Διαμόρφωση προβλημάτων βελτιστοποίησης

I Γραμμικές Διαμορφώσεις

Δεδομένου ότι οι αλγόριθμοι γραμμικής βελτιστοποίησης είναι πολύ αποτελεσματικοί, προσπαθούμε να διαμορφώνουμε πρακτικά προβλήματα με γραμμικό τρόπο:

1. Το πρόβλημα της παραγωγής

Εξετάζουμε τις ποσότητες που θα παράγουμε από $j=1,2,..,n$ προϊόντα. Η ποσότητα του j προϊόντος συμβολίζεται με x_j που μπορεί να πάρει ρητές τιμές (σε ορισμένα προβλήματα το x_j παίρνει μόνο ακέραιες τιμές). Αν c_j το ανά μονάδα έσοδο που δεν μεταβάλλεται με την ποσότητα που παράγεται, το συνολικό έσοδο είναι $\sum_{j=1} c_j x_j$. Έστω ότι η παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος j χρειάζεται a_{ij} μονάδες του συντελεστή παραγωγής $i=1,2,..,m$, και ότι είναι διαθέσιμες ποσότητες b_i των συντελεστών παραγωγής. Ας θεωρήσουμε ότι επιτρέπεται μόνο θετική παραγωγή, δηλαδή $x_j \geq 0$. Επιπλέον ας θεωρήσουμε ότι οι ποσότητες των συντελεστών παραγωγής έχουν ήδη αγοραστεί και άρα το κόστος αυτό δεν θα επηρεάσει από τις αποφάσεις για το x_j. Τότε η "βέλτιστη" παραγωγή επιτυγχάνεται λύνοντας το πρόβλημα

$$\max_{x_1,\dots,x_n \text{ υπό:}} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i=1,\dots,m$$

$$x_j \geq 0$$

Αρχικές τιμές των x_j έχουν νόημα αν θεωρήσουμε ότι αν αγοράσουμε 1 μονάδα του προϊόντος j και μπορούμε να την "αποσυνδέσουμε" χωρίς απώλειες θα πάρουμε a_{ij} μονάδες του συντελεστή i. Η διαδικασία αυτή μπορεί νά είναι συμφέρουσα! Πως θα διαμορφώναμε το πρόβλημα όταν αποσυνδέοντας μια μονάδα του j παίρνουμε ποσότητες a'_{ij} (με $a'_{ij} < a_{ij}$ ...) των συντελεστών παραγωγής i.

Έστω τώρα ότι είναι δυνατόν να αγορασθούν επιπλέον ποσότητες του συντελεστή i, έστω $y_i \geq 0$, με επιπλέον κόστος b_i. Τότε το πρόβλημα μετατρέπεται ως εξής

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y_i \leq b_i \qquad i=1,\ldots,m$$

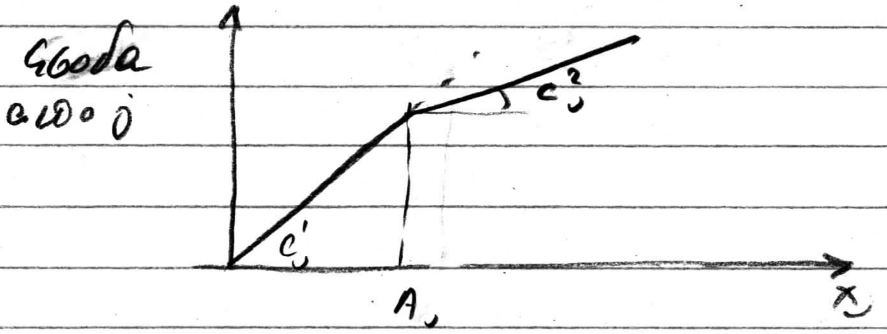
$$x_j, y_i \geq 0$$

Για μεγάλες τιμές των παραμέτρων τα προβλήματα τύπου (2) συχνά απειρίζονται. Μπορείτε να σκεφτείτε για ποιό λόγο; Συνήθως όμως οι μεταβλητές έχουν άνω φράγματα, δηλαδή έχουμε τους επιπλέον περιορισμούς

$$x_j \leq x_j^{max} \qquad y_i \leq y_i^{max}$$

οπότε τά προβλήματα έχουν πεπερασμένες λύσεις

Πολλές φορές είναι απαραίτητο να κάνουμε εκπτώσεις στις τιμές πώλησης για να μπορέσουμε να διαθέσουμε ένα προϊόν. Μπορεί να ισχύει οι ποσότητες του προϊόντος j κάτω του A_j έχουν τιμή c_j^1 ενώ ποσότητες άνω του A_j έχουν τιμή c_j^2 με $c_j^2 < c_j^1$. Τότε τα έσοδα από πώληση ποσότητας j δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα



Είναι σημαντικό όπως θα δούμε να μπορούμε να διαμορφώσουμε το πρόβλημα αυτό με γραμμικές σχέσεις! Ένα τέχνασμα που το επιτυγχάνει είναι το εξής: Έστω x_j^1 το μέρος της παραγωγής κάτω του A_j και x_j^2 το υπόλοιπο. Φυσικά αν $x_j^1 < D$ σε κάποια βέλτιστη λύση, θα πρέπει $x_j^2 = 0$! Εισάγουμε μεταβλητές x_j^1, x_j^2 με περιορισμούς

$$\begin{cases} 0 \le x_j^1 \le A_j \\ 0 \le x_j^2 \\ x_j = x_j^1 + x_j^2 \end{cases}$$

και διαμορφώνουμε το πρόβλημα (1) ως εξής (με δείκτη προϊόντων το k)

$$\max \sum_{k\neq j} c_k x_k + c_j^1 x_j^1 + c_j^2 x_j^2 \qquad (3)$$

- $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \le b_i \qquad i=1,\dots,m$
- $0 \le x_j^1 \le A_j \qquad 0 \le x_j^2$
- $x_j = x_j^1 + x_j^2$
- $x_k \ge 0 \qquad k=1,\dots,n$

Η βέλτιστη λύση του (3) έχει είτε $x_j^1 < A_j$ και $x_j^2 = 0$ είτε $x_j^1 = A_j$ και $x_j^2 \geq 0$. Διότι αν δεν ίσχυε αυτό και ίσχυε $x_j^1 < A_j$ αλλά $x_j^2 > 0$, μια άλλη λύση με $\hat{x}_j^1 = A_j$ και $\hat{x}_j^2 = x_j^1 + x_j^2 - A_j$ θα ήταν εφικτή (γιατί;) και θα έδινε μεγαλύτερο έσοδο καθώς

$$c_j^1 x_j^1 + c_j^2 x_j^2 = c_j^1 A_j + c_j^1 \underbrace{(x_j^1 - A_j)}_{(<0)} + c_j^2 x_j^2$$

προσοχή!

$$\le c_j^1 A_j + c_j^2 (x_j^1 - A_j) + c_j^2 x_j^2$$

$$= c_j^1 A_j + c_j^2 (x_j^1 + x_j^2 - A_j)$$

$$= c_j^1 \hat{x}_j^1 + c_j^2 \hat{x}_j^2$$

2. Προβλήματα Ελαχιστοποίησης κόστους (Δίαιτας)

Έστω ότι πρέπει να αγορασθούν ποσότητες x_j από κάποια προϊόντα (π.χ. τροφές) $j=1,\dots,n$. Το κόστος ανά μονάδα τροφής j είναι έστω p_j. Οι "τροφές" πρέπει να αγορασθούν έτσι ώστε να επιτευχθεί η κάλυψη δεδομένων αναγκών σε π.χ. θρεπτικές ουσίες $i=1,\dots,m$. Έστω ότι μια μονάδα τροφής j αποδίδει ποσότητα a_{ij} της ουσίας i, οι δε επιδράσεις των ποσοτήτων είναι αθροιστικές, δηλαδή η συνολική χρήσιμη ποσότητα της ουσίας i είναι $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. Που έστω πρέπει να είναι μεγαλύτερη από κάποια προδιαγραφή b_i.

Το πρόβλημα της "δίαιτας" ελαχίστου κόστους είναι το πρόβλημα

$$\min_{x_1,\dots,x_n} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

$$x_j \geq 0 .$$

Τι νόημα μπορούν να έχουν εδώ αρνητικές τιμές της τροφής j; Υπόδειξη: Έστω ότι μια από τις τροφές είναι το γάλα

3. Προβλήματα ανάμειξης

Έστω ότι μια εταιρεία παράγει $j=1,\dots,n$ προϊόντα χρησιμοποιώντας $i=1,\dots,m$ πρώτες ύλες. Η παραγωγή είναι τύπου "ανάμειξης", δηλαδή για να παραχθεί το προϊόν k αναμειγνύονται ποσότητες x_{ik} από τις πρώτες ύλες και παράγεται ποσότητα $y_k = \sum_{i=1}^{m} x_{ik}$. Τα έσοδα από την πώληση του προϊόντος είναι $c_k y_k$.

Συνήθως υπάρχουν περιορισμοί στην ανάμειξη της μορφής: Το ποσοστό της i πρώτης ύλης στο προϊόν k είναι μεταξύ a^1_{ik} και a^2_{ik}, $a^1_{ik} < a^2_{ik}$. Ο περιορισμός αυτός γράφεται ως

$$a^1_{ik} \le \frac{x_{ik}}{\sum_{i=1}^{m} x_{ik}} \le a^2_{ik}$$

Η σχέση αυτή όμως ισοδυναμεί με δύο ανισότητες

- $a^1_{ik} \sum_{i=1}^{m} x_{ik} \le x_{ik}$ ή $a^1_{ik} y_k \le x_{ik}$
- $x_{ik} \le a^2_{ik} \sum_{i=1}^{m} x_{ik}$ ή $x_{ik} \le a^2_{ik} y_k$

Στην διαμόρφωση του προβλήματος υπεισέρχεται και το κόστος των πρώτων υλών. Η χρησιμοποίηση της πρώτης ύλης i είναι $z_i = \sum_{k=1}^{m} x_{ik}$

Αν η πρώτη ύλη k κοστίζει q_k, το συνολικό κόστος είναι $\sum_{k=1}^{m} q_k z_k$

Αν υπάρχει περιορισμός στο κόστος θα έχουμε $\sum_{k=1}^{m} q_k z_k \le K_{max}$ οπότε η διατύπωση έχει ως εξής

$$\max \sum_j p_j y_j \qquad (5)$$

$$\cdot\ y_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \qquad j=1,\dots,n$$

$$\cdot\ a^1_{ij} y_j \le x_{ij} \qquad i=1,\dots,m$$

$$\cdot\ a^2_{ij} y_j \ge x_{ij} \qquad j=1,\dots,n$$

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \qquad i=1,\dots,m$$

$$\sum_{k=1}^{m} q_k z_k \le K$$

$$z, x, y \ge 0$$

II. Διαμορφώσεις προβλημάτων με χρήση ακεραίων ή 0-1 μεταβλητών.

Δεδομένου ότι το λογισμικό επίλυσης γραμμικών προβλημάτων με ακέραιες μεταβλητές είναι σχετικά αξιόπιστο, είναι σημαντικό να μπορούμε να διαμορφώσουμε πρακτικά προβλήματα σε αυτή την μορφή.

1. Προβλήματα τύπου σακκιδίου ή επιλογής επενδύσεων.

Έστω ότι διαθέτουμε ένα σακκίδιο χωρητικότητας M, και μπορούμε να επιλέξουμε ακέραιο αριθμό αντικειμένων από "είδους" $j = 1, \ldots, n$. Κάθε αντικείμενο είδους j έχει αξία a_j και "βάρος" b_j. Αν επιλέξουμε x_j (ακέραιο αριθμό) αντικειμένων είδους j θα έχουμε συνολικό βάρος $\sum b_j x_j$ και αξία $\sum a_j x_j$. Άρα η επιλογή μας χαρακτηρίζεται από το πρόβλημα

$$\max \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \qquad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \leq M$$

$$x_j \geq 0 \text{ και ακέραιοι}$$

Αν από κάθε είδος μπορούμε να επιλέξουμε ένα ή κανένα αντικείμενο θέτουμε $x_j \in \{0, 1\}$ και το πρόβλημα ονομάζεται "πρόβλημα 0-1 σακκιδίου", ενώ το αρχικό ονομάζεται "ακέραιο σακκίδιο". Θα δούμε ότι και τα δύο προβλήματα σακκιδίων μπορούν να λυθούν αποτελεσματικά με την τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού.

Παρεμφερές είναι το πρόβλημα της επιλογής επενδύσεων: Έστω ότι μια εταιρεία εξετάζει n υποψήφια επενδυτικά σχέδια. Το καθένα έχει δαπάνη επένδυσης γνωστή, ίση με b_j για το σχέδιο j. Επίσης θεωρείται γνωστό το "καθαρό" όφελος του σχεδίου j, έστω a_j. Αν η εταιρεία έχει προϋπολογισμό επενδύσεων ίσο με ποσό M, η βέλτιστη επιλογή είναι η λύση του προβλήματος

$$\max \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \qquad (7)$$

$$\text{με} \quad \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \le M \qquad x_j \in \{0,1\}$$

με $x_j = 1$ σημαίνει ότι υιοθετείται η j επένδυση, ενώ δεν υιοθετείται αν $x_j = 0$. Στο πλαίσιο αυτό μπορούμε να εντάξουμε λίγο πιο πολύπλοκα προβλήματα όπως

(α) Επιπλέον των παραπάνω, δεν μπορούν να υιοθετηθούν περισσότερες από k επενδύσεις (το k δεδομένο)

(β) Η επένδυση j_1 δεν μπορεί να αναληφθεί εφόσον δεν γίνει η επένδυση j_2

(γ) Πρέπει να πραγματοποιηθεί τουλά-

χιστον μία επένδυση από κάποιο υποσύνολο
επενδύσεων π.χ. τουλάχιστον μία από τις 1,2,..,k
και τουλάχιστον μία από τις k+1,k+2,...,n.

2. Παραγωγή με πάγια κόστη.

Στα προβλήματα παραγωγής (σελ. 1) εμφανίζονται συχνά "πάγια" κόστη (setup costs). Συγκεκριμένα, αν αποφασιστεί να παραχθεί μη μηδενική $x_j > 0$ ποσότητα του προϊόντος j υφιστάμεθα ένα κόστος k_j που είναι ανεξάρτητο από την ποσότητα x_j (εφόσον βέβαια $x_j > 0$). Το πάγιο δεν προκύπτει αν δεν παράγουμε το j, δηλαδή αν επιλέξουμε $x_j = 0$. Πως μπορούμε να διαμορφώσουμε το πρόβλημα αυτό; Εισάγουμε μία 0-1 μεταβλητή y_j που παριστά την απόφαση "το j παράγεται οπότε $y_j = 1$" ή "το j δεν παράγεται οπότε $y_j = 0$". Με την εισαγωγή του y_j το καθαρό έσοδο γίνεται

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{j=1}^{n} k_j y_j$$

Έστω επιπλέον ότι το επίπεδο οποιουδήποτε προϊόντος είναι μικρότερο κάποιου αριθμού M. Τότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι τα y_j θα πάρουν τις σωστές τιμές αν ικανοποιούν τους περιορισμούς

$$x_j \le M y_j \qquad j = 1,..,n$$

Έτσι αν σε κάποιο πρόγραμμα παραγωγής είναι $x_j > 0$ θα πρέπει και $y_j = 1$. Επίσης, σε μια βέλτιστη λύση αποκλείεται να είναι $x_j = 0$ και ταυτόχρονα $y_j = 1$ (κάτι που δεν αποκλείεται από τις ανισότητες $x_j \le M y_j$) εφόσον μια λύση με $x_j = y_j = 0$ θα είχε μεγαλύτερα καθαρά έσοδα. Έτσι η διαμόρφωση είναι

$$\max_{x_j, y_j} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{j=1}^{n} k_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (8)$$

$$x_j \le M y_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$x_j \ge 0, \quad y_j \in \{0,1\}$$

Παρόμοια διαμορφώνονται τα παρακάτω προβλήματα

(α) Δεν υπάρχει πάγιο κόστος αλλά μπορούμε να παράγουμε το πολύ Q ($Q << n$) προϊόντα

(β) Για την παραγωγή προϊόντων j_1 και j_2 υπάρχει ένα πάγιο κόστος $K_{1,2}$. Το κόστος θα το υποστούμε είτε παράγουμε το j_1, είτε το j_2 είτε και τα δύο.

3. Ρυθμίσεις διαδικασιών παραγωγής

Ένα εργοστάσιο χρησιμοποιεί $i = 1, 2, \ldots m$ μηχανήματα για την παραγωγή ενός [illegible]. Το κάθε μηχάνημα μπορεί να ρυθμιστεί στο επίπεδο j, $j=1,2,..,n$. Η παραγωγή του μηχανήματος i στη ρύθμιση j είναι a_{ij}, ενώ το κόστος λειτουργίας του είναι b_{ij}. Κάθε μηχάνημα μπορεί να ρυθμιστεί ακριβώς σε μια θέση (κάποια από τις θέσεις μπορεί να είναι και η θέση "αδράνειας"). Ποιές είναι οι βέλτιστες ρυθμίσεις αν θέλουμε να παράγουμε τουλάχιστον ποσότητα D, δηλαδή αυτές που ελαχιστοποιούν το κόστος.

Θέτουμε $x_{ij}=1$ αν το μηχάνημα i ρυθμίζεται στο επίπεδο j. Το συνολικό κόστος είναι $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_{ij}$ ενώ η παραγωγή $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}$, και η "μοναδική ρύθμιση" συνεπάγεται $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1$ $i=1,2,..,n$

Άρα η βελτιστοποίηση γίνεται ως

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_{ij} \qquad (9)$$

- $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i=1,2,..,m$
- $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \geq D$

$x_{ij} \in \{0,1\}$.