Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Τα παραδείγματα ισχύουν προηγουμένως της αναγωγής για την λύση διαφορικών εξισώσεων τύπου

$$a_k \frac{d^{(k)}y}{dx^k} + a_{k-1}\frac{d^{(k-1)}y}{dx^{k-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y(x)$$

$$= f(x) \qquad (a_j \text{ σταθερές}) \qquad (1)$$

Με συνοριακές συνθήκες τύπου π.χ.

$$\frac{d^{(j)}y}{dx^j}(0) = a_j \qquad j = 0,1,2\dots,k-1$$

Παράδειγμα $\frac{d^2y}{dx^2} + 3y = x+1 \quad y(0)=y(1)=1$

Εξετάζουμε την (1) με τον ανεξάρτητο όρο $f(x)$ να είναι 0 για κάθε x. (ομογενής διαφορική εξίσωση).

Δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής $Ae^{sx}, A\neq 0$. Αντικαθιστώντας στην (1) είναι

$$a_k A s^k e^{sx} + a_{k-1} A s^{k-1} e^{sx} + \quad + a_1 A s e^{sx} + a_0 A e^{sx} = 0$$

ή διαιρώντας διά Ae^{sx} (που είναι ≠ για κάθε x)

$$a_k s^k + a_{k-1} s^{k-1} + \quad + a_1 s^1 + a_0 = 0 \qquad (2)$$

Αυτό είναι το <u>χαρακτηριστικό πολυώνυμο</u>!

Έστω ότι το χαρ. πολ. (χ_Π) έχει k διαφορετικές ρίζες $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$. Έχουμε k "λύσεις" $A_j e^{\rho_j x}$ $j = 1, \ldots, k$. Όπως και προηγουμένως, το άθροισμα λύσεων είναι επίσης λύση! Άρα η "γενική" λύση είναι

$$y^{\text{γεν}}(x) = \sum_{j=1}^{k} A_j e^{\rho_j x}$$

Για να δικαιολογηθεί ο όρος "γενική λύση" θα πρέπει για αυθαίρετες συνοριακές συνθήκες να μπορούν να εκλεγούν κατάλληλες τιμές των A_j. Για τις συνοριακές $\frac{d^\nu y}{dx^\nu}(0) = \gamma_\nu$ θα πρέπει να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned}
y(0) &= \gamma_0 = A_1 + A_2 + \cdots + A_k \\
y'(0) &= \gamma_1 = A_1\rho_1 + A_2\rho_2 + \cdots + A_k\rho_k \\
y''(0) &= \gamma_2 = A_1\rho_1^2 + A_2\rho_2^2 + \cdots + A_k\rho_k^2 \\
&\;\;\vdots \\
y^{(k-1)}(0) &= \gamma_{k-1} = A_1\rho_1^{k-1} + A_2\rho_2^{k-1} + \cdots + A_k\rho_k^{k-1}
\end{aligned}$$

Το παραπάνω γραμμικό σύστημα έχει πάντοτε λύση ως πρός τα A_j - όπως είδαμε στις εξισώσεις διαφορών.

Όσον αφορά την λύση της μη ομογενούς, μπορεί πάντοτε να γραφεί μια παράσταση για την λύση της σαν συνάρτηση της λύσης της ομογενούς και του f. Η λύση αυτή δεν υπολογίζεται εύκολα καθώς προϋποθέτει υπολογισμό περίπλοκων ολοκληρωμάτων. Συχνά είναι χρήσιμη

μια μέθοδος όπως αυτή, των εξισώσεων διαφορών.
Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι αν έχουμε μία λύση της ομογενούς και μια λύση της μη ομογενούς και δημιουργήσουμε μια τρίτη αθροίζοντας τις παραπάνω, έχουμε μια λύση της μη ομογενούς: Αυτό προκύπτει διότι αν

$$a_k \frac{d^{(k)}y^{(0)}}{dx^k} + \dots + a_1 \frac{dy^{(0)}}{dx} + a_0 y^{(0)}(x) = 0$$

και

$$a_k \frac{d^{(k)}y^{(1)}}{dx^k} + \dots + a_1 \frac{dy^{(1)}}{dx} + a_0 y^{(1)}(x) = f(x)$$

Αθροίζοντας προκύπτει

$$a_k \frac{d^k}{dx^k}\left(y^{(0)}+y^{(1)}\right) + \dots + a_1 \frac{d}{dx}\left(y^{(0)}+y^{(1)}\right) + a_0\left(y^{(0)}+y^{(1)}\right) = f(x)$$

Άρα η $y(x) = y^{(0)}(x) + y^{(1)}(x)$ είναι λύση της μη ομογενούς! Επιπλέον, αν η $y^{(0)}$ είναι γενική λύση, και το άθροισμα είναι γενική λύση καθώς μπορούμε να προσαρμόσουμε τις παραμέτρους σε αυθαίρετες αρχικές συνθήκες.

<u>Παράδειγμα</u>

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y(x) = 4 \qquad y(0) = y(1) = 2$$

Μια ειδική λύση θα μπορούσε να είναι η σταθερά $y(x) = A$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση το $y = A$ προκύπτει $-2A = 4$

και άρα $A = -2$.

Η ομογενής $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$
έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2)$$

που έχει ρίζες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = -2$, και λύσεις e^x, e^{-2x}. Άρα η γενική λύση είναι $Ae^x + Be^{-2x}$, και η γενική λύση της μη ομογενούς

$$y(x) = Ae^x + Be^{-2x} - 2$$

Για να βρούμε τα A, B, έχουμε

$$y(0) = 2 = A + B - 2$$
$$y(1) = 2 = Ae + Be^{-2} - 2$$

ή

$$\begin{cases} A + B = 4 \\ Ae + Be^{-2} = 4 \end{cases}$$

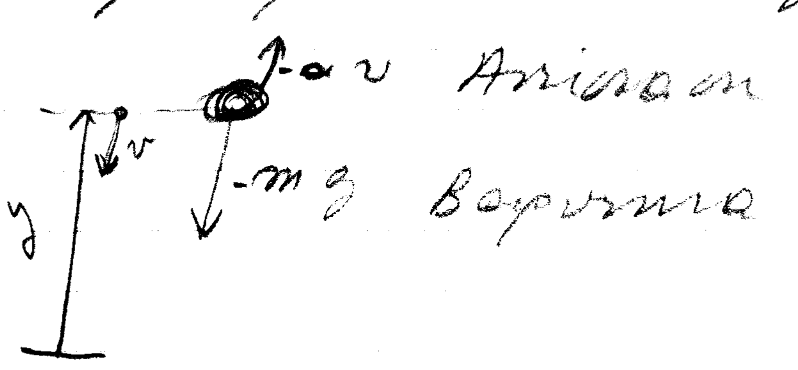
και άρα

$$A = \frac{4(e^{-2}-1)}{e^{-2}-e} \qquad B = \frac{4(1-e)}{e^{-2}-e}$$

Παράδειγμα (Επιβράδυνση)

Ένα σώμα μάζας m πέφτει υπό την επίδραση της βαρύτητας από ύψος h. Υφίσταται αντίσταση αέρος ανάλογη της ταχύτητας. Πώς θα προσεγγίσει στη γη;

Βλέπε σχήμα:



Η συνισταμένη δύναμις στο σώμα είναι

$$F_{σώμα} = F_{βαρύτης} - F_{αντίστασ} = -mg - av$$

Η δύναμις στο σώμα ισούται με μάζα επί επιτάχυνση. Αν το ύψος είναι $y(t)$ η κίνηση περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - a\frac{dy}{dt}$$

με αρχικές συνθήκες $y(0)=h$ και $v(0) = dy/dt\,(0) = 0$. Η ομογενής έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$ms^2 + as = 0$$

με ρίζες $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = -a/m$ που οδηγεί στην γενική λύση

$$y^{ομ}(t) = A + Be^{-a/m\,t}$$

Η $y^{ειδ}(t) =$ σταθ. δεν είναι παραδεκτή, οπότε δοκιμάζουμε $y^{ειδ}(t) = Mt$. Αντικαθιστώντας στην δ.ε. προκύπτει

$$-mg - aM = 0 \Rightarrow M = -mg/a$$

Έτσι η γενική λύση είναι

$$y^{γεν}(t) = A - \frac{mg}{a}t + Be^{-a/m\,t}$$

Για $t=0$ είναι $y^{γεν}(0) = h = A + B$
και $dy^{γεν}/dt\,(0) = -mg/a - \frac{a}{m}B = 0$

Επομένως $B = -\left(\frac{m}{a}\right)^2 g$
και $A = h - B$ με τελική λύση

$$y(t) = h + \left(\frac{m}{a}\right)^2 g - \frac{mg}{a}t - \left(\frac{m}{a}\right)^2 g\, e^{-a/m\,t}$$

Γιά να βρούμε πότε φτάνει το σώμα στη γή, λύνουμε την μη γραμμική εξίσωση

$$0 = h + \left(\frac{m}{a}\right)^2 g - \frac{mg}{a}t - \left(\frac{m}{a}\right)^2 g\, e^{-\frac{a}{m}t}$$

Ο χρόνος αυτός εξαρτάται από τη μάζα. Αντίθετα, αν δεν υπάρχει αντίσταση αέρος ($a = 0$) ο χρόνος είναι ανεξάρτητος του m (διότι τότε η διαφορική εξίσωση είναι

$$m\, d^2y/dt^2 = -mg \quad \eta \quad d^2y/dt^2 = -g$$

που <u>δεν</u> εξαρτάται από το m). Έτσι η Αριστοτέλεια άποψη ότι βαρύτερα σώματα πέφτουν πιο γρήγορα μπορεί να απορριφθεί μόνο μετά από πολύ προσεκτική παρατήρηση, και είναι "άδικο" να καταλογίζουμε χονδροειδή σφάλματα στους αρχαίους φυσικούς-φιλοσόφους.