Επιχειρησιακή Έρευνα - Επαναληπτική Εξέταση – Οκτώβριος 2007

Επιτρέπεται μια σελίδα Α4 σημειώσεων. Γράψτε ΜΟΝΟ τέσσερα θέματα (αν υπάρχει 5ο ΔΕΝ λαμβάνεται υπόψη)– άριστα 3,5 θέματα. Κάθε θέμα έχει ίδια αξία, ενώ η σχετική αξία των υποθεμάτων σημειώνεται όπου δεν είναι αυτά ίσα. Διάρκεια 2 ώρες 30 λεπτά. Μπορείτε να κρατήσετε τα θέματα.

Θέμα 1

α. Χρησιμοποιείστε την μέθοδο Simplex για να λύσετε το πρόβλημα

$max\ \ 3x+2y - z$

με περιορισμούς

$4x+ 5y -5z \ \leq 10$

$2x+ y+ 5z \leq\ 20$

$x,y,z \geq 0$

β. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x,y)=(x+y)e^{2x-y}$ και $g(x,y)=(x-y)e^{x+y-3}$. Λύστε προσεγγιστικά το σύστημα $f(x,y) = 3$ και $g(x,y) = -0,9$.

Υπόδειξη: Υπολογίστε τις συναρτήσεις f, g για x=1, y = 2.

Θέμα 2

α. Χρησιμοποιείστε τις συνθήκες Kuhn Tucker για να λύστε το πρόβλημα

$Max\ \ x+ y$

με περιορισμούς

$x^2+(y-2)^2\leq 1$

$5y \leq 6$

β. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = 5x^2+2y^2+2xy-12x-6y+15$ την οποία θέλετε να ελαχιστοποιήσετε.

ι. Λύστε το πρόβλημα με διαφορικό λογισμό

ιι. Θέλετε να λύσετε το ίδιο πρόβλημα με αριθμητικές μεθόδους. Με αρχικό σημείο το (0,0) εκτελέστε ένα βήμα της μεθόδου αναζήτησης βαθμίδας και στην συνέχεια δείξτε πώς θα συνεχίσει η μέθοδος χωρίς να κάνετε υπολογισμούς

Θέμα 3

Μία επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα και θέλει να καταστρώσει ένα μηνιαίο πρόγραμμα παραγωγής. Το εργατικό της δυναμικό τον μήνα αυτό είναι 1600 εργατοώρες κανονικής εργασίας με κόστος 10 ευρώ ανά ώρα, αλλά υπάρχει δυνατότητα επιπλέον το πολύ 800 ωρών υπερωριών με κόστος υπερωρίας 20 ευρώ την ώρα. Οι κανονικές ώρες εργασίας πρέπει να πληρωθούν είτε χρησιμοποιηθούν είτε όχι. Επιπλέον χρησιμοποιείται μία πρώτη ύλη που είναι διαθέσιμη σε ποσότητα 1000 τόννων τον μήνα και δεν είναι δυνατή πρόσθετη διαθεσιμότητα. Το κόστος της πρώτης ύλης είναι 10 ευρώ ανά τόννο. Οι απαιτήσεις για την παραγωγή και τα έσοδα πωλήσεων των προϊόντων δίνεται στον παρακάτων πίνακα. Τα προϊόντα Α, Β μπορούν να διατεθούν σε απεριόριστες ποσότητες αλλά το προϊόν Γ μπορεί να διατεθεί μέχρι του ύψους των 100 μονάδων.

	Προϊόν		
Απαιτήσεις	Α	Β	Γ
Εργατοώρες	9	2	4
Πρώτη ύλη	3	8	6
Έσοδο από πώληση μιάς μονάδος	200	110	150

α. Διαμορφώστε το πρόβλημα (70%)

β. Λύστε το χρησιμοποιώντας Simplex (30%).

Θέμα 4

α. Έστω το πρόβλημα

$$\min\ x^2+y^2+z^2$$

με περιορισμούς

$$2 \le x+y+z \le 9$$

$$xyz-x^2-z^2+y \le 1$$

Εξετάστε αν οι συνθήκες ΚΤ ικανοποιούνται στην υποτιθέμενη λύση x=3 y=2 z=4

β. Μία εταιρεία χρησιμοποιεί μία πρώτη ύλη που η προμήθειά της δεν έχει μεν πάγιο αλλά η τιμή προμήθειας ανά μονάδα πρώτης ύλης μειώνεται με την ποσότητα παραγγελίας. Συγκεκριμένα αν παραγγελθεί ποσότητα Q η τιμή μονάδας είναι $8/\sqrt{Q}$ (άρα η τιμή μονάδος μειώνεται αν παραγγελθούν μεγάλες ποσότητες). Η μηνιαία κατανάλωση πρώτης ύλης είναι 100 μονάδες, ενώ το κόστος αποθήκευσης είναι 0,1 ανά μονάδα πρώτης ύλης και μήνα. Ποιά η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του μέσου διαχρονικού κόστους;

Υπόδειξη: Υπολογίστε πρώτα το συνολικό κόστος μεταξύ διαδοχικών παραγγελιών ποσότητας έστω Q. Διαιρέστε το κόστος αυτό με την διάρκεια της περιόδου και βελτιστοποιείστε ως προς Q.

Προαιρετικό: Διαμορφώστε το ίδιο πρόβλημα σε περίπτωση που εκτός των παραπάνω στοιχείων υπήρχε και ένα πάγιο ανά παραγγελία ύψους 20 ευρώ. Υπολογίστε το βέλτιστο επίπεδο παραγγελίας με ικανοποιητική προσέγγιση.

Θέμα 5

α. Μία εταιρεία χρησιμοποιεί μία πρώτη ύλη με ρυθμό 4000 τεμάχια/μήνα χωρίς να είναι επιτρεπτές καθυστερήσεις. Σε κάθε παραγγελία χρεώνεται ένα πάγιο 500€ συν 0,1 € ανά τεμάχιο για τα πρώτα 30.000 τεμάχια ενώ τα τεμάχια που είναι επιπλέον των 30.000 είναι δωρεάν. Το κόστος αποθήκευσης είναι 0,12 € ανά έτος. Ποια είναι η βέλτιστη στρατηγική παραγγελίας σχετικά με το κριτήριο του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους;

β. Μία φοιτήτρια έχει στη διάθεσή της επτά ημέρες πρίν από τις εξετάσεις σε 4 μαθήματα και θέλει να κανανείμει τον χρόνο της όσο πιο αποτελεσματικά γίνεται.Θα διαθέσει τουλάχιστον μία ημέρα για κάθε μάθημα και κάθε ημέρα μπορεί να διαβάσει μόνο ένα μάθημα. Έτσι μπορεί να αφιερώσει μία, δύο τρείς ή τέσσερεις ημέρες για κάθε μάθημα. Θέλει να κάνει την κατανομή του χρόνου της ώστε να να μεγιστοποιήσει την συνολική βαθμολογία της. Έχει υπόλογίσει ότι για τις παρακάτω κατανομές χρόνου θα πάρει τους βαθμούς που δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός ημερών	Μάθημα			
	1	**2**	**3**	**4**
1	3	5	2	6
2	5	5	4	7
3	6	6	7	9
4	7	9	8	9

Εφαρμόστε δυναμικό προγραμματισμό για να βρείτε την βέλτιστη κατανομή των ημερών στα μαθήματα. (ι) Γράψτε πρώτα την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα (β) Λύστε την, κάνοντας το δυνατόν περισσότερα βήματα της μεθόδου επίλυσης.

Λύσεις Επιχ. Έρευνας
Οκτώβριος 2007

1 (α)

$$\begin{array}{c} -3/4 \\ \\ -1/2 \end{array}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & w \\ 4 & 5 & -5 & 1 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 20 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ 10/4 \leftarrow \\ 20/2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -7/4 & 11/4 & -3/4 & 0 & w - 30/4 \\ 1 & 5/4 & -5/4 & 1/4 & 0 & 10/4 \\ 0 & -3/2 & 15/2 & -1/2 & 1 & 15 \end{bmatrix}\begin{array}{c} -11/30 \\ 1/6 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -24/20 & 0 & -17/30 & -11/30 & w - 52/4 \;(13) \\ 1 & 10/12 & 0 & 2/12 & 1/6 & 5 \\ 0 & -1/5 & 1 & -1/15 & 2/15 & 2 \end{bmatrix}$$

Άρα $x = 5 \quad y = 0 \quad z = 2$, Αξία 13

(β) Είναι $f(1,2) = (1+2)e^{2\cdot 1-2} = 3$

$g(1,2) = (1-2)e^{2+1-3} = -1$

που είναι "κοντά" στο $f(x,y) = 3$

$g(x,y) = -0{,}9$

Δοκιμάζουμε για λύση $x = 1+\Delta x$, $y = 2+\Delta y$ οπότε

είναι $f(1+\Delta x, 2+\Delta y) \cong f(1,2) + \partial f/\partial x\, \Delta x + \partial f/\partial y\, \Delta y$

$g(1+\Delta x, 2+\Delta y) \cong g(1,2) + \partial g/\partial x\, \Delta x + \partial g/\partial y\, \Delta y$

$\cong 3 + \partial f/\partial x\, \Delta x + \partial f/\partial y\, \Delta y = 3$

$\cong -1 + \partial g/\partial x\, \Delta x + \partial g/\partial y\, \Delta y = -0{,}9$ ← εξισώνουμε με ζητούμενο

Άρα πρέπει τα $\Delta x, \Delta y$ να ικανοποιούν

$\partial f/\partial x\, \Delta x + \partial f/\partial y\, \Delta y = 0$

$\partial g/\partial x\, \Delta x + \partial g/\partial y\, \Delta y = 0{,}1$

Είναι $\partial f/\partial x \big|_{x=1,\, y=2} = e^{2x-y} + 2(x+y)e^{2x-y} = 1 + 6 = 7$ $\quad \partial f/\partial y = +e^{2x-y} - (x+y)e^{2x-y} = 1 - (1+2) = -2$

$\partial g/\partial x = e^{x+y-3} + (x-y)e^{x+y-3} = 1 + (1-2) = 0$

$\partial g/\partial y = -e^{x+y-3} + (x-y)e^{x+y-3} = -1 + (1-2) = -2$

οπότε είναι $\begin{cases} 7\Delta x - 2\Delta y = 0 \\ 0\,\Delta x - 2\,\Delta y = 0{,}1 \end{cases}$

άρα $\Delta y = -0{,}05 \quad \Delta x = -0{,}1/7 = -0{,}014$

οπότε η λύση είναι $x' = 1 - 0{,}014 = 0{,}986$

$y = 2 - 0{,}05 = 1{,}95$

2 (α) $\mathcal{L} = x + y + \lambda(1 - x^2 - (y-2)^2) + \mu(6 - 5y)$

$$\begin{cases} \partial\mathcal{L}/\partial x = 1 - 2\lambda x = 0 & (1\alpha) \\ \partial\mathcal{L}/\partial y = 1 - 2\lambda(y-2) - 5\mu = 0 & (1\beta) \end{cases}$$

$\cdot\ \lambda(x^2 + (y-2)^2 - 1) = 0 \ (2\alpha) \qquad \mu(6 - 5y) = 0 \ (2\beta)$

Από (1α) $\lambda \neq 0$ άρα $x^2 + (y-2)^2 = 1$

Αν $\mu > 0$ από (2β) $y = 6/5$ οπότε

$x^2 + (6/5 - 2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow x = \pm 3/5$ και λόγω της (1α) $x > 0$

$\Rightarrow x = 3/5$ που είναι αποδεκτό.

Αν $\mu = 0$ $\quad x = 1/2\lambda \quad y - 2 = 1/2\lambda = x \rightarrow y = x + 2$

οπότε είναι από την (1α) $1 = 2x^2 \rightarrow x = 1/\sqrt{2}$

και $y = 2 + 1/\sqrt{2} > 6/5$, αδύνατο.

(β) (i) $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 10x + 2y - 12 = 0 & (\partial f/\partial x = 0) \\ 2x + 4y - 6 = 0 \end{cases}$ $\quad 1, \ -5$

$\longrightarrow \underline{x = y = 1}$

(ii) $\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n + t^* \nabla f(\bar{x}_n)$

και t^* μεγιστοποιεί την $f(\bar{x}_n + t\nabla f(\bar{x}_n))$

$\nabla f = (10x + 2y - 12,\ 4y + 2x - 6)$

$\nabla f(0,0) = (-12, -6)$ και άρα

$$x_n + t\nabla f(x_n) = \left(0 + t(-12),\ 0 + t(-6)\right)$$

οπότε

$$f(x_n + t\nabla f) = 5(-12t)^2 + 2(-6t)^2 + 2((-12t)\cdot(-6t)) - 12(-12t) - 6(-6t) + \cancel{1}$$

$$= 5\cdot 12^2 t^2 + 2\cdot 6^2 t^2 + 2\cdot 12\cdot 6\, t^2 + 12^2 t + 6^2 t$$

$$= t^2(5\cdot 12^2 + 2\cdot 6^2 + 2\cdot 12\cdot 6) + (12^2 + 6^2)t$$

Άρα για ελαχιστοποίηση πρέπει

$$t^* = -\frac{12^2 + 6^2}{2(5\cdot 12^2 + 2\cdot 6^2 + 2\cdot 12\cdot 6)}$$

$$= -0,096$$

οπότε $x \to 0 - (12)\cdot(-0,096) \cong 1,15$

$y \to 0 - (6)\cdot(-0,096) = 0,576$

Στην συνέχεια προχωράμε από το (1,15, 0,570

3 Έστω x_A, x_B, x_Γ η παραγωγή των προϊόντων Α, Β, Γ και Υ οι ώρες υπερωρίας. Έχουμε τις παρακάτω σχέσεις

- Συνολικός αριθμός εργατοωρών: $1600 + Y$, $0 \le Y \le 80$
- Κόστος εργασίας $= 10\cdot 1600 + 20Y$
- Απαιτ. εργατοώρες: $9x_A + 2x_B + 4x_\Gamma$ $(\le 1600 + Y)$
- Περιορισμοί παραγωγής: $x_A, x_B, x_\Gamma \ge 0$, $x_\Gamma \le 100$
- Πρώτη ύλη: $3x_A + 8x_B + 6x_\Gamma$
- Περιορ. πρώτης ύλης $3x_A + 8x_B + 6x_\Gamma \le 1000$

Έσοδα: $200x_A + 110x_B + 150x_\Gamma$

Κόστος: $\underbrace{10(3x_A + 8x_B + 6x_\Gamma)}_{\text{πρώτη ύλη}} + \underbrace{20Y + 1600\cdot 10}_{\text{εργασία}}$

Στόχος μας να μεγιστοποιηθεί η διαφορά εσόδων - κόστους, δηλαδή σταθερό! ως προς χ_A,...

$\max\ (200x_A + 110x_B + 150x_\Gamma)$

$\qquad - (30x_A + 80x_B + 60x_\Gamma + 20y) - 16.000$

ή ισοδύναμα

$\max\ 170x_A + 30x_B + 90x_\Gamma - 20y$

ή $17x_A + 3x_B + 9x_\Gamma - 2y$

με περιορισμούς

(Α' ύλη) $\cdot\ 3x_A + 8x_B + 6x_\Gamma \le 1000$

(Εργασία) $\cdot\ 9x_A + 2x_B + 4x_\Gamma \le 1600 + y$

$y \le 800$

$x_\Gamma \le 100$

$x_A, x_B, x_\Gamma \ge 0$

(β) Το πρόβλημα λύνεται ως ΓΠ.

				slack				
17	3	9	−2	0	0	0	0	w −
3	8	6	0	1	0	0	0	1000
9	2	4	−1	0	1	0	0	1600
0	0	0	0	0	0	1	0	800
0	0	1	1	0	0	0	1	100

0	−7/9	13/9	−1/9	0	0	−17/9	0	$w - \frac{17}{9}\cdot 1600$	
0	22/3	10/3	1/3	1	−1/3	0	0	1400/3	140
1	2/9	4/9	−1/9	0	1/9	0	0	1600/9	400
0	0	0	0	0	0	1	0	800	
0	0	1	1	0	0	0	1	100	100 ←

Το pivot αυτό είναι το τελικό και δίνει

$x_\Gamma = 100$ (άνω όριο) $x_A = 1400/9$ $y = x_B = 0.$

4(a) · $\mathcal{L} = -(x^2+y^2+z^2) + \lambda(9-x-y-z) + \mu(x+y+z-2)$
$+ k(1-xyz+x^2+z^2-y)$

· Για $x=3$ $y=2$ $z=4$ ο πρώτος περιορισμός ικανοποιείται στο 9, άρα είναι $\mu=0$ $\lambda\geq 0$.
Η 2η ανισοτική περιορισμού δίνει

$$3.2.4-3^2-4^2+2 = 24-9-16+2 = 1$$

και ικανοποιείται ισοτικά οπότε $k \geq 0$

Θέτουμε $\partial\mathcal{L}/\partial x = \partial\mathcal{L}/\partial y = \partial\mathcal{L}/\partial z = 0$ και αντικαθιστούμε τα x, y, z οπότε είναι

$$\partial\mathcal{L}/\partial x = -2x - \lambda + k(-yz+2x)$$
$$= -6 - \lambda - 2k$$

Για βέλτιστο, πρέπει $\lambda, k \geq 0$, οπότε $\partial\mathcal{L}/\partial x \leq -6$ οπότε δεν είναι δυνατόν να ισχύει $\partial\mathcal{L}/\partial x = 0$!
Άρα δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες KT.

b. · Παραγγελία Q, κόστος $Q \cdot 8/\sqrt{Q} = 8\sqrt{Q}$
· Περίοδος παραγγελίας $Q/100$ (μήνες)
· Κόστος αποθήκευσης ανά περίοδο $Q/2 \cdot 0{,}1$

$$\text{Μέσο κόστος ανά περίοδο} = \frac{8\sqrt{Q}}{Q/100} + \frac{0{,}1Q}{2}$$

$$K(Q) = \frac{800}{\sqrt{Q}} + \frac{0{,}1}{2}Q$$

Το βέλτιστο βρίσκεται θέτοντας $K'(Q)=0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}Q^{-3/2}\cdot 800 + \frac{0{,}1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow Q^{3/2} = 8000 \longrightarrow Q = 400$$

Προαιρετικό $K(Q) = \frac{(20+8\sqrt{Q})100}{Q} + \frac{0{,}1}{2}Q$
$= \frac{2000}{Q} + \frac{800}{\sqrt{Q}} + \frac{0{,}1}{2}Q$

και $K'(Q) = -\frac{2000}{Q^2} - \frac{800}{2}\frac{1}{Q^{3/2}} + \frac{0,1}{2} = 0$

Πολ/ντας επί Q^2 έχουμε

$$-2000 - 400\,Q^{1/2} + 0,05\,Q^2 = 0$$

ή θέτοντας $x = Q^{1/2}$ έχουμε

$$f(x) = 0,05x^4 - 400x - 2000 = 0$$

Για να βρούμε τη ρίζα $(x > 0)$ αρχίζουμε (προσεγγιστική λύση) με $x = 20$ και εφαρμόζουμε μεθοδο Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)} = 20 - \frac{0,2x^3 - 400}{0,05x^4 - 400x - 2000}$$

Για $x_0 = 20 \rightarrow x_1 = 20 - \frac{0,2 \cdot 8000 - 400}{0,05\ 20^4 - 8000 - 2000}$

$$= 20 - \frac{1200}{-2.000} = 20,6$$

$$x_2 = 20,6 - \frac{0,2\ 20,6^3 - 400 \cdot}{0,05\ 20,6^4 - 400 \cdot 20,6 - 2000}$$

$$= 20,6 - \frac{1,348}{-1,236} = 20,6 + 1,1$$

$$\simeq 21,7\ldots$$

Το βέλτιστο είναι 21,44 και βρίσκεται σε λίγες ακόμη επαναλήψεις

5. (a) Τα έξοδα των 30.000 λέξεων/σελίδων από το λογισμό $K = 500 + 0,1 \cdot 30,000$

$$= 3.500$$

Το EOQ του πρώτου μήνα είναι

$$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2.500 \cdot 4000}{0,01}} = \sqrt{400 \cdot 10^6} = 20.000$$

στο το κόστος είναι (μέσο ανά μήνα)

$$K_m^1 = \frac{500\ ^{100}}{5} + \frac{20.000 \cdot 0,01}{2}^{100} + 0,1 \cdot 4.000$$

$$= 600 \quad €/\text{μήνα}$$

Το EOQ_2 είναι $\sqrt{\frac{2 \cdot 3500 \cdot 4000}{0,01}} = \sqrt{7 \cdot 10^8}$

$$= 52,916$$

και $K_m^2 = \frac{3500 \cdot 4000}{52.916} + \frac{52.916}{2} \cdot 0,01 + 0,400 = 529,2$ €/μήνα

Άρα παραγγέλνουμε 52.916 τεμάχια!

5(β) Έστω $f_k(n)$ το βέλτιστο αποτέλεσμα με $1,2,..,k$ μαθήματα και n ημέρες, διαβάζοντας ένα μάθημα την ημέρα!

Είναι $f_k(n) = \max\limits_{1 \le u \le n-k+1} \{ c_k(u) + f_{k-1}(n-u) \}$

οπότε έχουμε τον πίνακα υπολογισμών

$n \backslash k$	f_1	$f_{1,2}$	$f_{1,2,3}$	$f_{1,2,3,4}$
1	3	–	–	
2	5	8	–	Δεν χρειάζονται!
3	6	$\underline{5+5}$, 5+3 10	10	
4	7	5+6, 5+5, 6+3 11	2+10, $\underline{4+8}$ 12	
5	7	$\underline{5+7}$, 5+6, 6+5, $\underline{9+3}$ 12	2+11, 4+10, $\underline{7+8}$ 15	
6	7	5+7, 5+7, 6+6, $\underline{9+5}$, 14	2+12, 4+11, $\underline{7+10}$, 8+8 17	
7	7	5+7, 5+7, 6+7, $\underline{9+6}$ 15	2+14, 4+12, $\underline{7+11}$, $\underline{8+10}$ 18	$\underline{6+17}$, 7+15, 9+12 23

• Το βέλτιστο όφελος προκύπτει αν αφιερώσουν 1 ημέρα για το 4ο (όφελος 6), 3 ημέρες για το 3ο (όφελος 7), 1 ημέρα για το 2ο (όφελος 5) και 2 ημέρες για το 1ο (όφελος 5). Συνολικό όφελος $6+7+5+5=23$

• Η ανάθεση ημερών στα μαθήματα προκύπτει κρατώντας το u^* για το οποίο επιτυγχάνεται το μέγιστο στην σχέση

$$f_k(n) = \max_{1 \le u \le n-k+1} \{ C_k(u) + f_{k-1}(n-u) \}$$

δηλαδή $f_k(n) = c_k(u^*) + f_{k-1}(n-u^*)$