Εφαρμογή των Εξισ. Διαφορών στα Οικονομικά. Το υπόδειγμα Hicks-Samuelson για την Οικονομική Δυναμική

Εξετάζουμε την πορεία μιας οικονομίας σε διακριτές στιγμές n. Το ΑΕΠ (Ακαθ. Εγχώριο Προϊόν) της στιγμής n συμβολίζεται με Y_n. Η παραγωγή Y_n καταναλώνεται σε είδη κατανάλωσης C_n και επένδυση I_n.

Ένα λογικό υπόδειγμα για την κατανάλωση είναι ότι θα εξαρτάται από το αμέσως προηγούμενο επίπεδο ΑΕΠ και μάλιστα αναλογικά κατά τον συντελεστή c. Είναι τότε $C_n = cY_{n-1}$

Η επένδυση I_n θα εξαρτηθεί από την "απόδοση" των επενδύσεων που προκύπτουν από την διαφορά τα προηγούμενα ΑΕΠ. Έτσι είναι $I_n = v(Y_{n-1} - Y_{n-2})$. Ο όρος $Y_{n-1} - Y_{n-2}$ ερμηνεύεται ως τα παρατηρηθέντα κέρδη την περίοδο n, το δε v είναι σταθερός συντελεστής.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, είναι

$$
\begin{aligned}
Y_n &= C_n + I_n \\
&= cY_{n-1} + v(Y_{n-1} - Y_{n-2})
\end{aligned}
$$

ή τελικά

$$Y_n = (c+v)Y_{n-1} - vY_{n-2}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$s^2 - (c+v)s + v = 0$$

με ρίζες $$s_{1,2} = \frac{c+v \pm \sqrt{(c+v)^2 - 4v}}{2}$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι όταν $(c+v)^2 - 4v < 0$

δηλαδή οι ρίζες είναι μιγαδικές, και συγκεκριμένα

$$s_{1,2} = \frac{c+v}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{4v-(c+v)^2}}{2}$$

Κάθε μιγαδικός $z = a+ib$ γράφεται τριγωνομετρικά ως

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

που για κάποια γωνία θ, $0 \le \theta < 2\pi$ ισούται με $z = |z|(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$
(Βλέπε Μαθηματικά Γ' Λυκείου, θετικής κατεύθυνσης)

__Άσκηση__ (α) Αν $z_1 = |z_1|(\text{συν}\theta_1 + i\,\text{ημ}\theta_1)$
και $z_2 = |z_2|(\text{συν}\theta_2 + i\,\text{ημ}\theta_1)$
αποδείξτε ότι
(α) $z_1 z_2 = |z_1||z_2|\{\text{συν}(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{ημ}(\theta_1+\theta_2)\}$
και ότι $1/z = |z|^{-1}(\text{συν}(-\theta) + i\,\text{ημ}(-\theta))$
(β) Για n ακέραιο ισχύει

$$z^n = |z|^n(\text{συν}(n\theta) + i\,\text{ημ}(n\theta))$$

και ερμηνεύστε στο μιγαδικό επίπεδο

Η γενική λύση της ε.δ. είναι

$$y_n = A s_1^n + B s_2^n \quad \text{όπου } s_2 = \bar{s}_1$$

και $s_2 = \bar{s}_1$. Αν y_0, y_1 είναι πραγματικοί μπορεί να αποδειχθεί ότι $B = \bar{A}$ οπότε είναι $y_n = A s_1^n + \bar{A}\bar{s}_1^n$ που είναι πραγματικός αριθμός (γιατί;)
Μετά από πράξεις προκύπτει ότι είναι $|s_1| = v > 0$ οπότε

$$s_1 = v(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta) \quad \text{για } \text{συν}\theta = \frac{c+v}{2v}$$

Με $A = \alpha + \beta i$ είναι

$$Y_n = (a+bi)\, v^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + (a-bi)\, v^n (\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta))$$

$$= 2v^n (a\cos(n\theta) - b\sin(n\theta))$$

$$= v^n \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos(n\theta + \varphi))$$

$$\left(\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

δηλ. τελικά

$$Y_n = v^n |A| \cos(n\theta + \varphi)$$

Σε κάθε περίπτωση η πορεία των Y_n έχει ταλαντώσεις. Αν $v=1$ έχουμε περιοδική κίνηση, αν $v>1$ έχουμε εκθετική αύξηση ενώ αν $v<1$ έχουμε εκθετική μείωση.

Το υπόδειγμα αυτό μπορεί προφανώς να επεκταθεί ώστε να γίνει περισσότερο κοντά στην πραγματικότητα.

<u>Άσκηση</u> Επαναλάβετε την παραπάνω ανάλυση για το υπόδειγμα Philips όπου $C_n = cY_n$ ενώ ισχύει πάλι $I_n = v(Y_{n-1} - Y_{n-2})$