Επιχειρησιακή Έρευνα - Επαναληπτική Εξέταση - Σεπτέμβριος 2010

Διάρκεια 2 ώρες και 30 λεπτά. Επιτρέπεται μία σελίδα Α4 με σημειώσεις από το μάθημα.
Γράψτε ΜΟΝΟ 4 θέματα (αν γράψετε 5° ΔΕΝ θα ληφθεί υπόψη). Τα υποθέματα έχουν την ίδια στάθμιση εκτός όταν σημειώνεται διαφορετικά. Το 6° θέμα είναι από την προαιρετική ύλη.
Μπορείτε να κρατήσετε τα θέματα.

Θέμα 1.

Εξετάστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$Max\, f(x, y, z, w) = 3x+2y+4z+2w$$

με περιορισμούς

$$3x + 2y + 3z + 4w \le 12$$
$$x + y + 5z + w \le 18$$
$$x, y, z, w \ge 0$$

(α 60%) Λύστε το με την μέθοδο Simplex

(β 30%) Επιβεβαιώστε ότι η λύση που βρήκατε στο (α) επιβεβαιώνει τις συνθήκες Kuhn Tucker

(γ 10%) Ποιά θα ήταν η τιμή του βέλτιστου αν οι περιορισμοί γίνουν

$$3x + 2y + 3z + 4w \le 12{,}1$$
$$x + y + 5z + w \le 17{,}9$$
$$x, y, z, w \ge 0$$

Θέμα 2

Στις διαμορφώσεις σας αγνοείστε περιορισμούς ακεραιότητας.

Μία επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα Α, Β, Γ, χρησιμοποιώντας μία πρώτη ύλη και εργασία. Τα προϊόντα αποθηκεύονται σε μία αποθήκη και παραδίδονται ανά εβδομάδα, οπότε και η αποθήκη αδειάζει. Οι μόνιμοι απασχολούμενοι παρέχουν ανά εβδομάδα 2000 ώρες εργασίας με συνολικό κόστος 20.000 ευρώ, που είναι πάγιο. Η αποθήκη έχει χωρητικότητα 1000 κυβικά. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα χαρακτηριστικά των τριών προϊόντων

Προϊόν / Παράμετρος	Α	Β	Γ
Κέρδος €/τεμάχιο	450	400	350
Εργατοώρες ανά μονάδα προϊόντος	10	6	5
Όγκος μον. προϊόν. σε κυβικά	5	6	4

(α – 60%) Διαμορφώστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους της επιχείρησης και λύστε το.

(β-30%) Διαμορφώστε το πρόβλημα σε περίπτωση που μπορούμε να νοικιάσουμε επιπλέον κυβικά αποθήκης με κόστος 10 € ανά κυβικό την εβδομάδα καθώς επίσης να χρησιμοποιήσουμε υπερωριακή απασχόληση έως το πολύ 1000 ώρες ανά εβδομάδα με επιπλέον κόστος 20 €/ ώρα και έως 500 ώρες εξωτερικών συνεργατών ανά εβδομάδα με κόστος 30€ / ώρα.

(γ-10%) Λύστε το πρόβλημα στο (β)

Υπόδειξη: Αρχίστε από μία αρχική βασική λύση που περιλαμβάνει ΜΟΝΟ το προϊόν Γ, θετική επιπρόσθετη χωρητικότητα αποθήκης, υπερωρίες και συνεργάτες.

Θέμα 3

(α) Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 - y$ την οποία θέλετε να ελαχιστοποιήσετε. Υπάρχει ελάχιστο; Με αρχικό σημείο το (-1,-1) εκτελέστε δύο βήματα της μεθόδου αναζήτησης βαθμίδας και σχολιάστε την συμπεριφορά της μεθόδου ως προς το τι θα έπρεπε να «απαντήσει» στον χρήστη του προγράμματος.

(β) Μία εταιρεία έχει κόστος προμήθειας μίας πρώτης ύλης που δίνεται από την συνάρτηση

$$K(q) = \begin{cases} 0 & \text{αν } q=0 \\ 12 + 2q & \text{αν } q>0 \end{cases}$$

Θέλει να κάνει προγραμματισμό 4 περιόδων j =1, 2, 3, 4 (τώρα βρίσκεται στην περίοδο 1) έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος προμηθειών - αποθήκευσης. Θεωρεί ότι η ζήτηση στις επόμενες περιόδους είναι $d_1=4$, $d_2=2$ $d_3=4$ $d_4=3$ και δεν επιτρέπεται καθυστέρηση, ενώ το κόστος αποθήκευσης είναι 1 €/μονάδα - περίοδο.

(ι-20%) Διατυπώστε την σχετική εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού

(ιι-30%) Λύστε την και προσδιορίστε έτσι την βέλτιστη ποσότητα παραγωγής την $1^η$ περίοδο.

Θέμα 4

(α) Εξετάστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$Max\ 2x+3y$$

με περιορισμούς :

$$x + y \le 5$$
$$2x + 5y \le 4$$
$$5x + 4y \le 6$$
$$5x + 3y \le 4$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

(ι-30%) Εξετάστε αν οι τιμές $x=14/17$ $y= 8/17$ ικανοποιούν τις συνθήκες Kuhn Tucker.

(ιι–20%) Εξετάστε αν οι ίδιες τιμές ικανοποιούν τις συνθήκες KT στο πρόβλημα με τους ίδιους περιορισμούς όπως παραπάνω αλλά νέα αντικειμενική συνάρτηση *(Max)* $x+y$.

(β) Ένας φοιτητής διαθέτει 12 ημέρες για να μελετήσει 3 μαθήματα, στα οποία πρέπει απαραιτήτως να επιτύχει. Ταυτόχρονα θέλει να μεγιστοποιήσει τον μέσο όρο της βαθμολογίας του. Θεωρεί ότι ο παρακάτω πίνακας περιγράφει την βαθμολογία του στα μαθήματα ανάλογα με τον αριθμό ημερών που θα διαθέσει για το καθένα. Χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό βρέστε την βέλτιστη κατανομή ημερών μελέτης στα μαθήματα. Συγκεκριμένα:

(ι) Γράψτε την σχετική εξίσωση Δυναμικού Προγραμματισμού.

(ιι) Λύστε την, δείχνοντας σαφώς τον τρόπο εργασίας σας

Ημέρες μελέτης	Μάθημα Α	Μάθημα Β	Μάθημα Γ
1	2	2	1
2	5	3	3
3	5	5	4
4	6	5	6
5	7	6	7
6	8	6	8
7	9	8	8
8	10	9	9
9 ή παραπάνω	10	10	10

Θέμα 5

(α) Μία εταιρεία χρησιμοποιεί μία πρώτη ύλη με ρυθμό 3600 τεμάχια/έτος χωρίς να είναι επιτρεπτές καθυστερήσεις. Σε κάθε παραγγελία χρεώνεται ένα πάγιο 600 € συν 3 € ανά τεμάχιο για ποσότητες παραγγελίας έως 500 τεμάχια, ενώ για τα τεμάχια άνω των 500 η επιβάρυνση είναι 1 € ανά τεμάχιο . Το κόστος αποθήκευσης είναι 2 € ανά μήνα και τεμάχιο. Ποια η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας;

(β) Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Kuhn Tucker λύστε το πρόβλημα

$$\text{Min}\ x^2 + 2y^2$$

με ανισοτικούς περιορισμούς

$$x+3y \ge 4$$
$$x \le 1/2$$

Υπόδειξη: Εντοπίστε διαγραμματικά την λύση ή κάνετε διερεύνηση θεωρώντας τις μεταβλητές Lagrange θετικές

Θέμα 6^o

(α) Ένα κατάστημα ενός εποχιακού είδους (πχ. Χριστουγεννιάτικα είδη) πωλεί με κέρδος 100% επί της τιμής αγοράς. Τυχόν μη ικανοποιηθείσα ζήτηση δεν ενδιαφέρει τον επιχειρηματία. Η ζήτηση εκτιμάται ότι έχει ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 200 και 600 τεμαχίων. Ποια ποσότητα θα παραγγείλει ο επιχειρηματίας έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο συνολικό του κέρδος σε περίπτωση που

(ι) τα αντικείμενα τα οποία δεν θα πωληθούν μέχρι και την παραμονή των Χριστουγέννων επιστρέφονται με έσοδο 10% της τιμής αγοράς των

(ιι) τα αντικείμενα τα οποία δεν θα πωληθούν όχι μόνο δεν επιστρέφονται αλλά και υπάρχει ένα κόστος απομάκρυνσης 5% της τιμής αγοράς των .

Ερμηνεύστε τα αποτελέσματα που βρήκατε στα (ι), (ιι) παραπάνω.

(β) Βρείτε ένα αναλυτικό τύπο που δίνει τον n-στο όρο της εξίσωσης διαφορών $x_n= 3x_{n-1}+n^2+2$ με αρχικό όρο $x_0=0$. Επιβεβαιώστε τον τύπο σας για π.χ. n=4.

Υπόδειξη: Δοκιμάστε ειδική λύση της μορφής $X(n)=an^2+bn+c$ και εκτιμείστε τις παραμέτρους a,b,c.

Επιχειρησιακή Έρευνα
Λύσεις Σεπτ. 2010

1. α

$$\begin{array}{c} -1 \\ \\ -1/3 \end{array}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & Z \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ 12/3 \\ 18/1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} -1/4 \\ -1/4 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & Z-12 \\ 1 & 2/3 & 1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 4 \\ 0 & 1/3 & 4 & -1/3 & -1/3 & 1 & 14 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ 4/1 \\ 14/4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/12 & 0 & -2+1/12 & -1+1/12 & -1/4 & Z-12-14/4 \\ 1 & 7/12 & 0 & 17/12 & 5/12 & -1/4 & 2/4 \\ 0 & 1/12 & 1 & -1/12 & -1/12 & 0 & 14/4 = 7/2 \end{bmatrix}$$

$x = 1/2 \quad y = 0 \quad z = 7/2 \quad w = 0$

β. $L = 3x + 2y + 4z + 2w + \lambda(12 - 3x - 2y - 3z - 4w) + \mu(18 - x - y - 5z - w) + \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z + \nu_4 w$

Για $z, x > 0$ είναι $\nu_1 = \nu_3 = 0$

$$\partial L/\partial x = 3 - 3\lambda - \mu + \cancel{\nu_1} = 0 \qquad (1)$$
$$\partial L/\partial y = 2 - 2\lambda - \mu + \nu_2 = 0 \qquad (2)$$
$$\partial L/\partial z = 4 - 3\lambda - 5\mu + \cancel{\nu_3} = 0 \qquad (3)$$
$$\partial L/\partial w = 2 - 4\lambda - \mu + \nu_4 = 0 \qquad (4)$$

Η (1) και (3) δίνουν

$$-1\left\{\begin{array}{l} 3\lambda + \mu = 3 \\ 3\lambda + 5\mu = 4 \end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{l} \mu = 1 \rightarrow \mu = 1/4 > 0 \\ \rightarrow \lambda = 11/12 > \end{array}$$ ισοτικά

Εφόσον $\lambda, \mu > 0$ οι περιορισμοί θα πρέπει να ικανοποιούνται πρακτικά ως ισότητα. Τώρα, οι σχέσεις (1)–(4), $\nu_1 = \nu_3 = 0$ δίνουν: $\nu_2 = 2\lambda + \mu - 2 = \frac{22+3}{12} - 2 = \frac{1}{12} > 0$

$$\nu_4 = 4\lambda + \mu - 2 = \frac{44+3}{12} - 2 = 21/12 > 0$$

Άρα τα παραπάνω $\nu_1, \ldots, \nu_4, \lambda, \mu$ ικανοποιούν τις συνθήκες K-T.

(γ) $\Delta Z = -11/12 + 0{,}1 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}1 = 0{,}8/12 = 0{,}06667$

2 (α) x_A, x_B, x_Γ : ποσότητες προϊόντων

$$\max z = 450x_A + 400x_B + 350x_\Gamma$$
$$z = (9x_A + 8x_B + 7x_\Gamma)\cdot 50$$
$$10x_A + 6x_B + 5x_\Gamma \le 2000$$
$$5x_A + 6x_B + 4x_\Gamma \le 1000$$
$$x_A, x_B, x_\Gamma \ge 0$$

Λυση

$$-8/6 \quad -1$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 0 & 0 & z \\ 10 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2000 \\ 5 & 6 & 4 & 0 & 1 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14/6 & 0 & 2/6 & 0 & -8/6 & z-\frac{4000}{3} \\ 5 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1000 \\ 5/6 & 1 & 4/6 & 0 & 1/6 & \frac{1000}{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -14/5 & -46/10 & 0 & -54/6 & z-\frac{5400}{3} \\ 0 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6/5 & 4/5 & 0 & 1/5 & 200 \end{bmatrix} \to 1800$$

Άρα $x_A = 200$ $x_B = x_\Gamma = 0$ $z = 1800$

(β) $\max\ 450x_A + 400x_B + 350x_\Gamma - 10y_A - 20y_Y - 30y_{E\Xi}$

$$10x_A + 6x_B + 5x_\Gamma \le 2000 + y_{Y\Pi} + y_{E\Xi}$$
$$5x_A + 6x_B + 4x_\Gamma \le 1000 + y_{A\Pi}$$
$$y_{E\Xi} \le 500 \qquad y_{Y\Pi} \le 1000$$

$y_{A\Pi}$: πρόσθετη αποθήκη
$y_{E\Xi}$: εξωτερικοί συνεργάτες
$y_{Y\Pi}$: υπερωρίες

$$\max \quad 450x_A + 400x_B + 350x_\Gamma - 10y_A - 20y_{Y\Pi} - 30y_{E\Xi}$$

$$10x_A + 6x_B + 5x_\Gamma - y_{Y\Pi} - y_{E\Xi} \le 2000$$
$$5x_A + 6x_B + 4x_\Gamma - y_{A\Pi} \le 1000$$
$$y_{Y\Pi} \le 1000$$
$$y_{E\Xi} \le 500$$

Για την δεδομένη λύση ο πίνακας simplex ($y_{Y\Pi}=1000$ $y_{E\Xi}=500$ $x_\Gamma=700$ $y_{A\Pi}=1800$) έχει αρνητικά στοιχεία στις μη βασικές μεταβλητές, άρα είναι βέλτιστη

3. (α) Προφανώς το πρόβλημα απειρίζεται και η εξίσωση $\nabla f=(-2x,-1)=(0,0)$ δεν έχει λύση! Στο $(-1,-1)$ είναι $\nabla f = (-2,-1) = -1\cdot(2,1)$ κάνοντας το 1° βήμα ελαχιστοποιούμε ως στην διεύθυνση $(2,1)$ ή $(x(t),y(t)) =$
$= (-1+2t, -1+t)$ και $f(x(t),y(t)) = (-1+2t)^2+1-t$
$df/dt = 4(-1+2t)-1 = 0$ ή $t = 5/8$ και το επόμενο σημείο είναι το $(-1+5/4, -1+5/8)$
$= (1/4, -3/8)$. Είναι $\nabla f(1/4,-3/8) = (1/2,-1)$
και το επόμενο σημείο $(x(t),y(t)) =$
$= (1/4 + t/2, -3/8 + t)$ κλπ. ~~απειρίζεται~~ Το πρόγραμμα πρέπει να έχει έλεγχο (π.χ. μέγιστο αριθμό επαναλήψεων)!

(β) $C_5 = 0$ $\quad C_4 = 12 + 2\cdot 3 = 18$

$$C_3 = \min\{\underset{\text{παρ. 4}}{12+8+18}^{38}\,;\ \underset{\text{παρ. 7}}{12+14+3}^{29}\} = 29$$

$$C_2 = \min\{\underset{\text{παραγ 2}}{12+4+29}^{45}\,;\ \underset{\text{παραγ 6}}{12+12+4+18}^{46}\,;\ \underset{\text{παραγ 9}}{12+18+8+3}^{41}\} = 41$$

Άρα βέλτιστη παραγγελία στο 1 6 μονάδες; στο 3 παραγ. 7 μονάδες

$$C_1 = \min\{\underset{\text{παρ 4}}{12+8+41}^{61}\,;\ \underset{\text{παρ. 6}}{12+12+2+29}^{55}\,;\ \underset{\text{παρ 10}}{12+20+2+8+18}^{60}\,;\ \underset{\text{παρ. 13}}{12+26+2+8+9}^{57}\}$$

4(a) $\mathcal{L} = 2x + 3y + \lambda(5 - x - y) + \mu(4 - 2x - 5y)$
$+ \nu(6 - 5x - 4y) + \xi(4 - 5x - 3y)$
$+ \pi x + \rho y$

Για τις δεδομένες $\pi = \rho = 0$

και $\lambda(5 - x - y) = \lambda(5 - 22/17) = 0 \rightarrow \lambda = 0$

$\mu(4 - 2x - 5y) = \mu(4 - \frac{68}{17}) = 0 \rightarrow \mu \geq 0$

$\nu(6 - 5x - 4y) = \nu(6 - \frac{70+32}{17}) = 0 \rightarrow \nu \geq 0$

$\xi(4 - 5x - 3y) = \xi(4 - 5\frac{14}{17} - 3\frac{8}{17}) = 0$ < 0!

Η δεδομένη λύση δεν ικανοποιεί και τον 4° περιορισμό, ούτε βέβαια τα ΚΤ

(β) Βέλτιστη θεωρία για εξίσωση Δ.Π.

	Λύση		
Ημέρες μελέτης	Α	Α, Β	Α, Β, Γ
1	$-\infty$	$-\infty$	·
2	5	$-\infty$	·
3	5	$-\infty$	·
4	6	$-\infty$	·
5	7	10	·
6	8	10	·
7	9	11	
8	10	12	
9	10	13	
10	10	14	
11	10	15	
12	10	15	*

δεν χρειάζεται υπολογισμός

$$* \quad f_{AB\Gamma}(12) = \max_{d=4,5,6} \{ 6 + f_{AB}(\overset{12}{8}) \,;\, 7 + f_{AB}(\overset{11}{7}) \,;\, 8 + f_{AB}(\overset{10}{6}) \}$$

4 ημέρες, 5 ημέρες, 6 ημέρες

Λύσεις (Οποιαδήποτε...)

	Α	Β	Γ
Λύση 1	5	3	4
Λύση 2	2	5	5
Λύση 3	2	3	6

(Με 11 ημέρες διάβασμα!)

5α $EOQ_1 = \sqrt{\frac{2KD}{s}} = \sqrt{\frac{\cancel{2}\, 600 \cdot 300}{\cancel{2}}} = 300\sqrt{2}$

$= 424{,}3 \; (\leq 500)$

$600 + 3\cdot 500 = k + 1\cdot 500$

$1600 = k$

$EOQ_2 = \sqrt{\frac{\cancel{2}\cdot 1600 \cdot 300}{\cancel{2}}} = 100\cdot 4\sqrt{3}$

$= 692{,}8$

κόστος 1

$\frac{K_1 D}{Q_1^*} + \frac{sQ_1^*}{2} + p_1 D$

$= \sqrt{2K_1Ds} + p_1 D = 600\sqrt{2} + 3\cdot 300$

$= 1748{,}5$

κόστος 2

$\frac{k_2 D}{Q_2} + \frac{sQ_2^*}{2} + p_2 D$

$= \sqrt{2k_2Ds} + p_2 D$

$= \sqrt{2\cdot 1600\cdot 300\cdot 2} + 1\cdot 300$

προσοχή! 1 και όχι 3

$= 1385{,}6 + 300 = 1685{,}6$

Άρα συμφέρει το EOQ_2.

(β) $\mathcal{L} = -x^2 - 2y^2 + \lambda(x+3y-4) + \mu(1/2 - x)$

$\partial\mathcal{L}/\partial x = -2x + \lambda - \mu = 0 \quad (1)$

$\partial\mathcal{L}/\partial y = -4y + 3\lambda = 0 \quad (2)$

Αν $\lambda, \mu > 0$ είναι $x = 1/2$

$x + 3y = 4$ ή $3y = 7/2$ $\quad y = 7/6$

και από την (2) $\lambda = \frac{4}{3}y = \frac{4}{3}\cdot\frac{7}{6} = \frac{28}{18} > 0$

$\mu = -2x + \lambda = -1 + \frac{28}{18} > 0$ άρα ικανοποιείται

Η υπόλοιπη διερεύνηση δεν δίνει άλλη λύση

6. (α) Παραγγελία Q ώστε Πιθ $(\tilde{D} \le Q) = \frac{p+m-c}{p+m+h}$

h: κόστος αποθήκευσης. Είναι $p = 2c$, $m = 0$

$h = -0{,}10c$ στο (i), $h = 0{,}05c$ στο (ii)

Άρα Πιθ $(\tilde{D} \le Q_i) = \frac{2c - c}{2c - 0{,}10c} = \frac{1}{1{,}9}$ Άρα $Q_{(i)} = 200 + 400/1{,}91 \cong 409$

ενώ Πιθ $(\tilde{D} \le Q_{ii}) = \frac{c}{2c + 0{,}05c} = \frac{1}{2{,}05}$ άρα

$Q_{ii} = 200 + 400/2{,}05 \cong 395$, λιγότερο από το (i)!

(β) $x_n = 3x_{n-1} + n^2 + 2$

Η ομογενής λύση είναι $x_n^{ομ} = A\,3^n$ (γιατί;)

Δοκιμάζουμε

$x_n^{ειδ} = an^2 + bn + c$ οπότε

αντικαθιστώντας:

$an^2 + bn + c = 3\left(a(n-1)^2 + b(n-1) + c\right) + n^2 + 2$

ή

$an^2 + bn + c = 3\left(a(n^2 - 2n + 1) + bn - b + c\right) + n^2 + 2$

$= 3an^2 - 6an + 3a + 3bn - 3b + 3c + n^2 + 2$

ή $n^2(a - 3a - 1) + n(b + 6a - 3b) + (c - 3a + 3b - 3c - 2)$

Για να μηδενίζονται οι συντελεστές πρέπει:

$a = -1/2 \quad b = -3/2 \quad c = -5/2$

Άρα

$x_n^{γεν} = A\,3^n + \left(-\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - 5/2\right)$

για $n = 0$ $x_0 = 0$ και άρα

$0 = A - 5/2$ ή $A = 5/2$

Η λύση είναι

$x_n = \frac{5}{2} \cdot 3^n + \left(-\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - \frac{5}{2}\right)$

$x_1 = 15/2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 5/2\right) = 3$

Από ΔΕ: $x_1 = 3x_0^{\,0} + 1^2 + 2 = 3$