ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

(ΒΛΕΠΕ C.LIU: ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘ/ΚΑ ΚΕΦ. 9, 10)

ΣΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΙΔΑΜΕ ΟΤΙ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ (ή ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ) ΕΙΝΑΙ

(α) ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΜΙΑ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

(β) $x_n = \varphi(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}, n) \quad \forall n \geq k$

k: ΣΤΑΘΕΡΟΣ ΑΚΕΡΑΙΟΣ, Η ΤΑΞΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣ. ΔΙΑΦ.

ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΑΠΟ ΤΗΝ (β) ΚΑΙ ΤΗΝ ΓΝΩΣΗ ΤΩΝ $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ (k ΤΙΜΕΣ...) ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΕΤΑΙ ΤΟ x_k ΩΣ $\varphi(x_{k-1}, \ldots, x_0, k)$ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΟ x_{k+1}, x_{k+2} ΚΑΙ ΟΛΑ ΤΑ x_n.

ΥΠΑΡΧΕΙ ΛΙΓΟΤΕΡΟ ΕΠΙΠΟΝΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΓΙΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ x_n Π.Χ. ΜΕ ΤΥΠΟ; ΓΕΝΙΚΑ ΟΧΙ! ΣΕ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΟΜΩΣ ΜΠΟΡΟΥΜΕ.

ΕΣΤΩ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣ. ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΕΩΣ k

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k} + f(n) \quad (1)$$

ΜΕ a_i ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ $x_0 = \bar{x}_0, x_1 = \bar{x}_1, \ldots, x_{k-1} = \bar{x}_{k-1}$ ΜΕ $\bar{x}_i$ ΔΕΔΟΜΕΝΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ. ΛΥΣΗ ΤΗΣ Ε.Δ. ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΠΟΥ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΚΑΙ ΤΙΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ. ΟΤΑΝ ΛΕΜΕ ΜΙΑ ΑΛΛΗ ΛΥΣΗ ΕΝΝΟΟΥΜΕ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΠΟΥ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ΑΛΛΑ ΓΙΑ ΑΛΛΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

ΕΣΤΩ ΔΥΟ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΝΑΔΡ. ΣΧΕΣΗΣ, x_n^1, x_n^2.
ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΟΥΣ $y_n = x_n^1 - x_n^2$,
ΤΟΤΕ ΙΣΧΥΕΙ

$$y_n = x_n^1 - x_n^2 = a_1(x_{n-1}^1 - x_{n-1}^2) + \dots +$$

$$+ a_k(x_{n-k}^1 - x_{n-k}^2) + \cancel{f(n)} - \cancel{f(n)}$$

$$= a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_k y_{n-k}$$

ΑΡΑ Η ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΟ ΛΥΣΕΩΝ ΕΙΝΑΙ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ.

ΕΣΤΩ ΤΩΡΑ Η ΛΥΣΗ x_n ΜΙΑΣ Ε.Δ. (ΓΙΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ). ΕΣΤΩ ΕΠΙΣΗΣ ΜΙΑ ΑΛΛΗ ΛΥΣΗ (ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ) $\hat{x}_n$
ΤΟΤΕ Η $y_n = x_n - \hat{x}_n$ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΤΗΝ

ΟΜΟΓΕΝΗ ΚΑΙ ΕΧΕΙ ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ

$$y_0 = x_0 - \hat{x}_0 \quad \dots \quad y_{k-1} = x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}$$

ΑΡΑ ΑΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΛΥΣΟΥΜΕ ΤΟ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΑΥΘΑΙΡΕΤΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΕΧΟΥΜΕ ΛΥΣΕΙ ΤΟ ΑΡΧΙΚΟ.
Η ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΙΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ **ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ**

Η **ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ** ΜΙΑΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΕΥΚΟΛΑ. ΕΣΤΩ ΛΟΙΠΟΝ Η Ε.Δ.

$$x_n - a_1 x_{n-1} - \dots - a_k x_{n-k} = 0$$

ΚΑΤ' ΑΡΧΗΝ, ΑΝ x_n^i $i=1,\dots,m$ ΙΚΑΝΟΠΟΙΟΥΝ ΤΗΝ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ, ΚΑΙ ΤΟ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_n^i$$

ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΚΑΙ ΑΥΤΟ ΤΗΝ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ. ΓΙΑΤΙ;

ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΥΠΟΨΗΦΙΑ ΛΥΣΗ $x_n = \rho^n$ ΟΠΟΥ ρ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ, ΣΤΑΘΕΡΑ. ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ρ ΑΠΟΔΕΚΤΟ ΠΡΕΠΕΙ $\rho \neq 0$ ΚΑΙ

$$\rho^n - a_1 \rho^{n-1} \quad - a_k \rho^{n-k} = 0$$

ή

$$\rho^k - a_1 \rho^{k-1} \quad - a_{k-1} \rho - a_k = 0 \quad (3)$$

· Η (3) ΕΙΝΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ρ, ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΤΟ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΤΗΣ Ε.Δ., ΑΡΑ ΥΠΑΡΧΟΥΝ k ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ ρ ΔΗΛ. $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ ΠΟΥ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΟΥΝ

· ΑΡΑ ΜΙΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΛΥΣΕΩΝ ΤΗΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΕΙΝΑΙ Η

$$x_n^{ομογ} = \sum_{i=1}^{k} b_i \rho_i^n \quad (4)$$

ΠΟΥ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΤΗΝ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ΓΙΑ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΤΑΘΕΡΑ b_i $i=1,\dots,k$

ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ Η (4) <u>ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ</u> ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΓΙΑ ΟΠΟΙΕΣΔΗΠΟΤΕ ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ $\bar{x}_\ell$, $\ell = 0, \dots, k-1$ ΝΑ ΥΠΑΡΧΟΥΝ β_i ΕΤΣΙ ΩΣΤΕ Η (4) ΝΑ ΔΙΝΕΙ ΤΑ ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ $\bar{x}_\ell$.

Το ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΔΕΙΧΝΕΙ ΟΤΙ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ <u>ΟΛΕΣ</u> ΤΙΣ ΡΙΖΕΣ

ΤΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ, ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΔΥΝΑΤΟΝ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΘΟΥΝ ΑΥΘΑΙΡΕΤΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ (ΣΥΝΗΘΩΣ ΕΝΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ k ΒΑΘΜΟΥ ΕΧΕΙ k ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ, ΑΛΛΑ ΜΕΡΙΚΕΣ ΦΟΡΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ ΤΑΥΤΙΖΟΝΤΑΙ, ΠΡΑΓΜΑ ΠΟΥ ΕΞΕΤΑΖΕΤΑΙ ΣΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΟΧΙ ΕΔΩ...)

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u> (α) ΠΟΙΑ Η ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ Σ.Δ.

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (x_0 = P,\ x_1 = Q)$$

Η ΤΑΞΗ ΕΙΝΑΙ 2. ΤΟ ΧΑΡ. ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΕΙΝΑΙ

$$\rho^2 - 3\rho + 2 = 0$$

ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΡΙΖΕΣ $\rho_1 = 1$ $\rho_2 = 2$ ΑΡΑ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΕΙΝΑΙ $\beta_1 \cdot 1^n + \beta_2 2^n$

ΓΙΑ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΘΟΥΝ ΟΙ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΡΕΠΕΙ

$$\begin{cases} x_0 = P = \beta_1 \cdot 1^0 + \beta_2 \cdot 2^0 \\ x_1 = Q = \beta_1 \cdot 1^1 + \beta_2 \cdot 2^1 \end{cases}$$

ή

$$\begin{matrix} \beta_1 + \beta_2 = P \\ \beta_1 + 2\beta_2 = Q \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} \beta_2 = Q - P \\ \beta_1 = 2P - Q \end{cases}$$

(β) ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕ ΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ FIBONACI ΔΗΛΑΔΗ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΤΕΤΟΙΟΥΣ ΩΣΤΕ

$$x_0 = x_1 = 1 \qquad x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \qquad n \geq 2$$

ΤΟ ΧΠ ΕΙΝΑΙ $\rho^2 - \rho - 1 = 0$

ΜΕ ΡΙΖΕΣ $\rho_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\rho_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

ΑΡΑ Η ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΙΝΑΙ

$$\beta_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n + \beta_2\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$$

ΤΑ β_1, β_2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΣΧΕΣΗΣ,

$$\beta_1 + \beta_2 = 1$$

$$\beta_1 \frac{1+\sqrt5}{2} + \beta_2 \frac{1-\sqrt5}{2} = 1$$

ή $\beta_1 = \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5} \quad \beta_2 = \frac{-1+\sqrt5}{2\sqrt5}$

ΑΡΑ $$x_n = \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n + \frac{-1+\sqrt5}{2\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$$

$$= \frac{(1+\sqrt5)^{n+1} - (1-\sqrt5)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot\sqrt5}$$

ΠΑΡΑΔΟΞΩΣ, ΟΛΑ ΤΑ x_n ΕΙΝΑΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ...
ΕΦΟΣΟΝ Η ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ FIBONACCI ΕΙΝΑΙ Η

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

·ΠΩΣ ΛΥΝΟΥΜΕ ΜΙΑ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ; ΓΕΝΙΚΑ, ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΗ, ΑΛΛΑ ΣΥΝΗΘΩΣ ΕΡΓΑΖΟΜΑΣΤΕ ΩΣ ΕΞΗΣ

(α) ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΜΙΑ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ, ΑΓΝΟΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ. Η ΛΥΣΗ ΑΥΤΗ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΕΙΔΙΚΗ ΛΥΣΗ $x_n^{ειδ}$

(β) Η ΛΥΣΗ ΠΟΥ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΤΙΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΙΝΑΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΗΣ $x_n^{ειδ}$ ΚΑΙ ΜΙΑΣ ΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΕΤΣΙ ΩΣΤΕ

Η ΛΥΣΗ $x_n = x_n^{ΕΙΔ} + x_n^{ΟΜ}$ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΚΑΙ ΤΙΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ. ΑΥΤΟ ΓΙΝΕΤΑΙ ΕΠΙΛΕΓΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΕΤΣΙ, ΩΣΤΕ ΝΑ ΕΧΕΙ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$x_n - x_n^{ΕΙΔ} \quad ΓΙΑ \quad n = 0, 1, .., k-1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (α) $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + 3$
ΜΕ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

ΚΑΙ $x_0 = 1 \quad x_1 = 0$

ΜΙΑ ΑΠΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗ ΕΙΔΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΕΙΝΑΙ $x_n^{ΕΙΔ} = c$. ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΤΟΤΕ ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩΝ. ΣΤΗΝ Ε.Δ ΝΑ ΕΙΝΑΙ $c = 5c - 6c + 3$
ΑΡΑ $c = 3/2 \Rightarrow x_n^{ΕΙΔ} = 3/2$

Η ΟΜΟΓΕΝΗΣ $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$ ΕΧΕΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ $\rho^2 - 5\rho + 6 = 0$
ΑΡΑ $\rho_1 = 3 \quad \rho_2 = 2$ ΟΠΟΤΕ Η ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΕΙΝΑΙ

$$x_n^{ΟΜ} = A2^n + B3^2$$

ΠΡΕΠΕΙ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΝΑ ΙΣΧΥΕΙ

$$\begin{cases} x_0 = 1 = 3/2 + A2^0 + B3^0 \\ x_1 = 0 = 3/2 + A \cdot 2^1 + B3^1 \end{cases}$$

ΠΟΥ ΟΔΗΓΕΙ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

$$A + B = -1/2$$
$$2A + 3B = -3/2$$

ΑΡΑ $A = 0 \quad B = -1/2$ ΕΤΣΙ Η ΛΥΣΗ ΕΙΝΑΙ

$$x_n = 3/2 - \frac{1}{2} 3^n$$

(β) ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ FIBONACCI

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} - n$$

ΜΕ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 1$$

ΔΟΚΙΜΑΖΟΥΜΕ $x_n^{\varepsilon\iota\delta} = \alpha n + \beta$ ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΟΥΜΕ ΣΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΟΠΟΤΕ ΠΡΕΠΕΙ

$$\alpha n + \beta = \alpha(n-1)+\beta + \alpha(n-2)+\beta - n$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha - 2\alpha + 1)n + (\beta + 3\alpha - 2\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1-\alpha)n + (3\alpha - \beta) = 0$$

ΕΦΟΣΟΝ Η ΣΧΕΣΗ ΙΣΧΥΕΙ ΓΙΑ ΚΑΘΕ n ΠΡΕΠΕΙ $\alpha = 1$ ΚΑΙ $\beta = 3$. ΕΤΣΙ Η ΛΥΣΗ ΕΙΝΑΙ

$$x_n = n + 3 + A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ΓΙΑ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΘΟΥΝ ΟΙ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΡΕΠΕΙ

$$x_0 = 1 = 3 + A + B$$

$$x_1 = 1 = 4 + A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

ΑΦ' ΟΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

$$\begin{cases} A + B = -2 \\ A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -3 \end{cases}$$

ΚΑΙ ΛΥΝΟΝΤΑΣ ΤΟ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΑ A, B.

Ασκήσεις

(α) Υπολογίστε τον 100 όρο της ακολουθίας x_n με $x_0 = 2$ $x_1 = 4$ και

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} - 3$$

(β) Υπολογίστε τον x_5 από

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$$

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_3 = 2$$

(γ) (ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ – ΒΛΕΠΕ LIU)

ΛΥΣΤΕ ΤΗΝ: $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2} + 5$

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 0$$

(δ) (ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ – ΓΙΑΤΙ ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ ΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ...)

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕ ΤΗΝ ΛΥΣΗ ΤΗΣ:

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2} + 3$$

$$x_0 = 1 \quad x_1 = -1$$

(ε) ΛΥΣΤΕ ΤΗΝ:

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + 3n - 1$$

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 2$$