19/3/04

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΑΚΚΙΔΙΟΥ (KNAPSACK)

ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ · ΛΜΣ ΚΕΦ 11 ΚΕΦ. 12
· SEDGEWICK ALGORITHMS : 2ND EDITION
· CLR ΚΕΦ. 16

- Ν ΤΥΠΟΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ
- 1+Κ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ (1+1 = 2 ΧΑΡΑΚΤ.)
  - ΑΞΙΑ
  - ΒΑΡΟΣ
- ΣΑΚΚΙΔΙΟ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ Μ

- ΟΛΟΙ ΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΚΕΡΑΙΟ ΣΑΚΚΙΔΙΟ: ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΑΠΟ ΚΑΘΕ ΤΥΠΟ ΓΙΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΞΙΑΣ ΤΗΡΩΝΤΑΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

0-1 ΣΑΚΚΙΔΙΟ: ΤΟ ΠΟΛΥ ΕΝΑ ΑΠΟ ΚΑΘΕ ΤΥΠΟ!

ΛΥΣΗ ΕΥΚΟΛΗ ΑΝ ΛΥΣΕΙΣ ΡΗΤΕΣ!

$$\max \sum_{j=1}^{N} a_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{N} b_j x_j \leq M$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, N$$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ
- ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ
- ΕΝΑΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ, ΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΛΥΣΕΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\max \quad 1000x + 2y$

$$100x + y \le M$$
$$x, y \ge 0$$

ΛΥΣΗ

$$1000x + 2y + 0S = Z$$
$$100x + y + S = M$$
$$x, y, S \ge 0$$

· ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

$$\begin{bmatrix} 1000 & 2 & 0 \\ 100 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ M \end{bmatrix}$$

ή (ΜΟΝΟ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ)

$$-10 \uparrow \begin{bmatrix} 1000 & 2 & 0 & Z \\ 100 & 1 & 1 & M \end{bmatrix}$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΣΥΣΤΗΜΑ: ΑΦΑΙΡΟΥΜΕ 10×2^{η} ΑΠΟ $1^{η}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -8 & -10 & Z - 10M \\ 100 & 1 & 1 & M \end{bmatrix}$$

· ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΛΥΣΗ $x = M/100 \quad y = S = 0$

· Η ΛΥΣΗ ΔΙΝΕΙ $Z = 10M$

· ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΑΛΛΗ ΛΥΣΗ ΔΙΝΕΙ

$$0 \ge -8\hat{y} - 10\hat{S} = \hat{Z} - 10M$$

ή $\quad 10M \ge \hat{Z}$

· ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ Η ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ SIMPLEX ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

ΓΕΝΙΚΑ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & z \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 1 & M \end{bmatrix}$$

ΕΣΤΩ $a_1/b_1 \geq a_2/b_2 \cdots \geq a_n/b_n$

ΑΦΑΙΡΕΝΤΑΣ a_1/b_1 (2) ΑΠΟ 1 ΕΧΟΥΜΕ

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_1 - \frac{a_1}{b_1} b_1}^{\,0} & a_2 - \frac{a_1}{b_1} b_2 & \cdots & -a_1/b_1 & z - M a_1/b_1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & 1 & M \end{bmatrix}$$

ΕΙΝΑΙ $a_j - \frac{a_1}{b_1} b_j \leq 0$ ΕΦΟΣΟΝ $\frac{a_j}{b_j} \leq \frac{a_1}{b_1}$

ΑΡΑ $x_1 = M/b_1 \quad x_2 = \cdots = 0$

· ΤΙ ΓΙΝΕΤΑΙ ΑΝ M/b_1 ΡΗΤΟΣ (ΟΧΙ ΑΚΕΡΑΙΟΣ;)

· ΤΙ ΓΙΝΕΤΑΙ ΑΝ $x_j \leq \bar{X}_j$;

· ΠΩΣ ΛΥΝΟΥΜΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΤΗΤΑ;

· ΑΠΛΗΣΤΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΣΤΡΟΓΓΥΛΕΥΣΗΣ

- ΔΙΑΛΕΞΕ $\hat{j} = \arg\max_j a_j/b_j$
- ΘΕΣΕ $\hat{x}_j = \lfloor M/b_j \rfloor$
- ΑΝ $\forall j \quad b_j > M - b_{\hat{j}} \cdot x_{\hat{j}}$ ΤΕΛΟΣ

  ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ <u>ΧΩΡΙΣ</u> $\hat{j}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

ΤΥΠΟΣ	1	2
· a	200	59
· b	100	30

· $M = 180$

· ΛΥΣΗ ΓΠ $x_a = 1{,}8$

· ΑΠΛΗΣΤΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

$$x_a = \lfloor 1{,}8 \rfloor = 1$$

· ΥΠΟΛΟΙΠΟ 80 ΔΗΛΑΔΗ $x_b = 2$

· ΑΞΙΑ $1 \cdot 200 + 2 \cdot 59 = 318$

ΑΛΛΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΛΥΣΗ $x_b = 6$ $x_a = 0$
ΑΞΙΑ $6 \cdot 59 = 354$!

· ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΜΕ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

23/3/04

· ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓ/ΣΜΟΥ :
ΔΙΑΙΡΕΙ ΚΑΙ ΒΑΣΙΛΕΥΕ + ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ
· ΕΦΑΡΜΟΖΕΤΑΙ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΑΝΑΛΥΟΝΤΑΙ ΣΕ ΣΤΑΔΙΑ ΠΟΥ ΕΞΕΛΙΣΣΟΝΤΑΙ (ΔΥΝΑΜΙΚΗ)
· ΘΥΜΙΖΕΙ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΤΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ : ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΓΝΩΣΤΗ ΛΥΣΗ, ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΥ ΕΠΙΤΡΕΠΟΥΝ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

• ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΑΚΕΡΑΙΟ ΣΑΚΚΙΔΙΟ

$$\max_{x_j \geq 0,\ \text{ΑΚΕΡΑΙΟΣ}} \sum_j a_j x_j \equiv F(M; a_1 \ldots; b_1 \ldots)$$

$$\text{ΚΑΙ} \quad \sum_j b_j \cdot x_j \leq M$$

• ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΧΕΙ ΛΥΣΗ (ΣΕ ΑΛΛΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΦΑΝΕΣ!)

• ΠΟΥ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ $M, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ ΑΡΑ $F(M; a_1, \ldots; b_1, \ldots)$

• ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΜΟΝΟ ΤΗΝ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟ ΤΟ M
ΓΡΑΦΟΥΜΕ ΑΠΛΩΣ $F(M)$ ΕΦΕΞΗΣ

• ΑΝΑΛΥΣΗ • ΕΣΤΩ $F(m)$ ΓΝΩΣΤΗ ΓΙΑ $m < M$

• ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΓΙΑ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ M

• ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΥΠΟ j

  • ΕΙΤΕ ΥΠΑΡΧΕΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΥΠΟΥ j ΕΙΤΕ ΟΧΙ

• ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΟΤΕ ΤΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ ΕΧΟΥΝ ΒΑΡΟΣ ΤΟ ΠΟΛΥ $M - b_j$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. ΤΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ ΕΙΝΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΑ ΤΟΠΟΘΕΤΗΜΕΝΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΔΕΝ ΘΑ ΗΤΑΝ ΒΕΛΤΙΣΤΗ Η M-ΦΟΡΤΙΣΗ.

• ΑΡΑ $\quad F(M) = a_j + F(M - b_j)$

• ΑΝ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ Η ΦΟΡΤΙΣΗ ΜΕ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ ΕΝΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ j ΕΧΕΙ ΑΞΙΑ ΤΟ ΠΟΛΥ $a_j + F(M - b_j)$ ΚΑΙ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΗ (ΓΙΑΤΙ;), ΑΡΑ

$$F(M) > a_j + F(M - b_j)$$

ΑΡΑ <u>ΓΙΑ ΚΑΘΕ</u> j $\quad F(M) \ge a_j + F(M-b_j)$

ΚΑΙ ΑΡΑ $\quad F(M) \ge \max\limits_{j=1,..,N} \left[a_j + F(M-b_j) \right]$

ΑΠΟ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ max

- Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΑΝΙΣΟΙΣΟΤΗΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΤΗΤΑ!

- ΔΙΟΤΙ ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟ, ΚΑΠΟΙΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΤΟ ΣΑΚΚΙΔΙΟ, ΕΣΤΩ ΤΟ $\hat{j}$ ΑΡΑ

$$F(M) = a_{\hat{j}} + F(M-b_{\hat{j}}) \le \max_j \left[a_j + F(M-b_j) \right]$$

ΚΑΙ ΑΡΑ (ΛΟΓΩ $\ge$ <u>ΚΑΙ</u> $\le$) ΕΙΝΑΙ

$$F(M) = \max_{j=1,..,N} \left[a_j + F(M-b_j) \right]$$

- ΠΩΣ "ΛΥΝΕΤΑΙ"; ΤΙ ΘΑ ΠΕΙ ΛΥΣΗ; ΘΕΛΟΥΜΕ "ΓΡΗΓΟΡΟ" ΤΡΟΠΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ, ΚΑΤΑ ΠΡΟΤΙΜΗΣΗ ΜΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΥΠΟ.

- ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ: (ΕΠΑΓΩΓΙΚΑ)
    - $F(m) = 0$ ΓΙΑ $0 \le m < \min\limits_j b_j = b_{min}$
    - ΑΝ ΞΕΡΟΥΜΕ $F(m)$ ΜΕΧΡΙ ΤΟ $m = M$ ΤΟΤΕ ΜΕ ΜΙΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ (N ΠΡΑΞΕΙΣ) ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΟ $F(M+1)$

• ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΤΥΠΟ ΓΙΑ $F(m)$
ΜΑΛΛΟΝ ΟΧΙ, ΕΚΤΟΣ ΑΝ $NP = P$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

j	1	2	3
a	2	4	6
b	3	4	5
a/b	0,67	1,00	1,2

ΠΙΝΑΚΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ (ΜΕΤΑΤΡΕΠΕΤΑΙ ΕΥΚΟΛΑ ΣΕ ΦΥΛΛΟ ΛΟΓ

M	-1	0	3	4	5	6	..	m
F	$-\infty$	0	2	4	6	6	..	
1	-	$-\infty$	$2+F(3-3)$	$2+F(1)$	$2+F(2)$	$2+F(3)$	...	$2+F(m-3)$
2	-	$-\infty$	$4+F(3-4)$	$4+F(0)$	$4+F(1)$	$4+F(2)$	...	$4+F(m-4)$
3	-	$-\infty$	$6+F(3-5)$	$-\infty$	$6+F(0)$	$6+F(1)$	...	$6+F(m-5)$

$$a_1 + F(M-b_1) \qquad a_2 + F(M-b_2) \qquad a_3 + F(M-b_3)$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$2 + F(M-3) \qquad 4 + F(M-4) \qquad 6 + F(M-5)$$

Άρα έχουμε την εξίσωση διαφορών
$$F(M) = \max\{2 + F(M-3),\ 4 + F(M-4),\ 6 + F(M-5)\}$$
που επιλύεται εύκολα δίνοντας αρχικές τιμές
$F(0) = 0$, $F(\text{αρνητικές τιμές}) = -\infty$:

• ΑΣΚΗΣΗ ΑΠΟΔΕΙΞΤΕ ΜΕ ΕΠΑΓΩΓΗ ΟΤΙ $F(M) \le \frac{6}{5}M$ ΕΞΕΤΑΖΟΝΤΑΣ ΜΟΝΟ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Η ΣΧΕΣΗ ΙΣΧΥΕΙ ΓΙΑ $M \le 0$. ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ ΜΕΧΡΙ m, ΑΠΟΔΕΙΞΤΕ ΟΤΙ ΙΣΧΥΕΙ ΚΑΙ ΓΙΑ $m+1$.
ΤΟΤΕ $F(m+1) = a_k + F(m+1-b_k)$ ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΟ k ...

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: ΕΣΤΩ k Ο "ΚΑΛΥΤΕΡΟΣ" ΤΥΠΟΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ, ΔΗΛΑΔΗ $a_k/b_k = \max_j \{a_j/b_j\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΤΕ ΕΞΕΤΑΖΟΝΤΑΣ <u>ΜΟΝΟ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΠ</u> ΕΠΑΓΩΓΙΚΑ ΟΤΙ $F(n b_k) = n a_k$ n: ΑΚΕΡΑΙΟΣ.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> ΑΝ ΕΝΑΣ ΤΥΠΟΣ k_1 ΕΙΝΑΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΧΕΙΡΟΤΕΡΟΣ ΑΠΟ ΚΑΠΟΙΟ ΑΛΛΟ ΤΥΠΟ k^* (ΔΗΛΑΔΗ $b_{k_1} \ge b_{k^*}$ ΚΑΙ $a_{k_1} < a_{k^*}$) ΤΟΤΕ Ο ΤΥΠΟΣ k_1 ΔΕΝ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΣΕ ΜΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΦΟΡΤΩΣΗ.

<u>ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΔΠ</u>

<u>ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ</u>: ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΙΔΙΑΙΤΕΡΑ ΑΠΛΑ, ΑΝΤΙΓΡΑΦΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΠ, ΠΡΟΣΕΧΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΗΚΗ ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΥ

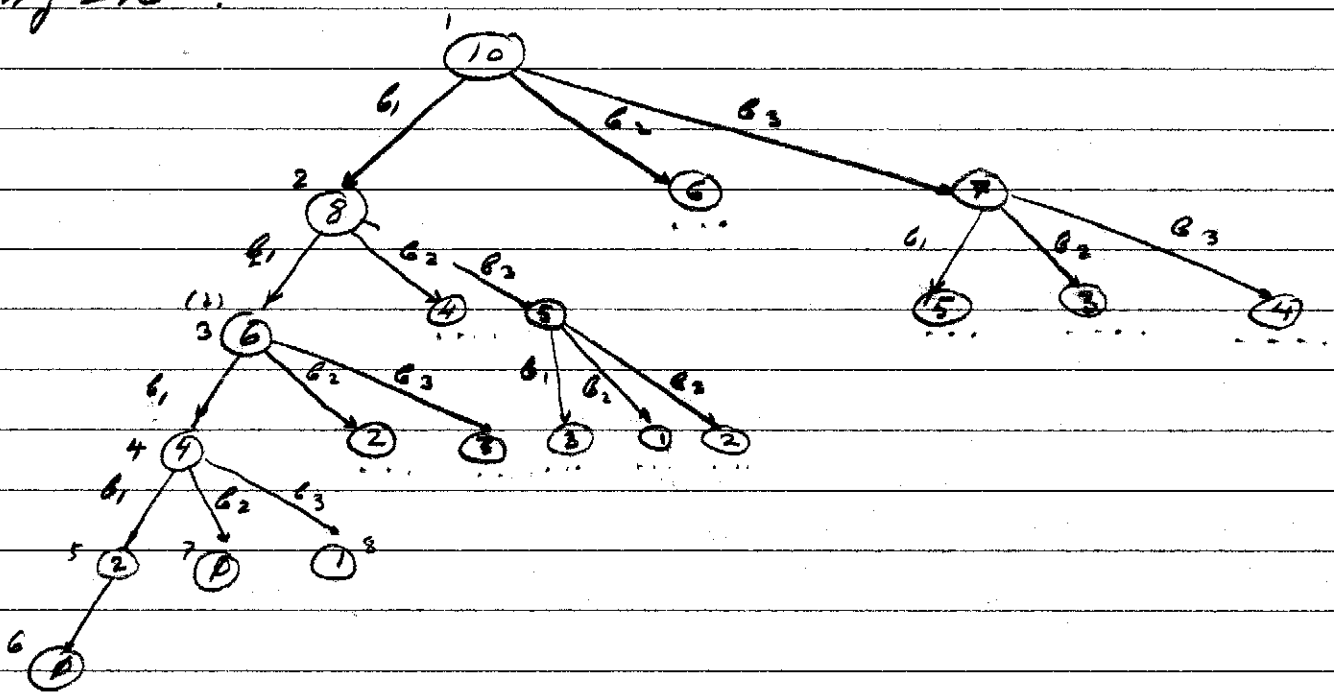
ΕΝΑΣ ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ ΕΙΝΑΙ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

```
integer function valdp(m : integer)
begin {0}
if m < 0 then valdp ← -maxint else
begin {1}
temp ← 0   {To temp ΑΠΟΘΗΚΕΥΕΙ ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ..}
for j=1 to N do   {N : ΤΥΠΟΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ}
begin {2}            ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΚΛΗΣΗ
s ← valdp(m - b[j]) + a[j]
if temp < s then temp ← s      ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ j
end {2}
valdp ← temp
end {1}
end {0}
```

30/3/04

• Ο ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΚΩΔΙΚΑΣ ΕΙΝΑΙ ΒΕΒΑΙΟ ΟΤΙ ΘΑ ΤΕΡΜΑΤΙΣΕΙ, ΟΜΩΣ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΤΙΚΟΣ ΚΑΘΩΣ ΘΑ ΚΑΝΕΙ ΠΟΛΛΕΣ ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΑΝΑΔΡΟΜΕΣ !

• <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>: ΑΝ $N=3$ $b_1=2$ $b_2=4$ $b_3=3$ ΤΟ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΔΕΝΔΡΟ ΔΕΙΧΝΕΙ ΤΙΣ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΚΛΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΘΑ ΓΙΝΟΥΝ ΑΝ ΚΛΗΘΕΙ Η valdp ΓΙΑ $mj=10$:



• ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΠΟΛΛΕΣ ΚΛΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 6, 5, 4 κλπ

• ΑΝ $C(m)$ ΕΙΝΑΙ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΩΝ ΚΛΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ m ΕΙΝΑΙ

$$C(m) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} C(m-b_j) + 1 & m \geq 0 \\ 1 & m < 0 \end{cases}$$

• ΚΑΙ ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ m

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> ΑΝ $N=2$ $b_1=3$ $b_2=5$ ΛΥΣΤΕ ΤΗΝ ΕΑ.
(ΔΥΣΚΟΛΟ...)

• ΟΙ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΑΝΑΔΡΟΜΕΣ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΑΠΟΦΕΥΧΘΟΥΝ ΜΕ ΤΟ ΤΕΧΝΑΣΜΑ ΤΗΣ ΑΠΟΜΝΗΜΟΝΕΥΣΗΣ - MEMOIZATION (CLR - Ch.16 - Dynamic Programming σελ. 312)

• ΣΕ ΜΙΑ GLOBAL ARRAY valopt[ ] ΑΠΟΘΗΚΕΥΟΥΜΕ ΤΙΣ ΗΔΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΘΕΙΣΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ valdp( )

• ΔΙΝΟΥΜΕ ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ −maxint ΣΤΟ valopt ΚΑΙ ΑΝΑΘΕΩΡΟΥΜΕ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΟΤΑΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΘΕΙ ΤΟ valdp ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΟ m

• <u>ΔΕΝ</u> ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΚΛΗΣΕΙΣ ΑΝ valopt ≠ maxint:

```
function valdpm (m: integer)
  if m<0 then valdpm ← -maxint
  else if m=0 then valdpm ← 0 else
  if valopt[m] ≠ -maxint then
        valdpm ← valopt[m] else
  { ΙΔΙΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΟΠΩΣ ΣΤΗΝ valdp
    ΑΠΟ ΤΟ begin{1} ΕΩΣ ΤΟ end{2}
   ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ: }
   valdpm ← temp
   valopt[m] ← temp        ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΗ ΤΗΣ valopt
   end {1, 0}
```

• Ο ΚΩΔΙΚΑΣ ΔΕΝ ΚΑΝΕΙ ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΚΛΗΣΕΙΣ ΑΛΛΑ ΑΠΑΙΤΕΙ ΜΕΓΑΛΗ ΜΝΗΜΗ ΣΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΟΥ ΤΟ ΟΡΙΣΜΑ m ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ!

• ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΜΗ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ.