυπώνοντας το πρώτα στη γλώσσα AMPL:

```
var x;
```

```
var y;
var xp;
var yp;
var t;
param h := 200;
param d := 100;
param u := 15;
param g := 10;
minimize f: sqrt((x-xp)^2+(y-yp)^2);
subject to c1: xp = d-u*t;
subject to c2: yp = h-2-0.5*g*t^2;
subject to c3: t >= 0;
subject to c4: -1 <= x <= 1;
subject to c5: y >= -2;
subject to c6: y <= x;
subject to c7: y <= -x;
solve;
display f, t, x,y, xp,yp;
```

Λύνοντας βρίσκουμε ελάχιστη απόσταση 4.02μ, άρα η γλάστρα δεν πέφτει στο σπίτι.

Παράδειγμα 2: Τι κάνουμε όταν βρέχει.

Βρισκόμαστε στο σημείο 0 και καθώς βρέχει επιθυμούμε να μετακινηθούμε στο σημείο *D* το οποίο απέχει 20μ. Πρέπει να αποφασίσουμε την ταχύτητα u κίνησης (σε μ/δ) καθώς και το ύψος h και το πλάτος w μας έτσι ώστε να βραχούμε όσο το δυνατόν λιγότερο. Λόγω φυσικών περιορισμών το ύψος μας δε μπορεί να υπερβαίνει τα 2 μέτρα και να υπολείπεται του μισού μέτρου όπως επίσης $wh = 0.3$. Δίδεται η μέγιστη ταχύτητά μας $u_{\max} = 10$ μ/δ και η ταχύτητα πτώσης της βροχής $u_r = 20$ μ/δ.

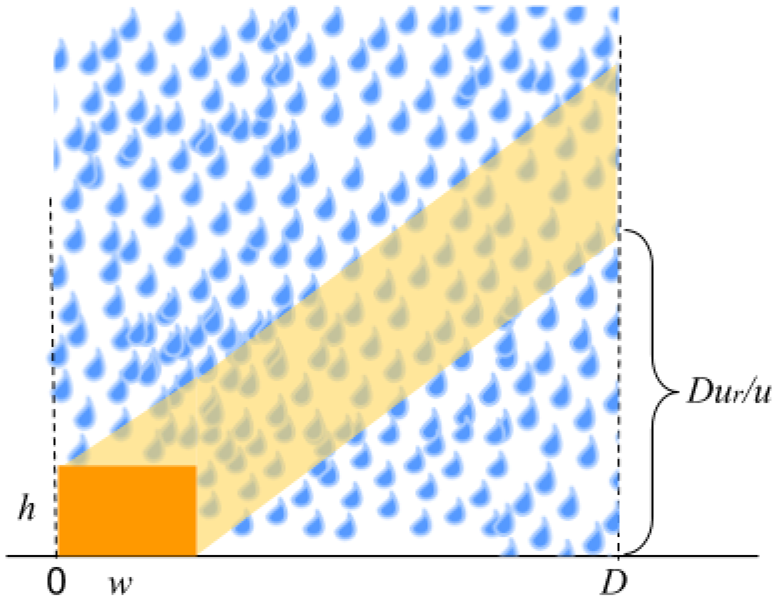
Το πρόβλημα διατυπώνεται ως: $$\min Dh + w\frac{Du_r}{u} + \frac{1}{2}w^2\frac{u_r}{u}$$

έτσι ώστε $$wh = 0.3$$

$$0.5 \leq h \leq 2$$

$$0 \leq u \leq u_{\max}$$

Επιλύοντας την περιγραφή του προβλήματος σε AMPL, βρίσκουμε τη βέλτιστη λύση $u^* = u_{\max}, h^* = 0.767, w^* = 0.391$.

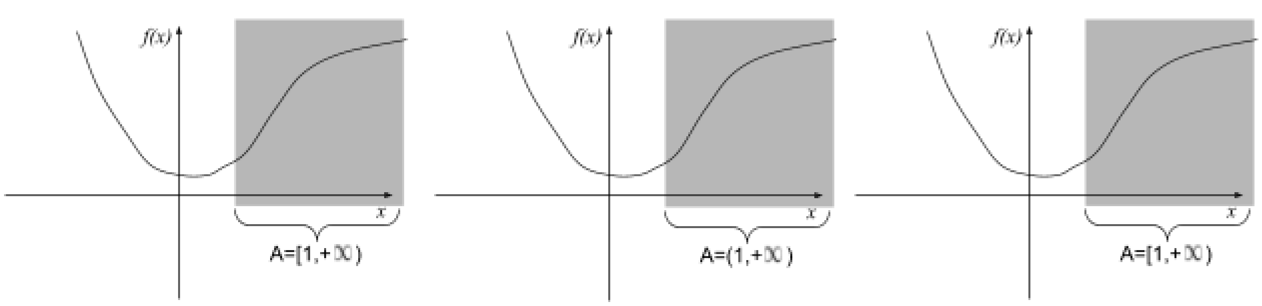


Παρατηρήστε ότι οι περιορισμοί που αφορούν τη μεταβλητή h δεν περιορίζουν τη βέλτιστη λύση: ακόμη και ένας άνθρωπος που θα μπορούσε να εκταθεί απεριόριστα, όπου απαιτούμε μόνο $h \geq 0$, η βέλτιστη λύση πάλι θα ικανοποιούσε $h^* = 0.767$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι οι περιορισμοί $0.5 \leq h$ και $h \leq 2$ είναι **ανενεργοί**. Αντίθετα, ο περιορισμός $u \leq u_{\max}$ είναι **ενεργός**.

Προσοχή: μπορεί να μην υπάρχει βέλτιστη λύση

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να έχει μία, πολλές ή ακόμη και καμία βέλτιστη λύση.

Θεωρείστε τα τρία προβλήματα που ακολουθούν όπου η συνάρτηση $f(x)$ αυξάνει μονότονα προς το $+\infty$ για μεγάλες τιμές του x, όπως φαίνεται στο σχήμα.



$\min_{x\in A} f(x)$ $\min_{x\in A} f(x)$ $\max_{x\in A} f(x)$

Ενώ στο αριστερό πρόβλημα η βέλτιστη λύση είναι $x^* = 1$, στο μεσαίο δεν υπάρχει καμία βέλτιστη λύση: κανένα σημείο x^* δε θα μπορούσε να είναι βέλτιστο αφού πάντα υπάρχει κάποιο άλλο (πχ, το $(x^* + 1)/2 \in A$) με μικρότερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι γιατί το "σύνορο" $x = 1$ μεταξύ του A και του A^c δεν ανήκει στο πρώτο και έτσι η $f(x)$ δεν είναι δυνατόν να ελαχιστοποιηθεί εντός του A. Σύνολα που στερούνται συνόρων, όπως το A, λέγονται ανοικτά και αν υπάρχουν βέλτιστες λύσεις αυτές δε μπορεί να βρίσκονται εκεί.
Ακριβώς για τον ίδιο λόγο στο δεξιό πρόβλημα δεν υπάρχει μέγιστο σημείο: το σύνολο A στερείται συνόρου στην κατεύθυνση που βελτιώνεται η αντικειμενική συνάρτηση (προς το $+\infty$).

Σε πραγματικά προβλήματα δεν είναι πάντα εύκολο να διαπιστώσουμε εάν υπάρχουν βέλτιστες λύσεις. Η μόνη περίπτωση που μπορούμε να εγγυηθούμε κάτι τέτοιο σε γενικό επίπεδο -χωρίς δηλαδή να χρειάζεται να επικαλεστούμε την ειδική μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης και του συνόλου των εφικτών σημείων- είναι η ακόλουθη:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Εάν στο πρόβλημα βελτιστοποίησης (1) ισχύουν ότι:

- ***η αντικειμενική συνάρτηση f είναι συνεχής,***
- ***το σύνολο εφικτών σημείων A είναι κλειστό (δηλ., περιέχει τα σύνορα του) και φραγμένο,***

τότε υπάρχει (τουλάχιστον μια) βέλτιστη λύση.

Το παραπάνω θεώρημα είναι χρήσιμο γιατί βασίζεται σε αδρά χαρακτηριστικά ενός προβλήματος βελτιστοποίησης, που είναι γενικά εύκολο να επαληθευτούν .

2. Ιδιότητες

Δίνονται οι ακόλουθες ιδιότητες χωρίς απόδειξη. (Άσκηση: δώστε τις αποδείξεις.)

1. Μπορούμε να ανταλλάξουμε τη σειρά δύο ελαχιστοποιήσεων ή μεγιστοποιήσεων
$$\min_{x_1\in A_1}\min_{x_2\in A_2} f(x_1,x_2) = \min_{x_2\in A_2}\min_{x_1\in A_1} f(x_1,x_2)$$
$$\max_{x_1\in A_1}\max_{x_2\in A_2} f(x_1,x_2) = \max_{x_2\in A_2}\max_{x_1\in A_1} f(x_1,x_2),$$
όμως $\max_{x_1\in A_1}\min_{x_2\in A_2} f(x_1,x_2) \le \min_{x_2\in A_2}\max_{x_1\in A_1} f(x_1,x_2)$

2. Η τιμή του ελαχίστου μικραίνει εάν περιορίσουμε το σύνολο των εφικτών σημείων: εάν $A \subseteq B$ τότε $\min_{x \in A} f(x) \geq \min_{x \in B} f(x)$.
3. Εάν το x^* είναι βέλτιστη λύση του $\min_{x \in B} f(x)$ και $x^* \in A \subseteq B$ τότε είναι και βέλτιστη λύση του $\min_{x \in A} f(x)$.
4. $\min_{x_1 \in A_1} f_1(x_1) + \min_{x_2 \in A_2} f_2(x_2) \leq \min_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2} f_1(x_1) + f_2(x_2)$.
5. Εάν $f_1(x) \geq f_2(x)$ για κάθε x τότε $\min_{x \in A} f_1(x) \geq \min_{x \in A} f_2(x)$.