21/1/03

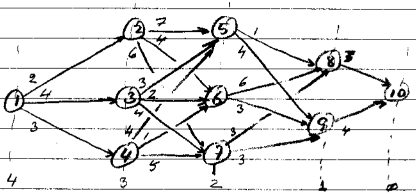
ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡ/ΣΜΟΣ

· ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΟΠΟΥ ΥΠΑΡΧΕΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΔΗΛΑΔΗ ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΥ ΕΞΕΛΙΣΣΕΤΑΙ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ

· ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΟ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΧΡΟΝΟ: ΤΑ ΚΕΡΔΗ ΚΑΘΕ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ (ΣΤΑΔΙΟΥ) ΑΘΡΟΙΖΟΝΤΑΙ

· ΙΣΤΟΡΙΚΑ: ΠΑΛΙΑ ΙΔΕΑ ΑΠΟ ΤΟΝ "ΛΟΓΙΣΜΟ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ" ΤΩΝ HAMILTON, JACOBI (~1850) ΑΛΛΑ ΚΑΙ ΤΟΥ Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ (~1930) Ο BELLMAN (~1950) ΑΝΑΔΙΑΤΥΠΩΣΕ ΤΙΣ ΑΡΧΕΣ ΑΥΤΕΣ ΣΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

· ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΜΗΧΙΣΤΗΣ) ΕΣΤΩ ΓΡΑΦΗΜΑ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΙ ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ ΣΕ ΣΤΑΔΙΑ ("ΧΡΟΝΙΚΕΣ" ΠΕΡΙΟΔΟΥΣ) ΟΠΩΣ ΤΟ ΠΑΡΑΚΑΤΩ:



ΕΠΙΠΕΔΑ → 4

· ΠΟΙΑ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΑΠΟ ΤΟ (1) ΣΤΟ (10) ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΕΙ ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΟΣΤΟΥΣ ΣΤΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ;

Π.Χ. Η ΔΙΑΔΡΟΜΗ $1 \xrightarrow{4} 3 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{6} 8 \xrightarrow{3} 10$ ΕΧΕΙ ΚΟΣΤΟΣ $4 + 2 + 6 + 3 = 15$ ΕΝΩ Η $1 \xrightarrow{3} 4 \xrightarrow{4} 5 \xrightarrow{1} 8 \xrightarrow{3} 10$ ΚΟΣΤΟΣ $3 + 4 + 1 + 3 = 11$

ΤΟ ΓΡΑΦΗΜΑ ΑΝΑΛΥΕΤΑΙ ΣΕ 5 ΕΠΙΠΕΔΑ (0-4) ΚΑΙ ΟΙ ΠΛΕΥΡΕΣ ΟΔΗΓΟΥΝ ΑΠΟ ΤΟ n ΣΤΟ $n-1$ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: ΕΣΤΩ $f_n(s)$ ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΔΥΝΑΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΟΜΒΟ s ΤΟΥ n ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΤΟΝ ΤΕΛΙΚΟ ΚΟΜΒΟ 10.

- ΔΙΕΡΕΥΝΟΥΜΕ ΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ f
- ΑΠΟ ΑΥΤΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΟΥΜΕ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ.

ΑΝΑΛΥΣΗ • ΕΣΤΩ ΑΠΟ ΤΟ s ΣΥΝΕΧΙΖΟΥΜΕ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΠΛΕΥΡΑ x_n ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΑΙΝΟΥΜΕ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ $T(x_n, s)$ ΠΟΥ ΑΝΗΚΕΙ ΒΕΒΑΙΑ ΣΤΟ $n-1$ ΕΠΙΠΕΔΟ.

- ΤΟ ΚΑΛΥΤΕΡΟ ΚΟΣΤΟΣ ΕΦΕΞΗΣ ΕΙΝΑΙ $f_{n-1}(T(x_n, s))$ ΑΠΟ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ f

- ΤΟ ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΔΡΟΜΗΣ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙ ΤΗΝ ΠΛΕΥΡΑ x_n ΚΑΙ ΤΙΣ ΚΑΛΥΤΕΡΕΣ ΕΦΕΞΗΣ ΕΙΝΑΙ

$$r(s, x_n) + f_{n-1}(T(x_n, s))$$

ΟΠΟΥ $r(s, x_n)$ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΤΗΣ ΠΛΕΥΡΑΣ

- ΟΜΩΣ Η ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΑΥΤΗ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΚΑΘΩΣ ΤΟ x_n ΕΙΝΑΙ ΑΥΘΑΙΡΕΤΟ ΚΑΙ ΑΡΑ

$$f_n(s) \le r(s, x_n) + f_{n-1}(T(x_n, s))$$

- ΑΛΛΑ ΑΦΟΥ Η ΣΧΕΣΗ ΙΣΧΥΕΙ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΠΛΕΥΡΑ

$$f_n(s) \le \min_{\substack{x_n:\text{ΠΛΕΥΡΕΣ}\\ \text{ΑΠΟ ΤΟ } s}} \left\{ r(s, x_n) + f_{n-1}(T(x_n, s)) \right\}$$

ΕΣΤΩ ΤΩΡΑ ΟΤΙ ΓΝΩΡΙΖΑΜΕ ΤΗΝ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΠΛΕΥΡΑ ΣΥΝΕΧΙΣΗΣ, x_n^* ΠΟΥ ΟΔΗΓΟΥΣΕ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ $T(x_n^*, s)$. ΠΡΟΦΑΝΩΣ Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΣΥΝΕΧΙΖΕΙ ΒΕΛΤΙΣΤΑ ΑΠΟ ΤΟ $T(x_n^*, s)$ (ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΔΕΝ ΘΑ ΗΤΑΝ ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗ)

· ΑΡΑ $$f_n(s) = r(s, x_n^*) + f_{n-1}(T(x_n^*, s))$$

ΠΟΥ ΟΜΩΣ ΕΙΝΑΙ <u>Μ. ΤΕΡΟ</u> ΑΠΟ ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΑΤΑ x_n ΔΗΛΑΔΗ

$$r(s, x_n^*) + f_{n-1}(T(x_n^*, s)) \geq \min_{x_n} \{ r(s, x_n) + f_{n-1}(T(x_n, s)) \}$$

ΟΠΟΤΕ ΕΧΟΥΜΕ ΑΠΟ ΤΙΣ ΔΥΟ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

$$\min_{x_n} \{ r(s, x_n) + f_{n-1}(T(x_n, s)) \} \leq f_n(s) \leq \min_{x_n} \{ r(s, x_n) + f_{n-1}(T(x_n, s)) \}$$

ΙΔΙΑ!

ΑΡΑ $$f_n(s) = \min_{x_n} \{ r(s, x_n) + f_{n-1}(T(x_n, s)) \}$$

— <u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΠ</u>

<u>ΠΩΣ ΛΥΝΟΥΜΕ ΤΗΝ ΔΠ;</u>

ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΑΝ ΞΕΡΟΥΜΕ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ $f_{n-1}(s)$ ΓΙΑ <u>ΟΛΑ</u> ΤΑ s ΣΤΟ $n-1$ ΕΠΙΠΕΔΟ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΤΟ ΔΕΞΙ ΣΚΕΛΟΣ ΓΙΑ ΚΑΘΕ x_n ΚΑΙ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΥ ΔΙΝΕΙ ΤΟ $f_n(s)$. ΑΡΑ ΑΝ ΞΕΡΟΥΜΕ ΤΟ f_0 ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΟ f_1, ΜΕΤΑ ΤΟ f_2 ΚΛΠ.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> · $f_0(10) = 0$ ΕΞ' ΟΡΙΣΜΟΥ

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ f_1(9) = \min\{4 + f_0(10)\} = 4 \\ &\cdot\ f_1(8) = \min\{3 + f_0(10)\} = 3 \end{aligned}\right\} \text{ΤΕΤΡΙΜΜΕΝΟ}$$

$$\cdot\ f_2(7) = \min\{3 + f_1(9)\ ;\ 3 + f_1(8)\}$$
$$= \min\{3+4\ ;\ 3+3\} = 6$$

$$\cdot\ f_2(6) = \min\{8 + f_1(8)\ ;\ 3 + f_1(9)\} = \min\{9\ ;\ 7\} = 7$$

$$\cdot\ f_2(5) = \min\{1 + f_1(8)\ ;\ 4 + f_1(9)\} = \min\{4\ ;\ 8\} = 4$$

$$\cdot\ f_3(4) = \min\{5 + f_2(7)\ ;\ 1 + f_2(6)\ ;\ 4 + f_2(5)\} =$$
$$= \min\{5+6\ ;\ 1+7\ ;\ 4+4\} = 8$$

$$\cdot\ f_3(3) = \min\{4 + f_2(7)\ ;\ 2 + f_2(6)\ ;\ 3 + f_2(5)\} =$$
$$= \min\{4+6\ ;\ 2+7\ ;\ 3+4\} = 7$$

$$f_3(2) = \min\{7 + f_2(5)\ ;\ 4 + f_2(6)\ ;\ 6 + f_2(7)\} = 11$$

$$\cdot\ f_4(1) = \min\{2 + f_3(2)\ ;\ 4 + f_3(3)\ ;\ 3 + f_3(4)\}$$
$$= \min\{2+11\ ;\ 4+7\ ;\ 3+8\} = 11$$

· ΑΡΑ Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΕΧΕΙ ΚΟΣΤΟΣ 11 !

<u>ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΗΝ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ (ΕΞ)</u>;

ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΑΝ

$$f_n(s) = r(s, x_n^*) + f_{n-1}(T(x_n^*, s))$$

Η ΠΛΕΥΡΑ x_n^* ΑΝΗΚΕΙ ΣΤΗΝ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> ΑΠΟ ΤΟ 1 ΕΙΝΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΟΙ ΠΛΕΥΡΕΣ (1,3) <u>ΚΑΙ</u> (1,4).

(Α)· ΑΠΟ ΤΟ 3 Η ΠΛΕΥΡΑ (3,5) ΕΙΝΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΑΠΟ ΤΟ 5 Η (5,8) ΚΑΙ ΑΠΟ ΤΟ 8 Η (8,10).
$\Rightarrow$ Η ΔΙΑΔΡΟΜΗ $1 \to 3 \to 5 \to 8 \to 10$ ΕΧΕΙ ΚΟΣΤΟΣ $4+3+1+3 = 11$

(Β). ΑΠΟ ΤΟ 4, Η ΠΛΕΥΡΑ (4,6) ΑΛΛΑ ΚΑΙ Η (4,5) ΕΙΝΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΗ. Η ~~ΑΠ~~ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΑΠΟ ΤΟ 5 ΕΙΝΑΙ $1 - 4 - 5 - 8 - 10$
ΕΝΩ ΑΠΟ ΤΟ 6 ΕΙΝΑΙ $1 - 4 - 6 - 9 - 10$
ΜΕ ΚΟΣΤΟΣ $3+1+3+4 = 11$

· ΣΕ ΕΝΑ ΓΕΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ <u>ΧΩΡΙΣ</u> ΕΠΙΠΕΔΑ $G = (V, E)$ ΜΕ
- V: ΚΟΡΥΦΕΣ : $\{v_1, \ldots, v_n\}$
- E: ΠΛΕΥΡΕΣ ΜΕ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ : ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΖΕΥΓΗ $\subseteq V \times V$

ΚΑΙ ΚΟΣΤΟΣ ΤΗΣ ΠΛΕΥΡΑΣ (v_i, v_j) ΝΑ ΔΙΝΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $d(v_i, v_j)$

· <u>ΠΩΣ ΓΡΑΦΟΥΜΕ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΠ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΔΙΑΔΡΟΜΗΣ ΑΠΟ ΤΗΝ v_k ΣΤΗΝ v_e ;</u>

· ΕΣΤΩ $f(v)$ ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΑΠΟ v ΣΤΗΝ v_e
<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> ΧΩΡΙΣ ΕΠΙΠΕΔΑ!

· Η ΓΕΝΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ΕΙΝΑΙ

$$f(v) = \min_{w \in V} \{ d(v,w) + f(w) \}$$

· $f(v_e) = 0$ ΑΝ $d \geq 0$

- <u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: ΑΦΟΥ <u>ΔΕΝ</u> ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΕΠΙΠΕΔΑ Ο ΤΡΟΠΟΣ ΛΥΣΗΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΦΑΝΗΣ
- <u>ΟΜΩΣ</u> Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΠ ΕΙΝΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ! ΟΜΩΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΠΑΝΤΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗ Η ΑΝΑΓΩΓΗ ΑΥΤΗ ΛΟΓΩ ΠΟΛΛΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ.
- ΣΕ ΕΝΑ <u>ΑΚΥΚΛΙΚΟ</u> ΓΡΑΦΗΜΑ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΠΑΝΤΑ ΝΑ "ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΟΥΜΕ" ΕΠΙΠΕΔΑ
- ΑΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΚΥΚΛΟΙ ΕΝΑΣ ΕΜΜΕΣΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΛΥΣΗΣ ΔΙΝΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ DIJKSTRA, ΑΝ $d \geq 0$
- ΣΕ ΑΥΘΑΙΡΕΤΟ ΓΡΑΦΗΜΑ (ΟΧΙ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΑ $d \geq 0$) Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΛΥΝΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ BELLMAN-FORD ΚΑΙ FLOYD-WARSHALL. Η ΠΡΩΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΧΕΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΚΕΤΩΝ ΣΕ ΔΙΚΤΥΑ.

<u>ΑΛΛΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΠΟΡΩΝ</u>

- ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΚΑΤΑΝΕΙΜΟΥΜΕ ΕΝΑ ΠΟΡΟ (ΑΓΑΘΟ, ΑΛΛΑ ΚΑΙ ΕΡΓΑΤΕΣ Ή ΕΡΓΑΤΟ-ΩΡΕΣ) ΣΕ N ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΔΕΙΚΤΗ $j=1,..,N$. ΚΑΘΕΜΙΑ ΕΧΕΙ ΟΦΕΛΟΣ $f_j(x_j)$ ΟΠΟΥ x_j Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΠΟΡΟΥ ΣΕ ΑΥΤΗ, ΚΑΙ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ ΤΟ ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΟΦΕΛΟΣ:

$$\max \sum_{j=1}^{N} f_j(x_j)$$

ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ $\sum_{j=1}^{N} x_j \leq \bar{X}$

ΟΠΟΥ $\bar{X}$ Η ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΙΜΟΤΗΤΑ ΠΟΡΟΥ

Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΛΥΘΕΙ ΜΕ KUHN-TUCKER ΑΝ ΤΑ x_j ΘΕΩΡΗΘΟΥΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ. ΑΝ ΟΜΩΣ ΤΑ x_j ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΠΑΡΟΥΝ ΜΟΝΟ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΤΙΜΕΣ (Π.Χ. ΑΚΕΡΑΙΕΣ) ΤΕΤΟΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΕΦΙΚΤΗ.

ΑΝΑΛΥΣΗ KUHN-TUCKER ΕΣΤΩ ΟΤΙ $df_j/dx_j > 0 \ \forall j$ ΔΗΛΑΔΗ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΙ ΠΟΡΟΙ ΑΥΞΑΝΟΥΝ ΤΟ ΚΕΡΔΟΣ. ΤΟΤΕ $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N} f_j(x_j) + \lambda(\bar{X} - \sum_{j=1}^{N} x_j)$ ΚΑΙ $\partial\mathcal{L}/\partial x_j = 0$ ΟΠΟΤΕ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ $\frac{df_j(x_j)}{dx_j} = \lambda \ \forall j$, ΑΡΑ $\lambda > 0$ ΚΑΙ ΑΡΑ $\sum_{j=1}^{N} x_j = \bar{X}$ (Ο ΠΟΡΟΣ ΕΞΑΝΤΛΕΙΤΑΙ!) Η ΣΥΝΘΗΚΗ df_j/dx_j = ΣΤΑΘΕΡΟ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΟΤΙ ΣΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΤΑ ΟΡΙΑΚΑ ΚΕΡΔΗ ΕΙΝΑΙ ΟΛΑ ΙΣΑ, ΠΡΑΓΜΑ ΕΥΛΟΓΟ! Η ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΓΙΝΕΙ ΕΥΚΟΛΑ ΜΕ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ λ.

ΓΙΑ ΝΑ ΛΥΣΟΥΜΕ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΤΑ ΣΤΑΔΙΑ, ΔΗΛΑΔΗ ΜΕ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡ/ΣΜΟ ΚΑΝΟΥΜΕ ΤΗΝ ΕΞΗΣ ΣΚΕΨΗ: ΕΣΤΩ J ΚΑΠΟΙΟ ΣΥΝΟΛΟ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ $J \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ ΚΑΙ ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΕΝΑ ΜΑΝΤΕΙΟ ΜΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΕΙ ΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΚΕΡΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ $\bar{X}$ ΣΤΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ. ΣΥΜΒΟΛΙΖΟΥΜΕ ΤΟ ΚΕΡΔΟΣ ΑΥΤΟ ΜΕ $F_J(\bar{X})$. ΕΣΤΩ ΤΩΡΑ ΑΛΛΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ $j \notin J$. ΠΟΙΑ Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΤΟ j ΚΑΙ ΤΑ J;

ΣΚΕΨΗ:

ΑΝ ΔΙΑΤΕΘΟΥΝ y ΜΟΝΑΔΕΣ ΣΤΟ j ΑΠΟΜΕΝΟΥΝ $\bar{X} - y$ ΜΟΝΑΔΕΣ ΓΙΑ ΤΑ J. ΑΡΑ ΤΟ ΟΦΕΛΟΣ ΑΠΟ ΚΑΤΑΝΟΜΗ y ΣΤΟ j ΚΑΙ

X−y ΣΤΙΣ ΥΠΟΛΟΙΠΕΣ ΤΟ ΟΦΕΛΟΣ ΕΙΝΑΙ:

$$f_j(y) + F_J(\bar{X} - y)$$

· ΑΝ ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΚΕΡΔΟΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΣΤΟ $j \cup J$ ΕΙΝΑΙ $F_{j \cup J}(\bar{X})$ ΕΙΝΑΙ ΕΞ' ΟΡΙΣΜΟΥ

$$F_{j \cup J}(\bar{X}) \geq f_j(y) + F_J(X - y)$$

ΚΑΙ ΜΕ ΤΑ ΙΔΙΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΑ Δ.Π. ΕΧΟΥΜΕ-

$$F_{j \cup J}(\bar{X}) = \max_{0 \leq y \leq X} \left\{ f_j(y) + F_J(\bar{X} - y) \right\}$$

Η ΣΧΕΣΗ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΛΥΘΕΙ ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ΟΤΙ $F_{\{j\}}(X) = f_j(X)$ ΚΑΘΩΣ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΠΙΛΟΓΗ. ΑΠΟ ΤΟ $F_{\{j\}}$ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΟ $F_{\{j,i\}}$, ΜΕΤΑ ΤΟ $F_{\{j,i,k\}}$ ΚΛΠ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

ΒΛΕΠΕ ΠΑΡΑΔ. 2 ΕΔΑΦΙΟ 3.5 ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΟΣ (ΜΗΛΙΩΤΗΣ)

ΑΛΛΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

· ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ.

· ΓΝΩΣΤΗ ΖΗΤΗΣΗ ΧΩΡΙΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ $d_1, d_2, \dots, d_n$

· ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ t x_t ΕΩΣ a, ΔΗΛΑΔΗ $0 \leq x_t \leq a$

· ΑΠΟΘΕΜΑ ΧΡΟΝΟΥ t, S_t ΕΙΝΑΙ

$$S_{t+1} = S_t - d_t + x_t$$

· ΑΝ Η ΑΠΟΘΗΚΗ ΕΧΕΙ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ b, ΠΡΕΠΕΙ

$$0 \le S_t \le b \quad \forall t.$$

· ΚΟΣΤΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ: ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $C(x_t)$

· ΔΕΝ ΑΛΛΑΖΕΙ ΧΡΟΝΙΚΑ, ΔΕΝ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΑΛΛΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

· ΚΟΣΤΟΣ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ: ΑΝΑΛΟΓΟ ΤΗΣ ΑΠΟΘΗΚΕΥΜΕΝΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ.

· ΠΩΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ; ΘΕΛΟΥΜΕ ΜΕΓΑΛΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΟΙΚΟΝΟΜΙΕΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΑΛΛΑ ΔΕΝ ΘΕΛΟΥΜΕ ΜΕΓΑΛΑ ΑΠΟΘΕΜΑΤΑ!

· ΔΥΝΑΜ. ΠΡΟΓ/ΣΜΟΣ: ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΔΗΛΑΔΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΟΣΤΟΥΣ ΠΕΡΙΟΔΩΝ

· ΕΣΤΩ $f_t(s)$ ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΟΤΑΝ ΒΡΙΣΚΟΜΑΣΤΕ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ t ΜΕ ΑΠΟΘΕΜΑ s ΣΤΗΝ ΑΠΟΘΗΚΗ.

· ΑΝ ΠΑΡΑΧΘΕΙ ΠΟΣΟΤΗΤΑ x ΜΕ $s + x \ge d_t$, $0 \le x \le a$ ΚΑΙ $s + x - d_t \le b$ ΕΧΟΥΜΕ

- ΚΟΣΤΟΣ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ $k[s + x - d_t]$
- ΚΟΣΤΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ $C(x)$
- ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΑΠΟΘΗΚΗΣ ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ $t+1$: $s + x - d_t$

· ΑΝ ΑΠΟ ΤΟ $t+1$ ΚΑΙ ΕΦΕΞΗΣ ΠΑΡΑΓΑΓΟΥΜΕ ΒΕΛΤΙΣΤΑ ΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΕΞ' ΟΡΙΣΜΟΥ ΕΙΝΑΙ
$f_{t+1}(s+x-d_t)$

ΑΡΑ $f_t(s) \le c(x) + k(s+x-d_t) + f_{t+1}(s+x-d_t)$

ΚΑΙ ΜΕ ΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΤΟΥ Δ.Π. ΕΙΝΑΙ

$$f_t(s) = \min_{\substack{0 \le x \le a \\ 0 \le s+x-d_t \le b}} \left[c(x) + k(s+x-d_t) + f_{t+1}(s+x-d_t) \right]$$

· ΑΝ Ο ΤΕΛΙΚΟΣ ΟΡΙΖΩΝ ΕΙΝΑΙ T, ΤΟ $f_T(s)$ ΕΙΝΑΙ ΓΝΩΣΤΟ ΚΑΙ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ

$$f_T(s) = \begin{cases} 0 & \text{ΑΝ } s \ge d_T \\ e(d_T - s) & \text{ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ.} \end{cases}$$

· ΣΤΟ <u>ΒΙΒΛΙΟ</u> Η ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΙΝΕΤΑΙ ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΤΟ $f_n(s)$ ΩΣ ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΟΡΙΖΟΝΤΑ n ΠΕΡΙΟΔΩΝ.

· ΕΠΑΝΑΔΙΑΜΟΡΦΩΣΤΕ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΠ ΣΕ ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

· ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΤΕ ΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΣΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ WAGNER WHITIN

ΑΝ ΣΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΕΙΝΑΙ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

$$C(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ k + \pi x & x > 0 \end{cases}$$

ΤΟΤΕ Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΙΝΕΤΑΙ ΠΙΟ ΕΥΚΟΛΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ Δ.Π. ΤΗΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ! ΜΕ ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΠΑΡΑΓΕΙ ΜΟΝΟ ΟΤΑΝ ΤΟ ΑΠΟΘΕΜΑ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝΙΚΟ!

[ΚΑΤΙ ΤΕΤΟΙΟ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΟΙΚΟΝΟΜΙΕΣ ΚΛΙΜΑΚΟΣ - ΓΙΑΤΙ;]

ΔΙΟΤΙ ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΕΙΧΑΜΕ $x_t > 0$ ΚΑΙ ΕΠΙΣΗΣ $x_{t+\tau} > 0$ ΚΑΙ $S_{t+\tau} > 0$. ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΕΞΕΤΑΖΑΜΕ ΜΙΑ ΑΛΛΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΠΟΥ ΘΑ ΜΕΙΩΝΕ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΣΤΟ t ΚΑΤΑ $\bar{x} = \min\{x_t, S_{t+\tau}\}$ ΚΑΙ ΑΥΞΑΝΕ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΣΤΟ $t+\tau$ ΠΑΛΙ ΚΑΤΑ $\bar{x}$. Η ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΑΥΤΗ ΘΑ ΕΙΧΕ ΙΔΙΟ ΚΟΣΤΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ (ΓΙΑΤΙ; ΠΩΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΤΑΙ Η ΠΑΡΑΔΟΧΗ ΓΙΑ ΤΗΝ $C(x)$;) ΑΛΛΑ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ ΚΟΣΤΟΣ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ. ΑΡΑ ΜΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΔΕΝ ΠΑΡΑΓΕΙ (ΠΑΡΑΓΓΕΛΝΕΙ...) ΠΑΡΑ ΜΟΝΟ ΑΝ $S_t = 0$.

- ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΝΟΥΜΕ ΤΟ ΕΞΗΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ.Π.:

· ΕΣΤΩ ΧΡΟΝΙΚΟΣ ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ $t = 1, 2, \dots, T$

· ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΖΗΤΗΣΗ d_t ΧΩΡΙΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ

· ΠΑΛΙ $C(x) = K + \pi x$ ΑΝ $x > 0$

· ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΚΟΣΤΟΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΣ (ΑΝΑ ΠΕΡΙΟΔΟ) ΙΣΟ ΜΕ h

· ΟΡΙΖΟΥΜΕ ΩΣ F_t ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΑΠΟ t ΕΩΣ T ΘΕΩΡΩΝΤΑΣ ΟΤΙ ΣΤΟ t ΤΟ ΑΠΟΘΕΜΑ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝΙΚΟ.

· ΟΙ ΕΥΛΟΓΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΣΤΟ t ΑΦΟΡΟΥΝ ΤΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥΣ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΤΗΝ ΖΗΤΗΣΗ ΘΑ ΚΑΛΥΨΟΥΜΕ ΑΠΟ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΣΤΟ t.

Π.Χ. ΑΝ ΚΑΛΥΨΟΥΜΕ ΑΠΟ t ΕΩΣ $t+\tau$ ΘΑ ΠΑΡΑΓΑΓΟΥΜΕ $d_t + d_{t+1} + \dots + d_{t+\tau}$ ΚΑΙ ΘΑ ΕΧΟΥΜΕ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΑΠΟΘΕΜΑ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ $t+\tau+1$

· ΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΣ ΑΠΟ t ΕΩΣ $t+\tau$ ΘΑ ΕΙΝΑΙ $h\left[1 \cdot d_{t+1} + 2 \cdot d_{t+2} + \dots + k d_{t+k} + \dots + \tau d_{t+\tau}\right]$

ΓΙΑΤΙ; Η ΠΟΣΟΤΗΤΑ d_{t+1} ΜΕΝΕΙ ΣΤΗΝ ΑΠΟΘΗΚΗ ΜΙΑ ΠΕΡΙΟΔΟ, Η d_{t+2} 2 ΠΕΡΙΟΔΟΥΣ ΚΛΠ

· ΕΠΟΜΕΝΩΣ ΕΙΝΑΙ

$$C_t \le K + \pi(d_t + d_{t+1} + \dots + d_{t+\tau}) + h(d_{t+1} + 2d_{t+2} + \dots + \tau d_{t+\tau})$$

$$+ C_{t+\tau+1}$$

Η ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ Δ.Π.

$$\cdot\ C_t = \min_{\substack{0 \le \tau \\ t+\tau \le T}} \left\{ K + \pi(d_t + \dots + d_{t+\tau}) + h(d_{t+1} + \dots + \tau d_{t+\tau}) + C_{t+\tau+1} \right\}$$

· ΕΙΝΑΙ $C_{T+1} = 0 \qquad C_T = K + \pi d_T$

ΑΡΑ Η ΣΧΕΣΗ ΔΠ ΛΥΝΕΤΑΙ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ

• ΓΙΑΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΥΤΗ ΚΑΛΥΤΕΡΗ (ΑΠΟ ΠΛΕΥΡΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ) ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗ; ΠΑΡΑΤΗΡΕΙΣΤΕ ΟΤΙ Η ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗ ΑΝΑΖΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ $f_t(s)$ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΘΟΥΝ ΓΙΑ ΚΑΘΕ t, s ΕΝΩ ΕΔΩ Η ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΟ ΑΠΟ ΤΟ t.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (HILLIER LIEBERMAN)

· ΕΣΤΩ $h = 0{,}2 \quad K = 2 \quad \pi = 1$

$d_1 = 3 \quad d_2 = 2 \quad d_3 = 3 \quad d_4 = 2$

· ΕΙΝΑΙ $C_5 = 0 \quad C_4 = 2 + 1 \cdot 2 = 4$

$$C_3 = \min_{\tau=0,1} \{ \underbrace{2 + 1\cdot 3 + C_4}_{\tau=0},\ \underbrace{2 + 1\cdot 5 + 0{,}2\cdot 2 + C_5}_{\tau=1} \} = 7{,}4$$

$$C_2 = \min_{\tau=0,1,2} \{ \underbrace{2 + 1\cdot 2 + C_3}_{\tau=0};\ \underbrace{2 + 1\cdot 5 + 0.2\cdot 3 + C_4}_{\tau=1};\ 2 + 7 + C_5 + 0{,}2(3 + 2\cdot 2) \}$$
$$= \min\{4 + 7{,}4;\ 7 + 0{,}6 + 4;\ 9 + 1{,}4\} = 10{,}4$$

$$C_1 = \min_{\tau=0,1,2,3} \{ \underbrace{\overset{5+10{,}4}{5 + C_2}}_{\tau=0};\ \underbrace{\overset{7{,}4+7{,}4}{7 + C_3 + 0.2\cdot 2}}_{\tau=1};\ \underbrace{\overset{11{,}6+4}{2 + 8 + C_4 + 0{,}2\cdot 8}}_{\tau=2};\ \underbrace{\overset{14{,}8}{12 + C_5 + 0{,}2\cdot 14}}_{\tau=3} \}$$
$$= 14{,}8$$

. ΒΛΕΠΟΥΜΕ ΟΤΙ ΥΠΑΡΧΟΥΝ <u>ΔΥΟ</u> ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

(α) ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ ΜΕ ΚΟΣΤΟΣ 12. ΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ΕΙΝΑΙ $0,2\,[1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2] = 0,2\cdot 14 = 2,8$ ΜΕ ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ 14,8

(β) ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ 1 ΚΑΙ ΤΗΝ 3 (ΧΡΕΩΝΟΜΑΣΤΕ 2 ΠΑΓΙΑ!). ΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΕΙΝΑΙ

$$[7 + 0,2\cdot 2] + [7 + 0,2\cdot 2] = 14,8$$

. ΛΥΣΤΕ ΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΞΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ

(α) d_1, d_2, d_3, d_4 ΟΠΩΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΣ ΑΛΛΑ $h = 0,3$

(β) ΟΠΩΣ ΣΤΟ (α) ΜΕ $h = 0,15$

(γ) $d_1 = 4 \quad d_2 = 3 \quad d_3 = 2 \quad d_4 = 3 \quad d_5 = 2$

$h = 2 \quad k = 2 \quad \pi = 1$

(δ) ΑΝ ΤΟ π ΜΕΤΑΒΛΗΘΕΙ, ΘΑ ΜΕΤΑΒΛΗΘΕΙ Η ΛΥΣΗ;

<u>ΔΥΣΚΟΛΟ:</u> ΜΠΟΡΕΙΤΕ ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΞΕΤΕ ΟΤΙ ΤΟ π <u>ΔΕΝ</u> ΠΑΙΖΕΙ ΡΟΛΟ;

ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑ ΜΕ ΑΒΕΒΑΙΗ ΖΗΤΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ "ΟΠΩΡΟΠΩΛΕΙΟΥ" - HILLIER-LIEBERMAN 17.4.

- ΣΤΑΤΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ → ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΑΠΑΙΤΕΙ ΔΥΝ. ΠΡΟΓ/ΣΜΟ!
- ΖΗΤΗΣΗ ΑΒΕΒΑΙΗ ΜΙΑΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ
- ΚΟΣΤΟΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ
- ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΑΠΟΘΗΚΗΣ ΕΧΕΙ ΚΟΣΤΟΣ Ή ΑΞΙΑ
  (ΥΠΟΛΕΙΜΑΤΙΚΗ ΑΞΙΑ - ΚΟΣΤΟΣ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ)
- ΜΗ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΘΕΙΣΑ ΖΗΤΗΣΗ ΕΧΕΙ ΚΟΣΤΟΣ

- ΖΗΤΗΣΗ: ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ D, ΓΝΩΣΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ $P(a \le D \le a+\Delta a) \simeq f(a)\Delta a$

  ΤΟΤΕ $\int_0^\infty f(x)dx = 1$ $\quad E(D) = \int_0^\infty x f(x)dx$

- ΑΝ ΠΑΡΑΓΓΕΛΘΕΙ ΠΟΣΟΤΗΤΑ y ΟΙ ΠΩΛΗΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ $\min\{D,y\} = \begin{cases} D & \text{αν } D \le y \\ y & \text{αν } D \ge y \end{cases}$

- Η ΜΗ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΘ. ΖΗΤΗΣΗ ΕΙΝΑΙ

  $$\max\{0, D-y\} = \begin{cases} 0 & D \le y \\ D-y & D \ge y \end{cases}$$

- ΤΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΑΠΟΘΗΚΗΣ ΕΙΝΑΙ

  $$\max\{0, y-D\} = \begin{cases} y-D & D \le y \\ 0 & D \ge y \end{cases}$$

- ΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ ΕΙΝΑΙ cy

- ΤΟ ΚΕΡΔΟΣ ΑΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΘΕΙ ΖΗΤΗΣΗ D ΕΙΝΑΙ

$$P(D,y) = \underbrace{p\min\{D,y\}}_{\text{έσοδα, τιμής πώλησης } p} - \underbrace{cy}_{\text{έξοδα παραγγελίας}} - \underbrace{u\max\{0,D-y\}}_{\text{κόστος μη ικαν. ζήτησης}} - \underbrace{h\max\{0,y-D\}}_{\text{κόστος αποθήκευσης}}$$

Η ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΕΙΝΑΙ

$$E\{P(D,y)\} = -cy + p\Big\{ \underbrace{\int_0^y x f(x)dx}_{\substack{\text{Αν } D\le y \\ \text{πουλάμε } D}} + \underbrace{\int_y^\infty y f(x)dx}_{\substack{\text{Αν } D\ge y \\ \text{πουλάμε } y}} \Big\}$$

$$- \mu \Big\{ \underbrace{\int_0^y 0\cdot f(x)dx}_{\substack{\text{Δεν υπάρχει} \\ \text{έλλειψη}}} + \underbrace{\int_y^\infty (x-y) f(x)dx}_{\substack{\text{Αν } D\ge y \text{ υπάρχει} \\ \text{έλλειψη } D-y}} \Big\} -$$

$$- h \Big\{ \underbrace{\int_0^y (y-x) f(x)dx}_{\text{Υπόλοιπο αν } D\le y} + \underbrace{\int_y^\infty 0\cdot f(x)dx}_{\substack{\text{Δεν υπάρχει} \\ \text{υπόλοιπο}}} \Big\}$$

$$= -cy + p\int_0^y x f(x)dx + py\int_y^\infty f(x)dx$$

$$- \mu\int_y^\infty (x-y) f(x)dx - h\int_0^y (y-x) f(x)dx$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τον όρο $p\int_y^\infty x f(x)dx$ έχουμε

$$E\{P(D,y)\} = -cy + pE(D) - (p+\mu)\int_y^\infty (x-y) f(x)dx - h\int_0^y (y-x) f(x)dx$$

<u>Παράδειγμα</u> Έστω D ομοιόμορφη στο $[50,100]$ οπότε $f = 1/50$. Έστω $p=4$ $c=3$ $\mu=0,5$ $h=0$

Αν $y = 70$

$$E\{P(D,70)\} = -3\cdot 70 + 4\cdot \underbrace{75}_{E(D)} - 4.5\int_{70}^{100} \frac{x-70}{50}dx$$

$$= -210 + 300 - \frac{4.5}{50}\cdot\frac{900}{2} = 40{,}5$$

· ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ y ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΩΣ ΕΞΗΣ
ΕΣΤΩ $G(y) = E\{P(D,y)\}$. ΤΟΤΕ

$$\frac{dG(y)}{dy} = -c + (p+m)\int_y^{\infty} f(x)\,dx - h\int_0^{y} f(x)\,dx$$

ΚΑΙ ΓΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΠΡΕΠΕΙ $\frac{dG(y^*)}{dy} = 0$

ΘΕΤΟΝΤΑΣ $F_D(y) = \int_0^{y} f(x)\,dx = P(D \leq y)$
Η $dG/dy = 0$ ΓΡΑΦΕΤΑΙ

$$-c + (p+m)(1 - F_D(y^*)) - h\,F_D(y^*) = 0$$

ή $$F_D(y^*) = \frac{p+m-c}{p+m+h}$$

<u>Παράδειγμα</u> Στο προηγούμενο $p+m = 4,5$ $c = 3$
$h = 0$ οπότε $F_D(y^*) = \frac{4,5-3}{4,5} = \frac{1,5}{4,5} = 1/3$

άρα $y^* = 50 + 50/3 = 200/3 = 66,7$

Το αναμενόμενο κέρδος είναι

$$E\{P(D, 66,7)\} = -3 \cdot 66,7 + 4 \cdot 75 - 4,5\int_{66,7}^{100} \frac{x - 66,7}{50}\,dx$$

$$= -200 + 300 - 4,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50}\left(\frac{100}{3}\right)^2$$

$$= 50$$

ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΚΑΛΥΤΕΡΟ ΑΠΟ Ο,ΤΙ ΜΕ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑ $y = 70$
(ΚΕΡΔΟΣ 40,5)

ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ $[\underline{s}, \bar{s}]$ - ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΕΣ ΜΕ ΠΑΓΙΟ ΚΑΙ ΑΒΕΒΑΙΑ ΖΗΤΗΣΗ

· ΚΟΣΤΟΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ y $\quad C(y) = \begin{cases} K + cy & y > 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$

· ΑΡΧΙΚΟ ΑΠΟΘΕΜΑ y_0 $\rightarrow$ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑ ΕΧΟΥΜΕ $z = y + y_0$ ΑΠΟΘΕΜΑ

· ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟ ΚΕΡΔΟΣ

$$\begin{cases} pE(D) - (p+m)\int_z^{\infty}(x-z)f\,dx - h\int_0^z (z-x)f\,dx - cz + cy_0 & \cdot \text{ ΑΝ } y=0 \cdot \text{ ΜΕ } z = y_0 \\ pE(D) - (p+m)\int_z^{\infty}(x-z)f\,dx - h\int_0^z (z-x)f\,dx - cz + cy_0 - K & \cdot \text{ ΑΝ } y>0 \cdot \text{ ΜΕ } z = y_0 + y \end{cases}$$

· ΘΕΤΟΥΜΕ $L(z) = (p+m)\int_z^{\infty}(x-z)f\,dx + h\int_0^z (z-x)f\,dx + cz$

ΟΠΟΤΕ ΤΟ ΑΝΑΜ. ΚΕΡΔΟΣ ΕΙΝΑΙ

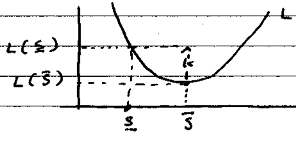
$$\begin{cases} -L(y_0) + pE(D) + cy_0 & y = 0, \\ -L(z) + pE(D) + c(y_0) - K & z > y_0 \end{cases}$$

· ΑΡΑ ΑΝ ΔΕΝ ΠΑΡΑΓΓΕΛΝΟΥΜΕ ΤΟ ΚΟΣΤΟΣ (ΕΚΤΟΣ ΣΤΑΘΕΡΩΝ) ΕΙΝΑΙ $L(y_0)$ ΕΝΩ ΑΝ ΠΑΡΑΓΓΕΛΝΟΥΜΕ ΕΙΝΑΙ $L(z) + K$ $\quad (z = y_0 + y)$

· ΕΣΤΩ $\bar{s}$ ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΤΗΣ L, $L(\bar{s}) = \min_z L(z)$

· ΕΣΤΩ $\underline{s}$ ΤΕΤΟΙΟ ΩΣΤΕ $L(\underline{s}) = L(\bar{s}) + K$

· ΒΛΕΠΕ ΣΧΗΜΑ ΓΙΑ ΕΥΛΟΓΗ (ΚΥΡΤΗ) L



. ΕΙΝΑΙ $L(y_0) > L(\underline{s}) = k + L(\bar{S})$ ΓΙΑ $y_0 < \underline{s}$
. ΕΙΝΑΙ $L(y_0) < L(z) + k$ ΓΙΑ $y_0 > \underline{s}$ ΚΑΙ $z \geq y$
ΕΚ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ !

. ΑΡΑ Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ
. ΑΝ ΤΟ ΤΡΕΧΟΝ ΑΠΟΘΕΜΑ y_0
ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ ΤΟΥ $\underline{s}$
ΠΑΡΑΓΓΕΙΛΕ $\bar{S} - y_0$
. ΑΝ ΤΟ y_0 ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ
ΤΟΥ $\underline{s}$ ΔΕΝ ΠΑΡΑΓΓΕΛΝΕΙΣ

. Η ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΑΥΤΗ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΥΛΟΠΟΙΗΘΕΙ ΣΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΣ ΟΠΟΥ ΚΟΙΤΑΜΕ ΤΟ ΥΨΟΣ ΤΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΣ Π.Χ. ΑΝΑ ΜΗΝΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΡΧΗ $\underline{s}, \bar{S}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ $p = 4$ $c = 3$
$h = 0$ $m = 0{,}5$ ΚΑΙ

$$L(z) = 4{,}5 \int_z^{100} (x - z)\frac{dx}{50} + 3z$$

$$= 0{,}045(100 - z)^2 + 3z$$

ΑΡΑ $\frac{dL}{dz}(\bar{S}) = 0$ ΚΑΙ ΑΡΑ $-2 \cdot 0{,}045(100 - \bar{S}) + 3 = 0$
ΑΡΑ $\bar{S} = 2/3 \cdot 100$ (ΟΠΩΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΣ)
ΚΑΙ $L(\frac{2}{3}100) = 0{,}045(100 - 100 \cdot 2/3)^2 + 3\,\frac{200}{3}$
$= 250$

. ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΠΑΓΙΟ $K = 10$ ΘΑ ΕΙΝΑΙ
$L(\underline{s}) = L(\bar{S}) + 10 = 260$
Ή $0{,}045(100 - \underline{s})^2 + 3\underline{s} = 260$
ΚΑΙ ΛΥΝΟΝΤΑΣ ΕΧΟΥΜΕ $\underline{s} = 51{,}76$

ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΤΕ ΟΤΙ ΓΙΑ $K = 5$ ΕΙΝΑΙ $\underline{s} = 56{,}125$
ΜΕ $\bar{S} = 66{,}667$. ΛΥΣΤΕ ΓΙΑ $h = 2$.