ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ 1/12/03

ΙΣΟΤΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ - ΜΕΘΟΔΟΣ LAGRANGE

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

$$\max \text{ (ή min) } f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

για $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τέτοια ώστε

$$k \text{ περιορισμοί} \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

. ΠΡΟΣΟΧΗ : ΤΟ k ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΠΟΛΥ ΙΣΟ ΜΕ n.

. ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ $g_j(x_1, \ldots, x_n)$ $j = 1, 2, \ldots, k$ ΘΑ ΕΙΧΕ ΛΙΓΕΣ ή ΚΑΙ ΚΑΜΜΙΑ ΛΥΣΗ.

. ΑΠΛΗ ΛΥΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ : ΑΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ "ΛΥΣΟΥΜΕ" ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ g_j ΘΑ ΠΡΟΚΥΨΟΥΝ $n-k$ ΕΛΕΥΘΕΡΟΙ ΑΓΝΩΣΤΟΙ, ΤΟΥΣ ΟΠΟΙΟΥΣ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΗΣΟΥΜΕ ΣΤΗΝ f ΚΑΙ ΝΑ ΕΧΟΥΜΕ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ $n-k$ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

π.χ. $\min \; x^2 + 2y^2 + 3z^2$

με $x + y + z = 0$

$2x - y + z = 3$

ΓΡΑΦΟΥΜΕ ΤΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ ΩΣ

$x + y = -z$

$2x - y = 3 - z$

ΛΥΝΟΝΤΑΣ ΩΣ ΠΡΟΣ x, y ΕΧΟΥΜΕ

$x = 1 - \frac{2}{3}z \quad y = -1 - \frac{z}{3}$

ΟΠΟΤΕ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΑΓΝΩΣΤΟ z : $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = f(x(z), y(z), z)$
$= g(z) = (1 - \frac{2}{3}z)^2 + 2(1 + \frac{z}{3})^2 + 3z^2$

ΠΟΥ ΛΥΝΕΤΑΙ ΘΕΤΟΝΤΑΣ $dg/dz = 0$.

- ΑΥΤΗ Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΕΦΙΚΤΗ ΑΝ ΔΕΝ ΛΥΝΕΤΑΙ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ $g=0$

ΕΜΜΕΣΗ ΛΥΣΗ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ LAGRANGE

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΣΤΩ x, $x+\Delta x$ ΙΚΑΝΟΠΟΙΟΥΝ ΤΟΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ $g=0$, ΔΗΛΑΔΗ $g(x)=g(x+\Delta x)=0$. ΤΟΤΕ ΑΝ Δx ΕΙΝΑΙ "ΜΙΚΡΟ" ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΕΙ ΤΗΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΤΗΣ ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΗΣ.

ΕΠΙΣΗΣ: $g(x+\Delta x) \simeq g(x) + \nabla g(x)\cdot\Delta x$

ΑΛΛΑ $g(x+\Delta x) = g(x) = 0$ ΟΠΟΤΕ

$$\nabla g(x)\cdot\Delta x = 0$$

ΑΡΑ ΤΟ $\nabla g(x)$ ΕΙΝΑΙ ΚΑΘΕΤΟ ΣΤΗΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΤΗΣ ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΗΣ ΑΡΑ ΕΙΝΑΙ "ΚΑΘΕΤΟ ΣΤΗΝ ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΗ".

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ • $g(x,y) = x^2+y^2-1$

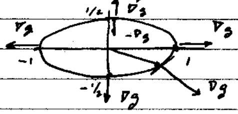
ΚΑΙ Η ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΗ $\{(x,y) \mid g(x,y)=0\}$ ΕΙΝΑΙ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ ΚΥΚΛΟΥ ΑΚΤΙΝΟΣ 1.

ΕΙΝΑΙ $\nabla g = (\partial g/\partial x, \partial g/\partial y) = (2x, 2y)$ ΠΟΥ ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΕΙΝΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΚΑΘΕΤΟΣ ΣΤΗΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

• $g(x,y) = x^2+4y^2-1$

Η ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΕΛΛΕΙΨΗ

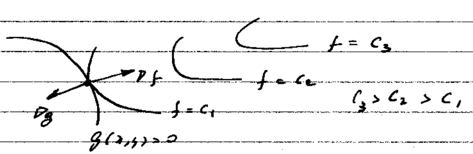
ΑΣ ΚΑΘΕΤΟ ΣΤΟ (x,y) ΕΙΝΑΙ $(2x, 8y)$



ΜΕΘΟΔΟΣ LAGRANGE ΜΕ 1 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ ΚΑΙ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ ΣΕ 2 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

max $f(x,y)$



ΣΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΟΙ ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΕΣ $g=0$ ΚΑΙ $f=c_1$ ΕΦΑΠΤΟΝΤΑΙ ΑΡΑ ΤΑ ∇f ΚΑΙ ∇g ΕΙΝΑΙ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΗΛΑΔΗ $\nabla f = -\mu \nabla g$ ΟΠΟΥ μ ΑΡΙΘΜΟΣ!

ΑΡΑ ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ $(\bar{x},\bar{y})$ ΛΥΣΗ, ΕΙΝΑΙ

- $\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = -\mu \nabla g(\bar{x},\bar{y})$
- $g(\bar{x},\bar{y}) = 0$

Η ΠΡΩΤΗ ΣΧΕΣΗ ΣΥΝΕΠΑΓΕΤΑΙ ΔΥΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

- $\partial f/\partial x\,(\bar{x},\bar{y}) + \mu\, \partial g/\partial x\,(\bar{x},\bar{y}) = 0$
- $\partial f/\partial y\,(\bar{x},\bar{y}) + \mu\, \partial g/\partial y\,(\bar{x},\bar{y}) = 0$

ΠΟΥ ΜΑΖΙ ΜΕ ΤΗΝ $g(\bar{x},\bar{y}) = 0$ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝ 3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

. ΑΡΑ ΑΝ ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ, ΑΥΤΟ ΕΙΝΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

$$\partial f/\partial x + \mu\, \partial g/\partial x = 0$$
$$\partial f/\partial y + \mu\, \partial g/\partial y = 0$$
$$g(x,y) = 0$$

ΩΣ ΠΡΟΣ 3 ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ x, y, μ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. min x^2+y^2+xy

με $g(x,y) = x+y-1 = 0$.

ΟΙ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΙΝΑΙ

- $\partial f/\partial x + \mu\, \partial g/\partial x = 2x + y + \mu = 0$
- $\partial f/\partial y + \mu\, \partial g/\partial y = 2y + x + \mu = 0$
- $x + y = 1$

ΟΙ ΔΥΟ ΠΡΩΤΕΣ ΔΙΝΟΥΝ ΛΥΝΟΝΤΑΣ ΩΣ ΠΡΟΣ μ

$$x = y = -\mu/3$$

ΕΦΟΣΟΝ $x=y$, Η ΤΡΙΤΗ ΣΧΕΣΗ ΔΙΝΕΙ $x=y=1/2$
ΚΑΙ ΑΡΑ $\mu = -3/2$

· Η ΤΙΜΗ ΤΟΥ μ ΕΙΝΑΙ ΠΟΛΥ ΧΡΗΣΙΜΗ!

~~[illegible]~~ ΓΙΑ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ: π.χ.

$$\min f(x,y,z) = 2x^2+y^2+2z^2+xy-2xz$$

$g(x,y,z): \; x+y-z=5$

ΟΙ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΙΝΑΙ · $\nabla f + \mu \nabla g = 0$ (3 ΣΧΕΣΕΙΣ)
· $g = 0$ (4η ΣΧΕΣΗ)

ΔΗΛΑΔΗ

$$\partial f/\partial x + \mu\, \partial g/\partial x = 4x + y - 2z + \mu = 0$$

$$\partial f/\partial y + \mu\, \partial g/\partial y = 2y + x + \mu = 0$$

$$\partial f/\partial z + \mu\, \partial g/\partial z = 4z - 2x - \mu = 0$$

ΚΑΙ $x + y - z = 5$

ΛΥΝΟΝΤΑΣ ΤΙΣ 3 ΠΡΩΤΕΣ ΩΣ ΠΡΟΣ μ ΕΧΟΥΜΕ
$x = 0 \quad y = -\mu/2 \quad z = \mu/4$
ΟΠΟΤΕ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΕΤΑΡΤΗ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ $\mu = -20/3$
ΑΠΟ ΟΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΤΑ $x,y,z \Rightarrow 0,\ 10/3,\ -5/3$

ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ – ΠΟΛΛΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ.

ΕΣΤΩ ΤΩΡΑ ΕΝΑ ΥΠΟΤΙΘΕΜΕΝΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

$$\max \ (\acute{\eta} \min) \ f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\text{ΜΕ} \quad g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

$$\vdots \qquad k \text{ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ}$$

$$g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

ΤΟ ΥΠΟΤΙΘΕΜΕΝΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΤΑΙ ΜΕ $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΜΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗ, ΔΗΛΑΔΗ ΤΟ $(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2 + \Delta x_2, \ldots, \bar{x}_n + \Delta x_n)$

· ΕΦΟΣΟΝ ΤΟ $(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \ldots, \bar{x}_n + \Delta x_n)$ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΟΛΟΥΣ ΤΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ, ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ

$$\nabla g_j(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \cdot (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = 0 \qquad (\text{ΓΙΑΤΙ;})$$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ ΒΕΛΤΙΣΤΟ $\nabla f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \cdot (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = 0$

· ΔΙΟΤΙ ΑΝ π.χ. $\nabla f \cdot \Delta x > 0$, ΜΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΣΤΟ x ΚΑΤΑ Δx ΘΑ ΟΔΗΓΟΥΣΕ ΣΕ ΑΥΞΗΣΗ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ (ΤΙ ΘΑ ΣΥΝΕΒΑΙΝΕ ΑΝ $\nabla f \cdot \Delta x < 0$;)

· ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΧΘΕΙ ΟΤΙ ΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΣΥΝΕΠΑΓΕΤΑΙ ΟΤΙ ΤΟ $\nabla f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΤΩΝ $\nabla g_j(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ ΔΗΛΑΔΗ

$$\nabla f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) + \mu_1 \nabla g_1(\bar{x}_1, \ldots) + \ldots + \mu_k \nabla g_k(\bar{x}_1, \ldots) = 0$$

ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ $\mu_1, \ldots, \mu_k$.

· ΕΤΣΙ ΟΙ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΕΞΗΣ $n + k$ ΣΧΕΣΕΙΣ

$$\begin{cases} \nabla f + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \nabla g_j = 0 & n \text{ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΙΑ ΓΙΑ ΚΑΘΕ } x_i \\ g_j = 0 & k \text{ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΙΑ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ} \end{cases}$$

· ΤΑ ΥΠΟΨΗΦΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΑ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ $x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.</u>

$$\min \quad x + 2y - z = f(x,y,z)$$

ΜΕ

$$x^2+y^2+z^2-1 = 0 = g_1(x,y,z)$$
$$2x+3y+z = 0 = g_2(x,y,z)$$

ΟΙ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΚΦΡΑΖΟΝΤΑΙ ΣΥΝΗΘΩΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΛΑΓΚΡΑΝΖΙΑΝΗ (Lagrangean) ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$\mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n,\mu_1,\ldots,\mu_k) = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j g_j(x_1,\ldots,x_n).$$

ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ

$$\begin{cases} \partial\mathcal{L}/\partial x_i = \partial f/\partial x_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \, \partial g_j/\partial x_i = 0 & i=1,\ldots,n \\ \text{ΚΑΙ} \quad \partial\mathcal{L}/\partial\mu_j = g_j(x_1,\ldots,x_n) = 0 & j=1,\ldots,k. \end{cases}$$

ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΑΣ

$$\mathcal{L} = x + 2y - z + \mu_1(x^2+y^2+z^2-1) + \mu_2(2x+3y+z)$$

ΟΠΟΤΕ

$$\partial\mathcal{L}/\partial x = 1 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial y = 2 + 2\mu_1 y + 3\mu_2 = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial z = -1 + 2\mu_1 z + \mu_2 = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial\mu_1 = x^2+y^2+z^2-1 = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial\mu_2 = 2x+3y+z = 0$$

ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΥΤΟ (5 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - 5 ΑΓΝΩΣΤΟΙ) ΕΙΝΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ, ΠΑΡ' ΟΛ' ΑΥΤΑ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΑΠΛΟΠΟΙΗΘΕΙ: ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΡΩΤΕΣ 3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΧΟΥΜΕ

$$x = -\frac{1}{2\mu_1}(2\mu_2+1) \quad y = -\frac{1}{2\mu_1}(3\mu_2+2)$$

$$z = -\frac{1}{2\mu_1}(\mu_2-1)$$

ΟΠΟΤΕ ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩΝΤΑΣ ΣΤΗΝ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΣΧΕΣΗ ΚΑΙ ΑΠΑΛΟΙΦΟΝΤΑΣ ΤΟ $2\mu_1$ ΕΧΟΥΜΕ

$$2x+3y+z = 0 = -\frac{1}{2\mu_1}\,2(2\mu_2+1) - \frac{3}{2\mu_1}(3\mu_2+2) + \left(-\frac{1}{2\mu_1}\right)(\mu_2-1) \Rightarrow$$

$$0 = 4\mu_2+2+9\mu_2+6+\mu_2-1 \Rightarrow \mu_2 = -1/2$$

ΟΠΟΤΕ $x=0 \quad y=\lambda \quad z=-3\lambda \quad (\lambda = -1/4\mu_1)$

ΑΠΟ ΤΗΝ 4η ΣΧΕΣΗ ΕΙΝΑΙ $\lambda^2+9\lambda^2=1$ ή

$$\lambda = \pm 1/\sqrt{10}$$

· ΠΟΙΟ λ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΣΩΣΤΟ; ΤΟ ΘΕΤΙΚΟ Ή ΤΟ ΑΡΝΗΤΙΚΟ; ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩΝΤΑΣ ΣΤΗΝ

$$f = x+2y-z \Rightarrow f = 11\lambda$$

ΒΛΕΠΟΥΜΕ ΟΤΙ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΠΙΛΕΓΕΙ ΤΟ ΑΡΝΗΤΙΚΟ λ ΓΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟ, ΤΟ ΘΕΤΙΚΟ ΓΙΑ ΜΕΓΙΣΤΟ!

(ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η ΛΥΣΗ ΣΤΟ SOLVER ΕΧΕΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑ!)

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΩΝ μ.

· ΤΑ μ_j ΟΝΟΜΑΖΟΝΤΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΣ LAGRANGE ΚΑΙ ΕΧΟΥΝ ΜΕΓΑΛΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ!

· ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΕΙΧΑΜΕ ΛΥΣΕΙ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΕΙΧΑΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΘΕΙ ΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΣ

ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΤΟ ΙΔΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΝΕΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ $g_j(x_1,..,x_n)=\varepsilon_j$ ΑΝΤΙ ΓΙΑ $g_j(x_1,..,x_n)=0$. ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΗΤΑΝ ΣΤΟ $(\bar{x}_1,..,\bar{x}_n)$ ΚΑΙ ΤΟ ΝΕΟ ΣΤΟ $(\bar{x}_1+\delta x_1, \bar{x}_2+\delta x_n, \dots)$. ΤΟΤΕ ΑΝ ΤΑ ε_j ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΑ, ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ

$$\nabla g_j(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)\cdot(\delta x_1,\dots,\delta x_n)=\varepsilon_j \quad (\text{ΓΙΑΤΙ})$$

Η ΔΕ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΣΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΙΝΑΙ

$$\nabla f(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)\cdot(\delta x_1,\dots,\delta x_n)$$

ΑΛΛΑ $\nabla f=-\sum_{j=1}^{k}\mu_j\nabla g_j$ ΚΑΙ ΑΡΑ

$$\nabla f\cdot\delta x=-\sum_{j=1}^{k}\mu_j\underbrace{(\nabla g_j\cdot\delta x)}_{=\varepsilon_j}=-\sum_{j=1}^{m}\mu_j\varepsilon_j$$

ΑΥΤΟ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΟΤΙ Η ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΚΑΤΑ ε_j ΤΟΥ j-ΣΤΟΥ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥ ΜΕΤΑΒΑΛΕΙ ΤΗΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΚΑΤΑ $(-\mu_j)\cdot\varepsilon_j$, ΔΗΛΑΔΗ ΤΟ μ_j ΔΕΙΧΝΕΙ ΠΟΣΟ ΕΠΗΡΕΑΖΕΙ Ο j ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ!

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u> ΣΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΝΟΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥ

$$\min\ x^2+y^2+xy \quad \text{με} \quad x+y-1=0$$

ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΗΤΑΝ $3/4$ $(x=y=1/2 \quad \mu=-3/2)$

ΑΝ ΤΩΡΑ Ο ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΓΙΝΕΙ $x+y=1{,}1$

ΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΑ ΕΙΝΑΙ $x=y=0{,}55$ ΚΑΙ Η ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΕΙΝΑΙ $0{,}9075$, ΔΗΛΑΔΗ ΜΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗ $\Delta f=0{,}9075-0{,}75=0{,}1575$

Η ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΠΟΥ ΠΡΟΒΛΕΠΕΙ Η ΘΕΩΡΙΑ ΕΙΝΑΙ

$$(-\mu)\cdot\varepsilon=-(-3/2)\cdot 0{,}10=0{,}1500\ !$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

· ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΛΥΣΗ n ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ n ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ. ΔΙΝΟΥΜΕ ΜΙΑ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

ΜΙΑ ΕΞΙΣΩΣΗ $f(x)=0$ $f: R \to R$

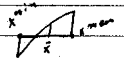
Α. ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ : ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

0. ΑΡΧΙΖΟΥΜΕ ΜΕ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑ $x_i^{min} \le x_i^{max}$ ΤΕΤΟΙΑ ΩΣΤΕ $f(x_i^{min}) < 0$ $f(x_i^{max}) > 0$

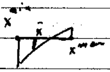
ΕΡΩΤΗΣΗ: ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΑΡΧΙΚΑ ΤΕΤΟΙΑ ΣΗΜΕΙΑ;

ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΕΝΑ x^* ΜΕ $f(x^*)=0$ ΚΑΙ $x^* \in [x_i^{min}, x_i^{max}]$

1. ΘΕΤΟΥΜΕ $\bar{x}_i = \dfrac{x_i^{min} + x_i^{max}}{2}$



ΑΝ $f(\bar{x}_i) > 0$ ΤΟΤΕ $x^* \in [x_i^{min}, \bar{x}_i]$
ΑΡΑ ΘΕΤΟΥΜΕ $x_{i+1}^{min} \leftarrow x_i^{min}$ $x_{i+1}^{max} \leftarrow \bar{x}_i$



ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ $f(\bar{x}_i) < 0$ ΟΠΟΤΕ $x^* \in [\bar{x}_i, x_i^{max}]$
ΑΡΑ ΘΕΤΟΥΜΕ $x_{i+1}^{max} \leftarrow x_i^{max}$ ΚΑΙ
$x_{i+1}^{min} \leftarrow \bar{x}_i$

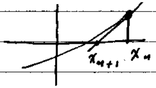
ΤΩΡΑ $\Delta x_{i+1} = [x_{i+1}^{max} - x_{i+1}^{min}] = \Delta x_i / 2$ (1)

ΘΕΤΟΥΜΕ $i \leftarrow i+1$

2. ΑΝ $\Delta x_i < \varepsilon$ ΣΤΑΜΑΤΑΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΥΜΕ ΤΟ 1

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΙΝΑΙ ΑΠΛΗ, ΔΕΝ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ. ΟΜΩΣ ΕΙΝΑΙ ΣΧΕΤΙΚΑ ΑΡΓΗ: ΑΝ ΑΡΧΙΣΟΥΜΕ ΜΕ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ $\Delta x = 1$ ΣΕ 10 ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΕΧΟΥΜΕ ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΜΟΝΟ ΕΝΟΣ ΧΙΛΙΟΣΤΟΥ!

ΜΕΘΟΔΟΣ ΝΕΥΤΩΝΑ: ΤΑΧΥΤΑΤΗ ΑΛΛΑ ΑΠΑΙΤΕΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ



ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗΝ f ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΤΙΚΗ ΑΝ Η f'' ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΗ (ΓΙΑΤΙ;) ΕΙΝΑΙ Η $f(x+\Delta x) \cong f(x)+f'(x)\Delta x$

ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΕΝΑ Δx ΩΣΤΕ Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΝΑ ΜΗΔΕΝΙΖΕΤΑΙ, ΔΗΛΑΔΗ $0=f(x_{n+1}) \cong f(x_n)+f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$

ΑΡΑ ΘΕΤΟΥΜΕ $0 = f(x_n)+f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$

ΟΠΟΤΕ $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΙΝΑΙ ΤΑΧΥΤΑΤΗ. ΛΑΘΟΣ: ΑΝ x^* ΕΙΝΑΙ ΡΙΖΑ ΚΑΙ ΤΟ x_n ΕΙΝΑΙ "ΚΟΝΤΑ" ΣΤΟ x^* ΙΣΧΥΕΙ

$$|x_{n+1}-x^*| \leq \beta\,|x_n-x^*|^2$$

ΕΤΣΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΤΟΥ β ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ $|x_{n+1}-x^*|$ ΜΕΙΩΝΕΤΑΙ ΤΑΧΥΤΑΤΑ

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕ ΤΟΝ ΦΥΣΙΚΟ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟ ΤΟΥ 10 ~~ΑΠΟ~~ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ e^x

ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΡΙΖΑ ΤΗΣ

$$f(x) = e^x - 10$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΝΕΥΤΩΝΑ ΔΙΝΕΙ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n}-10}{e^{x_n}} = x_n - 1 + 10e^{-x_n}$$

ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΕ $x_0=1$ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ:

Αριθμός Επανάληψης	xn	exp(xn)
0	1.00000000	2.71828183
1	3.67879441	39.59862564
2	2.93132843	18.75252535
3	2.46458994	11.75865940
4	2.31502702	10.12519652
5	2.30266217	10.00077084
6	2.30258510	10.00000003
7	2.30258509	10.00000000
8	2.30258509	10

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ EXCEL

ΠΟΛΛΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΝΕΥΤΩΝΑ ΕΠΕΚΤΕΙΝΕΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΛΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ. ΓΙΑ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ x, y ΙΣΧΥΕΙ

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \simeq f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

$$g(x+\Delta x, y+\Delta y) \simeq g(x,y) + g_x(x,y)\Delta x + g_y(x,y)\Delta y$$

ΟΠΟΥ $f, g: R^2 \to R$ ΚΑΙ $f_x = \partial f/\partial x \quad f_y = \partial f/\partial y$

$$g_x = \partial g/\partial x \quad g_y = \partial g/\partial y$$

ΘΕΤΟΝΤΑΣ $f(x+\Delta x, y+\Delta y) = g(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$

ΕΧΟΥΜΕ ΟΤΙ $\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = -J(x,y)^{-1}\begin{pmatrix}f(x,y)\\ g(x,y)\end{pmatrix}$

ΟΠΟΥ $J(x,y) = \begin{bmatrix}\partial f/\partial x & \partial f/\partial y\\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y\end{bmatrix}$ (Ο ΠΙΝΑΚΑΣ JACOBIAN)

ΑΡΑ Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΝΕΥΤΩΝΑ ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΩΣ

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} - J^{-1}(x_n, y_n)\cdot\begin{pmatrix}f(x_n,y_n)\\ g(x_n,y_n)\end{pmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΛΥΣΤΕ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

$$f(x,y) = y e^x - 10 = 0$$

$$g(x,y) = x + y - 4 = 0$$

ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΝΕΥΤΩΝΑ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΕΙΝΑΙ $\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ye^x - 10\\ x+y-4\end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix}ye^x & e^x\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$J^{-1} = \dfrac{1}{y-1}\begin{pmatrix}e^{-x} & -1\\ -e^{-x} & y\end{pmatrix}$ ΚΑΙ $\Rightarrow$ ΠΡΕΠΕΙ $y \neq 1$

Η ΣΕΙΡΑ ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ ΓΙΑ $x_0 = 4 \quad y_0 = 0$ ΔΙΝΕΤΑΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ:

ΕΠΑΝΑΛ.	X	Y			JACOBIAN			J^{-1}				
0	4	0	-10	f	0	54.59815		-0.018316	1		0.1831564	ΔX
			0	g	1	1		0.0183156	0		-0.183156	ΔY
1	3.8168436	0.1831564	-1.673621	f	8.3263793	45.460491		-0.026929	1.2242245		0.0450696	ΔX
			0	g	1	1		0.0269294	-0.224225		-0.04507	ΔY
2	3.771774	0.228226	-0.081962	f	9.9180383	43.457089		-0.029816	1.2957161		0.0024438	ΔX
			0	g	1	1		0.029816	-0.295716		-0.002444	ΔY
3	3.7693302	0.2306698	-0.00023		9.9997704	43.351019		-0.029984	1.299832		6.885E-06	⋮
			0		1	1		0.0299839	-0.299832		-6.88E-06	
4	3.7693233	0.2306767	-1.82E-09		10	43.350721		-0.029984	1.2998436		5.451E-11	
			0		1	1		0.0299844	-0.299844		-5.45E-11	
5	3.7693233	0.2306767	0		10	43.350721		-0.029984	1.2998436		0	
			0		1	1		0.0299844	-0.299844		0	
6	3.7693233	0.2306767	0		10	43.350721		-0.029984	1.2998436		0	
			0		1	1		0.0299844	-0.299844		0	