26/11/03

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 Hillier Lieberman 6th Edition
(Nonlinear Programming)

· ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ (UNCONSTRAINED OPTIMIZATION)

· $f : R^N \rightarrow R$ N - ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

- $f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_N+\Delta x_N) =$

$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_N) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_N)\Delta x_i$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)\Delta x_i \Delta x_j$$

(ΓΙΑ $x_i \le x_i^* \le x_i + \Delta x_i \quad i = 1, \ldots, N$)

· ΓΙΑ "ΜΙΚΡΑ" Δx_i ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΜΟΝΟ
ΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΟΡΟ.

- ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ: $\Delta f = f(x_1+\Delta x_1, \ldots) - f(x_1, x_2, \ldots)$

$$\cong \sum_{i=1}^{N} \partial f/\partial x_i \,(x_1, \ldots, x_N) \cdot \Delta x_i$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ · $f(x_1, x_2) = \exp(x_1 + x_2^2)$

· $\partial f/\partial x_1 = \exp(x_1 + x_2^2) \quad \partial f/\partial x_2 = 2x_2 \exp(x_1 + x_2^2)$

· $f(0,0) = \exp(0) = 1$

· $f(0{,}1, -0{,}1) = \exp(0{,}1 + 0{,}01) = 1{,}1163$

$\Delta f = 0{,}1163$

$\partial f/\partial x_1 = 1 \quad \partial f/\partial x_2 = 0$

$\Delta f = 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot (-0{,}1) = 0{,}1000$

ΣΦΑΛΜΑ $\approx 0{,}01$ ΔΗΛΑΔΗ $\sim \Delta x^2$

• ΠΩΣ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ;

$$\Delta f = f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) - f(x_1, x_2) =$$
$$f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) - f(x_1+\Delta x_1, x_2) + f(x_1+\Delta x_1, x_2)$$
$$- f(x_1, x_2)$$
$$\cong \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+\Delta x_1, x_2)\,\Delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\,\Delta x_1$$

ΑΝ Η $\partial f/\partial x_2$ ΕΙΝΑΙ "ΣΥΝΕΧΗΣ" ΤΟΤΕ

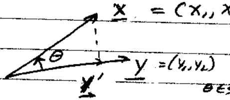
$$\partial f/\partial x_2\,(x_1+\Delta x_1, x_2) \simeq \partial f/\partial x_2\,(x_1, x_2) +$$
$$+ \partial^2 f/\partial x_1\partial x_2\,(x_1^*, x_2)\,\Delta x_1$$

ΟΠΟΤΕ ΕΧΟΥΜΕ

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\,\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\,\Delta x_2 +$$
$$+ \underbrace{\partial^2 f/\partial x_1\partial x_2\,(x_1^*, x_2)\,\Delta x_1 \cdot \Delta x_2}_{\text{ΑΜΕΛΗΤΕΟ !}}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

· ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$\underline{x} \cdot \underline{y} \equiv |x| \cdot |y| \cdot \cos\theta$$
$$\overset{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2$$

ΓΕΝΙΚΑ $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$ $\quad \underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

ΚΑΘΕΤΟΤΗΣ : $\underline{x} \perp \underline{y} \iff \underline{x} \cdot \underline{y} = 0$

ή $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$

ΣΤΟ <u>EXCEL</u> : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ SUMPRODUCT (A1..A5; B1..B5)
ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΟ A1·B1 + A2·B2 + .. + A5·B5

<u>ΕΚΦΡΑΣΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ.</u> $\nabla f(x_1, \ldots, x_N) \equiv$ ΒΑΘΜΙΔΑ
ΚΛΙΣΗ
GRADIENT

$$\equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_N), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_N), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1, \ldots, x_N)\right)$$

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u> $\nabla f(0,2)$ ΑΝ $f(x_1, x_2) = \exp(x_1 + x_2^2)$
ΙΣΟΥΤΑΙ ΜΕ $(1,0)$. ΜΕ ΤΙ ΙΣΟΥΤΑΙ
ΤΟ $\nabla f(-1, 1)$;

<u>ΕΚΦΡΑΣΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ</u>

$$\cdot \Delta f \cong \nabla f \cdot \Delta \underline{x} = \sum_{i=1}^{N} \partial f / \partial x_i (x_1, \ldots) \cdot \Delta x_i$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> ΑΝ $\nabla f(x_1, \ldots, x_N) \neq 0$ ΤΟΤΕ
ΤΟ $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟ

<u>ΔΙΟΤΙ</u> ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΜΙΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ
ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ $\Delta x(\varepsilon) \equiv \left(\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots\right)$

$= \varepsilon \nabla f$ ΓΙΑ $\varepsilon \in R$
ΤΟΤΕ $\Delta f \cong \varepsilon \nabla f \cdot \nabla f$
$$= \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \left(\partial f / \partial x_i\right)^2$$

ΑΡΑ ΓΙΑ ε ΜΙΚΡΟ ΕΧΟΥΜΕ $\Delta f > 0$
ΚΑΙ ΑΡΑ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΑΥΞΗΣΟΥΜΕ ΤΗΝ
ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

· <u>ΑΡΑ</u> ΑΝΑΓΚΑΙΟ ΓΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΣΤΟ x^* : $\nabla f(x^*) = 0$

· <u>ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ:</u> ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ
ΠΟΥ ΟΤΑΝ $\nabla f \neq 0$, ΒΕΛΤΙΩΝΟΥΝ ΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗ
ΤΙΜΗ ΤΗΣ f ΕΩΣ ΟΠΟΥ ΒΡΕΘΕΙ
ΑΚΡΟΤΑΤΟ

ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΚΑΤΑ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ $\underline{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$

ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΤΗΣ f ΠΑΝΩ ΣΤΑ ΣΗΜΕΙΑ $\underline{x} + \tau \underline{d}$ για $\tau \in \mathbb{R}$, ΑΡΙΘΜΟ;
($\underline{x}$, $\underline{d}$ ΣΤΑΘΕΡΑ)

ΠΑΡΑΤΗΡΕΙΣΤΕ ΟΤΙ

$$f(\underline{x} + (\tau + \Delta\tau)\underline{d}) - f(\underline{x}) \simeq \nabla f(x + \tau d) \cdot \Delta\tau\, \underline{d}$$

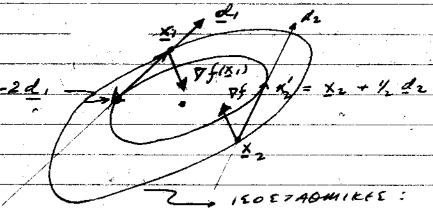
(ΓΙΑΤΙ;)

ΑΡΑ $\dfrac{\Delta f}{\Delta \tau} \simeq \nabla f(\underline{x} + \tau \underline{d}) \cdot \underline{d} \dfrac{\Delta\tau}{\Delta\tau}$ ($\Delta\tau$: αριθμοί)

ΚΑΙ ΕΤΣΙ $\displaystyle\lim_{\substack{\Delta\tau \to 0 \\ \tau = 0}} \frac{\Delta f}{\Delta \tau}(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x}) \cdot \underline{d}$
$= df/d\tau$

• ΑΡΑ ΑΝ $\nabla f \cdot \underline{d} \neq 0$ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΑΥΞΗΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΤΙΜΗ ΤΗΣ f ΘΕΤΟΝΤΑΣ $\Delta\tau > 0$ ΑΝ $\nabla f \cdot d > 0$ ή $\Delta\tau < 0$ ΑΝ $\nabla f \cdot d < 0$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΣΤΗΝ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ d



$$\{ \underline{x} \mid f(\underline{x}) = c \}$$

ΣΤΟ $\underline{x}_1$ $\nabla f(\underline{x}_1) \cdot \underline{d}_1$ ΕΙΝΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟ. ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ $\underline{d}_1$ ΕΙΝΑΙ ΣΤΟ

$\underline{x}_1' = \underline{x}_1 - 2\underline{d}_1$

ΣΤΟ x_2, $\nabla f \cdot \underline{d}_2 > 0$ ΑΡΑ $\underline{x}_2' = \underline{x}_2 + \frac{1}{2}\underline{d}_2$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

ΕΣΤΩ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x,y) = x^2+y^2-xy$
ΚΑΙ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΤΗΝ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ, ΟΠΟΤΕ
ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΤΗΣ

$$g(x,y) = -\left[x^2+y^2-xy\right]$$

- ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΑΡΧΙΖΟΥΜΕ ΜΕ ΕΣΤΩ $(x,y) = (3,5)$
ΚΑΙ ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ $(1,0)$, ΔΗΛΑΔΗ ΣΗΜΕΙΑ $(3+\tau, 5)$ ΟΠΟΤΕ

$$g(\tau) = -\left[(3+\tau)^2+5^2-5(3+\tau)\right]$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{dg}{d\tau} = 2(3+\tau)-5 \Rightarrow \tau = -1/2$$

ΚΑΙ ΕΤΣΙ ΤΟ ΝΕΟ (x,y) ΕΙΝΑΙ $(2{,}5, 5)$

- ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ $(0,1)$ ΔΗΛΑΔΗ ΣΗΜΕΙΑ $(2{,}5, 5+\tau)$ ΟΠΟΤΕ $g(\tau) = -\left[2{,}5^2+(5+\tau)^2 - 2{,}5(5+\tau)\right]$

ΚΑΙ $-dg/d\tau = 2(5+\tau) - 2{,}5 = 0$ ΑΡΑ
$\tau = -7{,}5/2$ ΜΕ ΝΕΟ $(x,y) \leftarrow (2{,}5,\ 5 - \frac{7{,}5}{2})$
ή $(2{,}5,\ 1{,}25)$

- Η ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ ΤΗΣ f ΕΙΝΑΙ $f(3,5) = 19$
ΕΝΩ Η ΤΕΛΙΚΗ $f(2{,}5,\ 1{,}25) \doteq 4{,}69$

- ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΣΕ $x = y = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 1. ΑΡΧΙΖΟΝΤΑΣ ΜΕ (x_n, y_n) ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΟΝΤΑΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ $(1,0)$ ΑΠΟΔΕΙΞΤΕ ΟΤΙ ΤΟ ΕΠΟΜΕΝΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ $(y_n/2, y_n)$. ΤΙ ΙΣΧΥΕΙ ΑΝ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ ΩΣ ΠΡΟΣ $(0,1)$; ΜΕ ΒΑΣΗ ΑΥΤΑ, ΑΝΑΛΥΣΤΕ ΤΟΝ ΣΧΕΤΙΚΟ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ ΜΕ ΑΝΑΖΗΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑ $(1,0), (0,1), (1,0), (0,1)$, Κ.Ο.Κ.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

- ΕΣΤΩ $e_1, e_2, \ldots e_N$ ΤΑ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
- ΑΡΧΙΖΟΝΤΑΣ ΑΠΟ ΑΥΘΑΙΡΕΤΟ $\underline{x}_0$ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΟΥΜΕ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ e_1 ΚΑΙ ΠΑΙΡΝΟΥΜΕ ΤΟ $\underline{x}_1$
- ΑΡΧΙΖΟΝΤΑΣ ΑΠΟ ΤΟ $\underline{x}_1$ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ e_2 ΠΑΙΡΝΟΥΜΕ ΤΟ $\underline{x}_2$ Κ.Ο.Κ.
- ΣΥΝΕΧΙΖΟΥΜΕ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΝΤΑΣ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΙΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΔΗΛΑΔΗ $e_1, e_2, \ldots, e_N, e_1, e_N, e_1, \ldots$
- ΣΤΑΜΑΤΑΜΕ ΟΤΑΝ <u>ΔΕΝ</u> ΠΑΡΟΥΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΗ N ΦΟΡΕΣ, ΔΗΛΑΔΗ ΑΝ

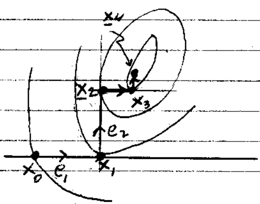
$$\underline{x}_k = \underline{x}_{k+1} = \ldots = \underline{x}_{k+N} = \underline{x}^*$$

ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ $\underline{x}^*$

ΑΣΚΗΣΗ 2 ΑΠΟΔΕΙΞΤΕ ΟΤΙ ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΥ ΕΙΝΑΙ ΟΡΘΟ.

ΣΧΟΛΙΑ - ΑΝ ΚΑΙ Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΕΙΝΑΙ ΟΡΘΟΣ <u>ΔΕΝ</u> ΕΙΝΑΙ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΟ ΝΑ ΤΕΡΜΑΤΙΣΕΙ! ΔΩΣΤΕ ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΟΙ ΣΤΗΝ ΑΣΚΗΣΗ 1.

- ΜΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ ΤΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΔΙΝΕΤΑΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ:



• ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ:

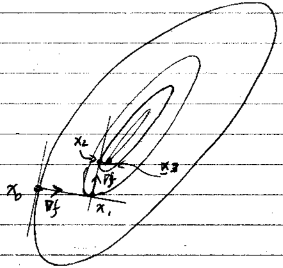
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ

- ΔΙΑΛΕΞΕ ΑΥΘΑΙΡΕΤΟ $\underline{x}_0$, ΘΕΣΕ ΔΕΙΚΤΗ $k=1$
- ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΕ
    - ΥΠΟΛΟΓΙΣΕ ΤΗΝ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ $\underline{d} = \nabla f(\underline{x}_{k-1})$
    - ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΕ ΚΑΤΑ ΤΗΝ $\underline{d}$ ΑΠΟ ΤΟ $\underline{x}_{k-1}$, ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΣ ΕΤΣΙ ΤΟ $\underline{x}_k$ (*)
    - ΣΤΑΜΑΤΗΣΕ ΑΝ $\nabla f(\underline{x}_k)$ "ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟ" (Π.Χ. ΑΝ $\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_k)\right]^2 < \varepsilon$) $\varepsilon = 10^{-3}$
    - ΑΛΛΙΩΣ ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ ΜΕ $k \leftarrow k+1$

ΣΧΟΛΙΑ

- ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑ: ΑΠΑΙΤΕΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ
- ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑ: ΛΙΓΟΤΕΡΑ ΒΗΜΑΤΑ ΑΠΟ Ο,ΤΙ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ



- ΟΙ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ ΠΑΛΙ ΚΑΘΕΤΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ! ΓΙΑΤΙ;
- ΠΑΘΟΛΟΓΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ: ΑΡΚΕΤΑ ΣΥΧΝΗ!

(*) ΤΥΠΙΚΑ: $f(\underline{x}_k) = \max_{\tau} f(\underline{x}_{k-1} + \tau \underline{d})$

ΜΕ $\underline{d} = \nabla f(\underline{x}_{k-1})$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ

· $\min \; f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+4y^2-2xy)$

$$= \frac{1}{2}(x,y)\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

· $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}x-y\\ -x+4y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial f/\partial x\\ \partial f/\partial y\end{pmatrix} \left(= \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)$

· ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΕΙΝΑΙ ΣΤΟ $x=y=0$ ΚΑΘΩΣ Ο ΠΙΝΑΚΑΣ $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ ΕΙΝΑΙ ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΝΟΣ

· ΑΡΧΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΜΕ $x=y=1$ $(x_0,y_0)=(1,1)$
ΟΠΟΤΕ $\nabla f(1,1) = (0,3)$

· ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΟ $\min\limits_{\tau} f(1, 1+3\tau)$

ή $\min\limits_{\tau} \frac{1}{2}\left(1+4(1+3\tau)^2 - 2(1+3\tau)\right)$

ΟΠΟΤΕ $\tau^* = -1/4$ (ΓΙΑΤΙ;) ΚΑΙ ΑΡΑ

$$(x_1,y_1) = (x_0, y_0+3\tau^*) = (1, 1-3/4) = (1, 1/4)$$

ΑΡΑ $(x_1,y_1) = (1, 1/4)$ ΚΑΙ $\nabla f(1, 1/4) = (3/4, 0)$
(ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΤΕ ΟΤΙ $\nabla f(x_0,y_0) \perp \nabla f(x_1,y_1)$!)

· ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΟ $f(1+\frac{3}{4}\tau, 1/4)$ ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΓΙΑ $\tau^* = -1$ (ΓΙΑΤΙ;)

· ΑΡΑ $(x_2,y_2) = (1/4, 1/4)$ ΚΑΙ $\nabla f(x_2,y_2) = (0, 3/4)$
ΕΙΝΑΙ $\nabla f(x_2,y_2) \parallel \nabla f(x_0,y_0)$

· ΠΩΣ ΕΞΕΛΙΣΣΕΤΑΙ Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ;
ΒΛΕΠΕ ΠΙΝΑΚΑ:

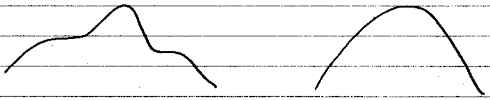
Αριθμός Επανάληψης	t*	x	y	f	fx	fy
0	t	1	1	3	0	3
1	-0.25	1.000	0.250	0.75000	0.750	0.000
2	-1	0.250	0.250	0.18750	0.000	0.750
3	-0.25	0.250	0.062	0.04687	0.187	0.000
4	-1	0.062	0.062	0.01172	0.000	0.187
5	-0.25	0.062	0.016	0.00293	0.047	0.000
6	-1	0.016	0.016	0.00073	0.000	0.047
7	-0.25	0.016	0.004	0.00018	0.012	0.000
8	-1	0.004	0.004	0.00005	0.000	0.012

· ΒΑΣΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΣΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΕΙΝΑΙ Η ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

· ΠΩΣ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΚΑΝΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΧΩΡΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ;

· ΕΣΤΩ ΜΙΑ ΜΟΝΟΜΟΡΦΗ (UNIMODAL) ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΗΛΑΔΗ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΕΝΑ ΜΟΝΑΔΙΚΟ (ΤΟΠΙΚΟ Ή ΟΛΙΚΟ) ΜΕΓΙΣΤΟ Ή ΕΛΑΧΙΣΤΟ

· ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΥΤΕΣ ΕΙΝΑΙ ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΕΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΝΤΩΝΤΑΙ ΣΥΧΝΑ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ.



ΜΟΝΟΜΟΡΦΗ ΚΟΙΛΗ

· ΣΕ ΤΕΤΟΙΕΣ ΜΟΝΟΜΟΡΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Η ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΕΙΝΑΙ ΠΟΛΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΗ: ΒΑΣΙΖΕΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΞΗΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

· ΑΝ $x \leq y \leq z$ ΚΑΙ $f(x), f(z) \leq f(y)$ ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΤΗΣ f ΕΙΝΑΙ ΜΕΤΑΞΥ x ΚΑΙ z!

ΑΠΟΔΕΙΞΤΕ ΤΟ!

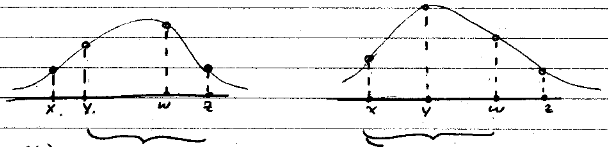
· ΕΣΤΩ ΤΩΡΑ ΟΤΙ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ f ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ w ΜΕ $x < y < w < z$

· ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ $f(w) > f(z)$ (ΓΙΑΤΙ;)

· ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ $f(w) > f(y)$ ΤΟΤΕ ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΕΙΝΑΙ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ $[y, z]$

· ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ $f(w) < f(y)$ ΤΟΤΕ ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΕΙΝΑΙ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ $[x, w]$

ΒΛΕΠΕ ΣΧΗΜΑ:



$f(w) > f(y) \Rightarrow [y, z] \ni MAX$ $\qquad$ $f(w) < f(y) \Rightarrow [x, w] \ni MAX$

- Η ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ ΓΙΝΕΤΑΙ ΜΕ ΣΤΟΧΟ ΤΗΝ ΜΕΙΩΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΚΑΝΟΝΤΑΣ ΛΙΓΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΦΑΝΤΑΣΤΕΙΤΕ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΟΠΟΥ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΗΣ f ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΜΙΑ ΔΑΠΑΝΗΡΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΡΗΣΗ!)

ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΧΡΥΣΗΣ ΤΟΜΗΣ*

- ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΕΧΟΥΜΕ ΔΙΑΠΙΣΤΩΣΕΙ ΟΤΙ ΤΟ MAX ΕΙΝΑΙ ΣΤΟ $[0,1]$ ΧΩΡΙΣ ΑΠΩΛΕΙΑ ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΑΣ
- ΣΧΕΔΙΑΖΟΥΜΕ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΣΤΑ x, y ΜΕ

  $0 < x < y < 1$
- ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ, ΤΟ MAX ΘΑ ΕΙΝΑΙ ΕΙΤΕ ΣΤΟ $[x,1]$ ΕΙΤΕ ΣΤΟ $[0,y]$
- ΤΟ $[x,1]$ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΤΟ y ΟΠΟΥ ΕΧΕΙ ΗΔΗ ΓΙΝΕΙ ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ f
- ΤΟ $[0,y]$ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΤΟ x ...
- ΚΑΛΟ ΘΑ ΕΙΝΑΙ:
  1. ΤΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΠΟΥ ΘΑ ΠΡΟΚΥΨΟΥΝ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ
  2. ΝΑ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ <u>ΟΛΕΣ</u> ΤΙΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

ΑΠΟ ΤΟ 1. ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ Η ΣΥΝΘΗΚΗ $y = 1 - x$

ΑΠΟ ΤΟ 2. ΟΤΙ $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{1}$

* ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ

⇒ ΔΗΛΑΔΗ Η ΘΕΣΗ ΤΟΥ x ΣΤΟ $[0, y]$ ΕΙΝΑΙ
ΟΤΙ ΚΑΙ ΤΟΥ y ΣΤΟ $[0, 1]$

• ΑΡΑ $x = y^2$ ΚΑΙ $y = 1 - x$ ή $y = 1 - y^2$
∴ $y^2 + y - 1 = 0$ ... ΚΑΙ ΑΡΑ
$y^* = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ .... ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ Ο ΛΟΓΟΣ
ΤΗΣ ΧΡΥΣΗΣ ΤΟΜΗΣ!

ΚΑΙ $y^* = 0{,}61803....$

ΕΠΙΣΗΣ $x = y^2 = 0{,}3820...$

• ΑΡΑ ΜΕ ΚΑΘΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΗΣ f
ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΖΕΤΑΙ
ΜΕ y^* (< 1) ΚΑΙ ΕΤΣΙ ΜΕΙΩΝΕΤΑΙ
ΕΚΘΕΤΙΚΑ!

• ΑΝ ΠΧ ΤΟ ΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΙΝΑΙ 10
ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΑ ΑΠΟ 20 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ
ΤΗΣ f ΘΑ ΕΧΗ ΓΙΝΕΙ ΙΣΟ ΜΕ $0{,}0007$.