Διάλεξη 19

Δυναμικός Προγραμματισμός, Πέμπτη 17/5/18

Όπως είδαμε στη Διάλεξη 5, κάποια προβλήματα βελτιστοποίησης μπορούν να διατυπωθούν ως προβλήματα εύρεσης του συντομότερου μονοπατιού μεταξύ δύο κορυφών σε ένα γράφημα. Η λύση αυτών των προβλημάτων είναι δυνατή με τον αλγόριθμο Δυναμικού Προγραμματισμού (ΔΠ) που είναι το θέμα αυτής και της επόμενης διάλεξης.

Εξίσωση Δυναμικού Προγραμματισμού

Κλειδί για τον αλγόριθμο ΔΠ είναι η εξίσωση ΔΠ που χαρακτηρίζει τα βέλτιστα μονοπάτια. Πριν την περιγράψουμε δίνουμε κάποιους ορισμούς.
Έστω κατευθυντικό γράφημα (V,E) όπου V το σύνολο κορυφών και το σύνολο ακμών. Έστω $s \in V$ η αρχική ακμή και $t \in V$ η τελική. Επίσης για κάθε ακμή $(i,j) \in E$ το κόστος της είναι $c(i,j)$ (όπου επιτρέπονται και αρνητικές τιμές). Εάν $(x,y) \notin E$ τότε θα θεωρήσουμε $c(x,y) = +\infty$. Ένα μονοπάτι από την αρχική έως τελική κορυφή είναι μια ακολουθία ακμών $(x_0,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_{n-1},x_n)$ όπου $x_0 = s, x_n = t$, για κάποιο θετικό ακέραιο n. Το κόστος του μονοπατιού είναι $\sum_{m=1}^{n} c(x_{m-1},x_m)$. Το μονοπάτι ελάχιστου κόστους (ή βέλτιστο μονοπάτι) από την s στην t είναι το μονοπάτι από την s στην t με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Τι εξισώσεις ικανοποιεί το βέλτιστο μονοπάτι; Εάν η κορυφή x είναι μέρος του βέλτιστου μονοπατιού από s έως t τότε το κομμάτι του μονοπατιού από την x έως την t θα πρέπει να είναι το μονοπάτι ελάχιστου κόστοιυς από την x έως την t. Εάν δεν ίσχυε αυτό τότε θα υπήρχε καλύτερο μονοπάτι από την x έως t του οποίου η χρήση θα βελτίωνε περαιτέρω το κόστος του μονοπατιού από s έως t. Η απλή αυτή ιδιότητα είναι η Αρχή του Δυναμικού Προγραμματισμού και εκφράζεται αλγεβρικά με την εξίσωση ΔΠ: έστω $V(x)$ το ελάχιστο κόστος του μονοπατιού από οποιαδήποτε κορυφή x έως την τελική κορυφή t. Εάν η y είναι η κορυφή που ακολουθεί την x στο βέλτιστο μονοπάτι από x έως t, τότε $V(x) = c(x,y) + V(y)$ από την Αρχή του ΔΠ. Αντίθετα, εάν η (x,y) δεν είναι το βέλτιστο πρώτο βήμα, τότε θα πρέπει $V(x) \le c(x,y) + V(y)$. Άρα σε κάθε περίπτωση

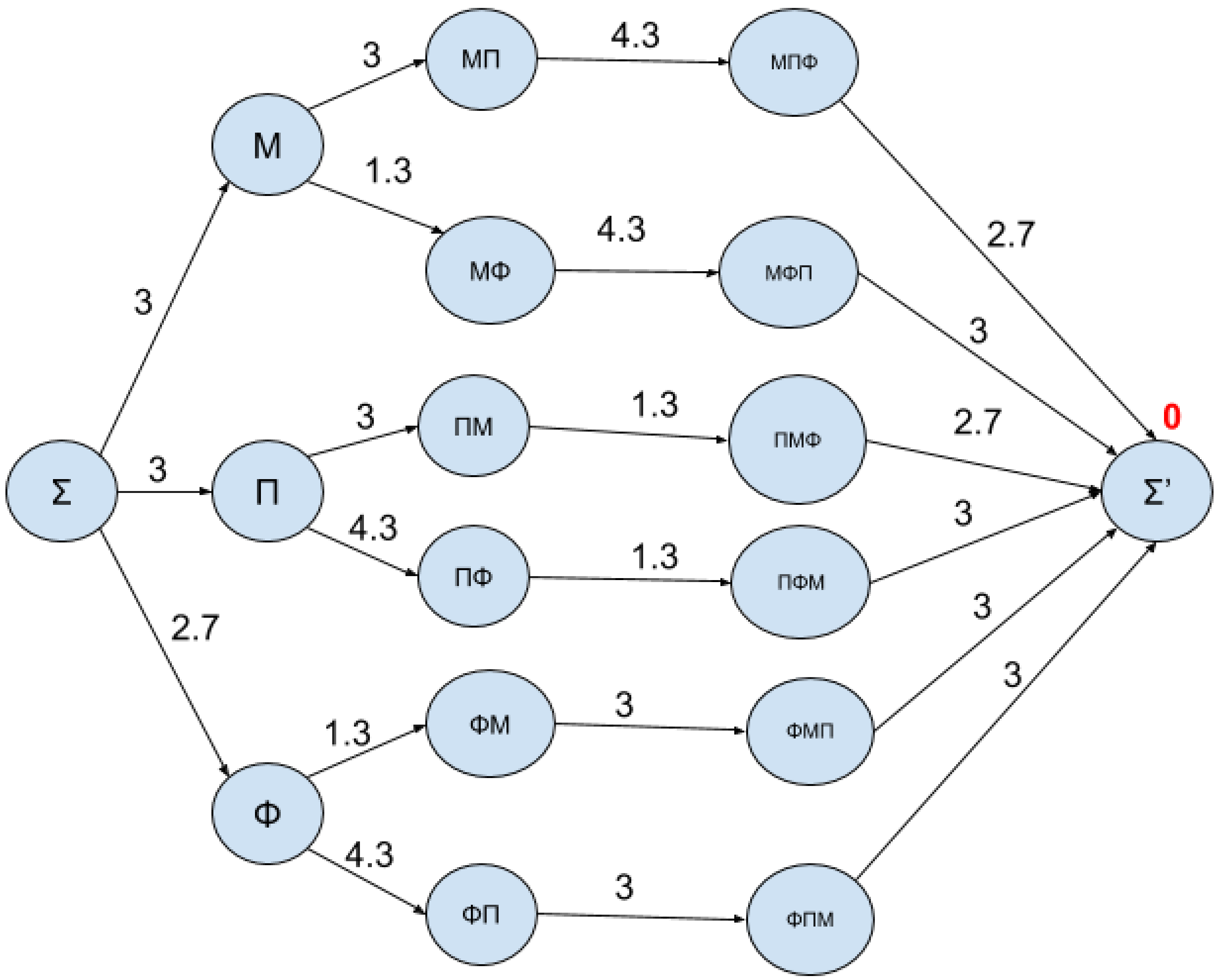
$V(x) = \min_y \{c(x,y) + V(y)\}$ για κάθε $x \neq t$ $V(t) = 0$	**Εξίσωση Δυναμικού Προγραμματισμού**

Εάν γνωρίζουμε μια λύση $V(x), x \in V$ της εξίσωσης ΔΠ τότε το βέλτιστο επόμενο βήμα y του μονοπατιού από x ως t είναι εκείνο που ικανοποιεί $V(x) = c(x, y) + V(y)$. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε αναδρομικά να κατασκευάσουμε το βέλτιστο μονοπάτι αρχίζοντας από την αρχική κορυφή s.

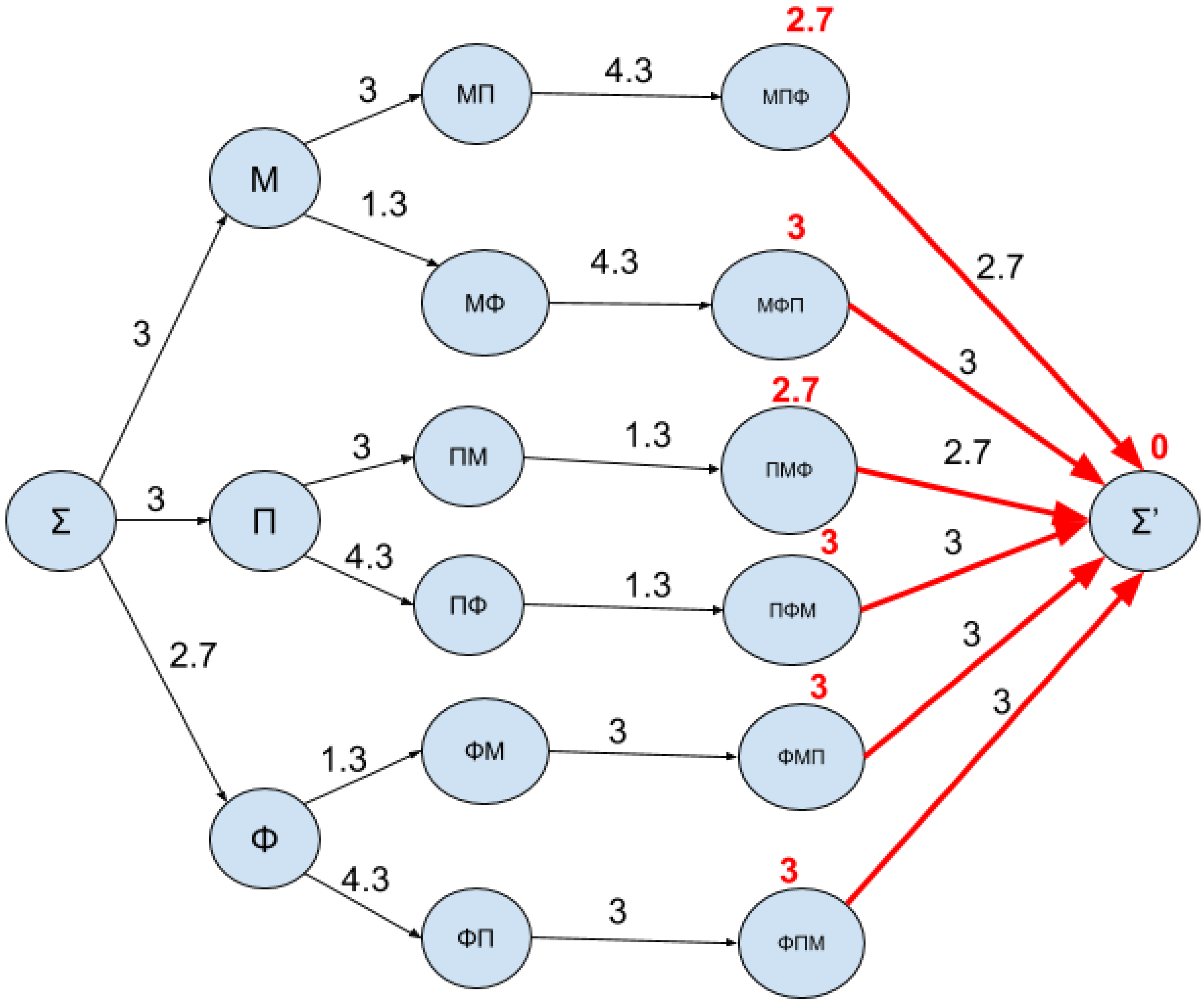
Αλγόριθμος Δυναμικού Προγραμματισμού

Οι τιμές $V(x)$ στην εξίσωση ΔΠ υπολογίζονται σταδιακά αρχίζοντας από γνωστά $V(y)$ και κάνοντας χρήση της εξίσωσης. Στην αρχή μόνο το $V(t) = 0$ είναι γνωστό.

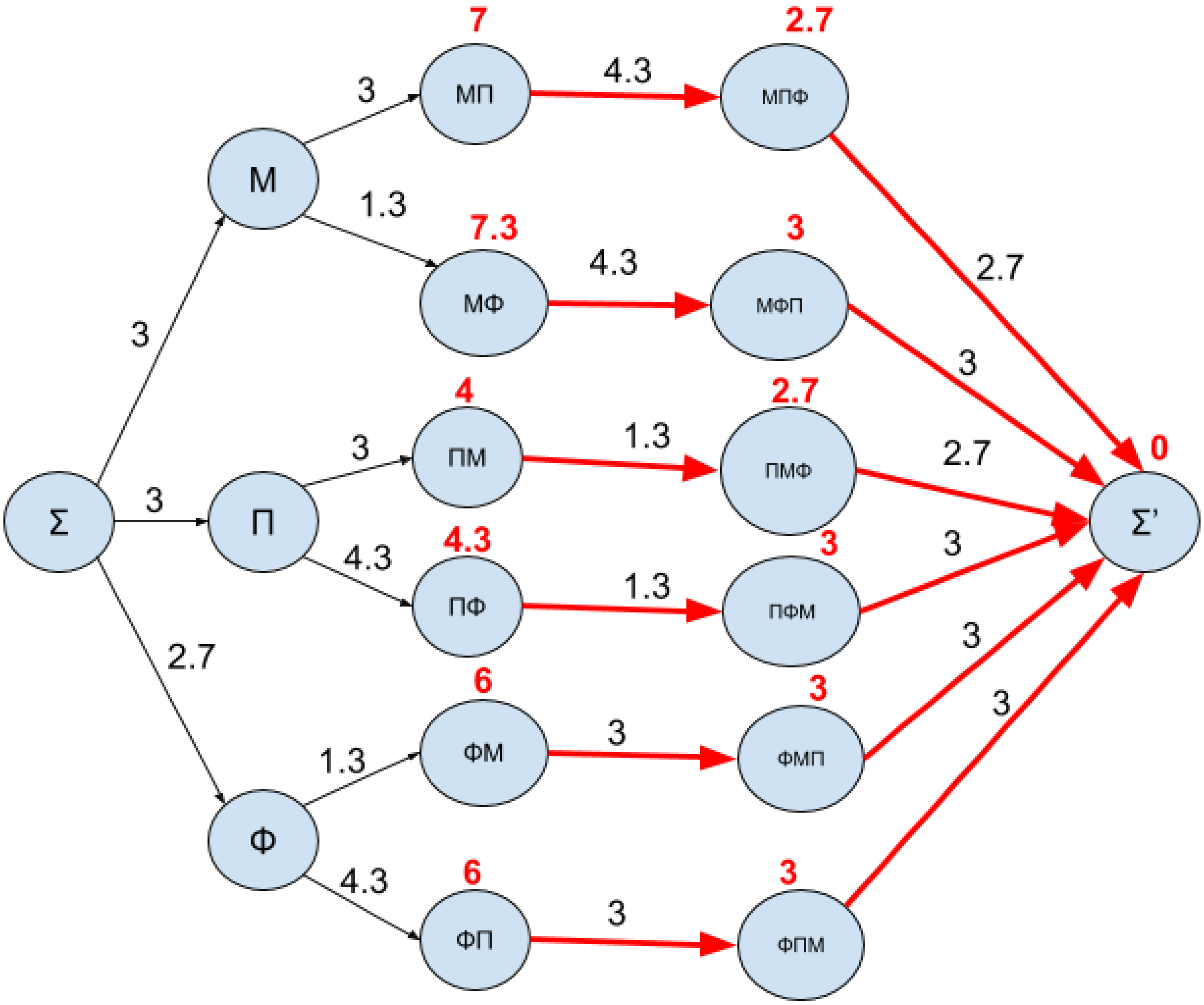
Δείχνουμε τους υπολογισμούς για το [πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή](), όπου η αρχική κατάσταση είναι $s = \Sigma$ και η τελική \$s\$ είναι η Σ'. Αρχικά μόνο $V(\Sigma') = 0$ είναι γνωστό, το οποίο σημειώνουμε πάνω από την κατάσταση Σ’ με κόκκινο χρώμα.



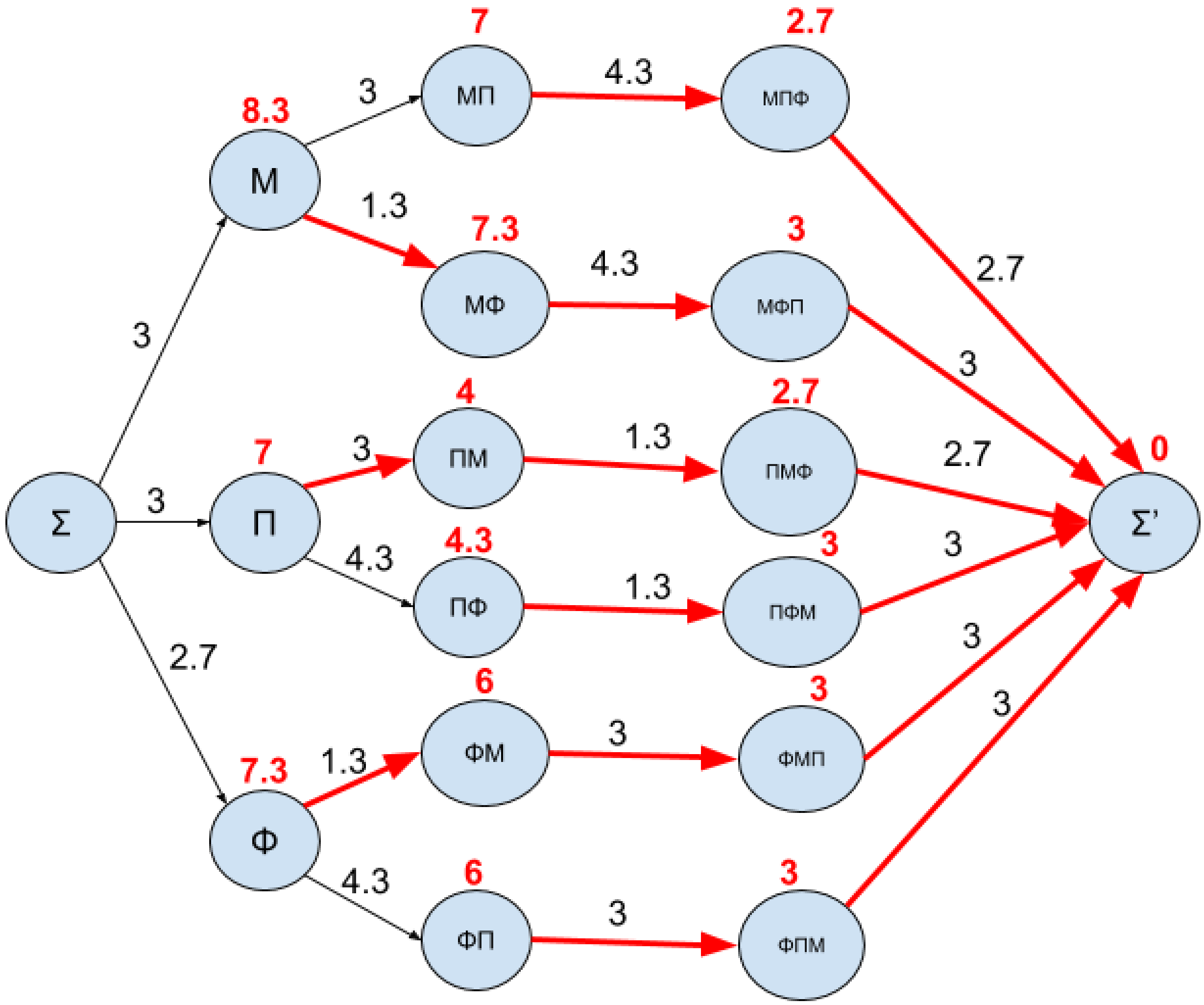
Παρατηρήστε ότι για τις καταστάσεις ένα βήμα πριν την τελική μπορούν να υπολογιστούν οι τιμές $V(x)$ από την εξίσωση ΔΠ, πχ., $V(M\Pi\Phi) = 2.7 + V(\Sigma') = 2.7$. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι τιμές $V(x)$ με κόκκινο χρώμα.



Γνωρίζοντας τις τιμές $V(y)$ για y ένα βήμα πριν το τέλος, μπορούμε να υπολογίσουμε τις $V(x)$ για x που απέχουν δύο βήματα από το τέλος, πχ, $V(M\Pi) = 4.3 + V(M\Pi\Phi) = 7$.

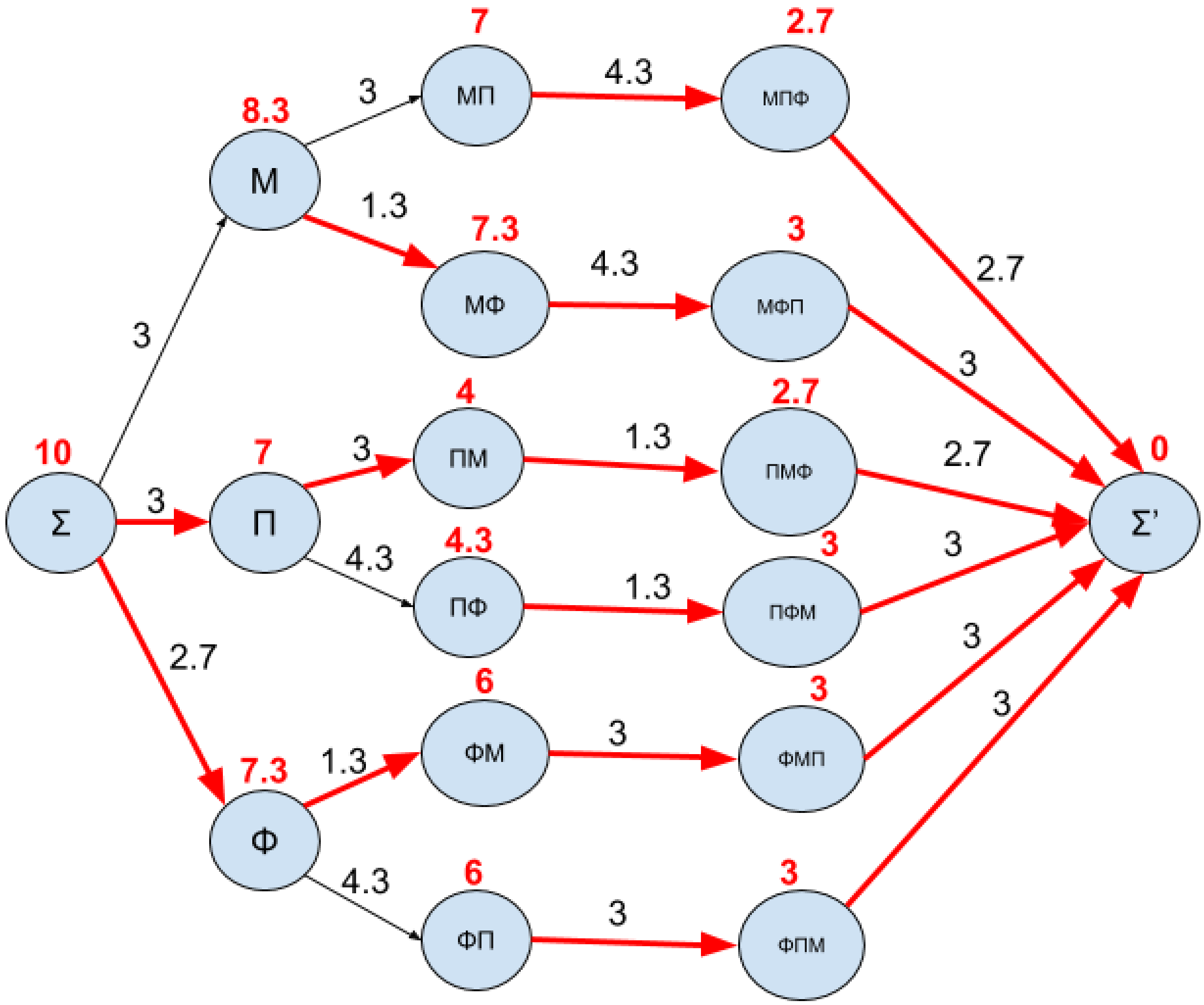


Για τις καταστάσεις που απέχουν 3 βήματα από την τελική, υπάρχουν δύο δυνατά επόμενα βήματα και η εξίσωση που δίνει πχ, το $V(M)$ έχει τη μορφή $V(M) = \min[3 + V(M\Pi), 1.3 + V(M\Phi)] = 8.6$. Άρα το βέλτιστο βήμα μετά τη Μ είναι προς τη ΜΦ. Με κόκκινο χρώμα δίνονται οι ακμές που αντιστοιχούν στα βέλτιστα επόμενα βήματα.



Τέλος, $V(\Sigma) = \min[3 + V(M), 3 + V(\Pi), 2.7 + V(\Phi)] = 10$. Παρατηρήστε ότι υπάρχουν δύο βέλτιστα επόμενα βήματα, το ένα προς Π και το άλλο προς Φ, που αντιστοιχούν στις βέλτιστες διαδρομές $(\Sigma, \Pi), (\Pi, \Pi M), (\Pi M, \Pi M\Phi), (\Pi M\Phi, \Sigma')$ και $(\Sigma, \Phi), (\Phi, \Phi M), (\Phi M, \Phi M\Pi), (\Phi M\Pi, \Sigma')$.

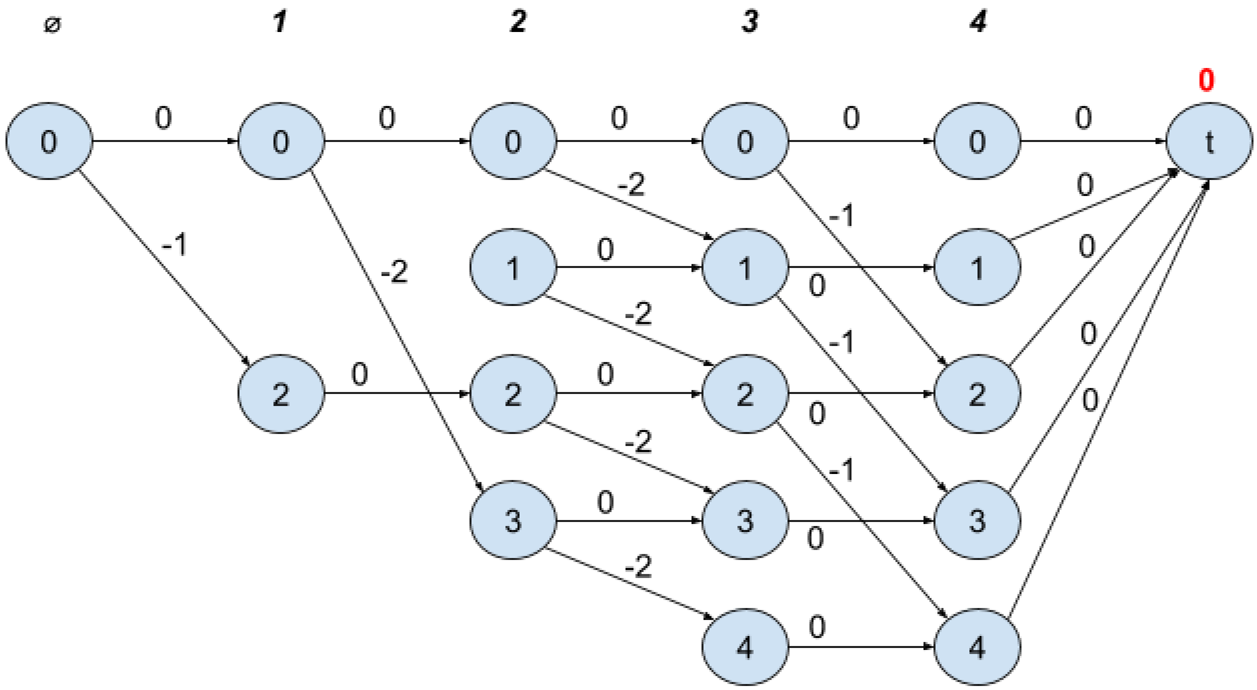
Το μήκος των δύο διαδρομών είναι 10.



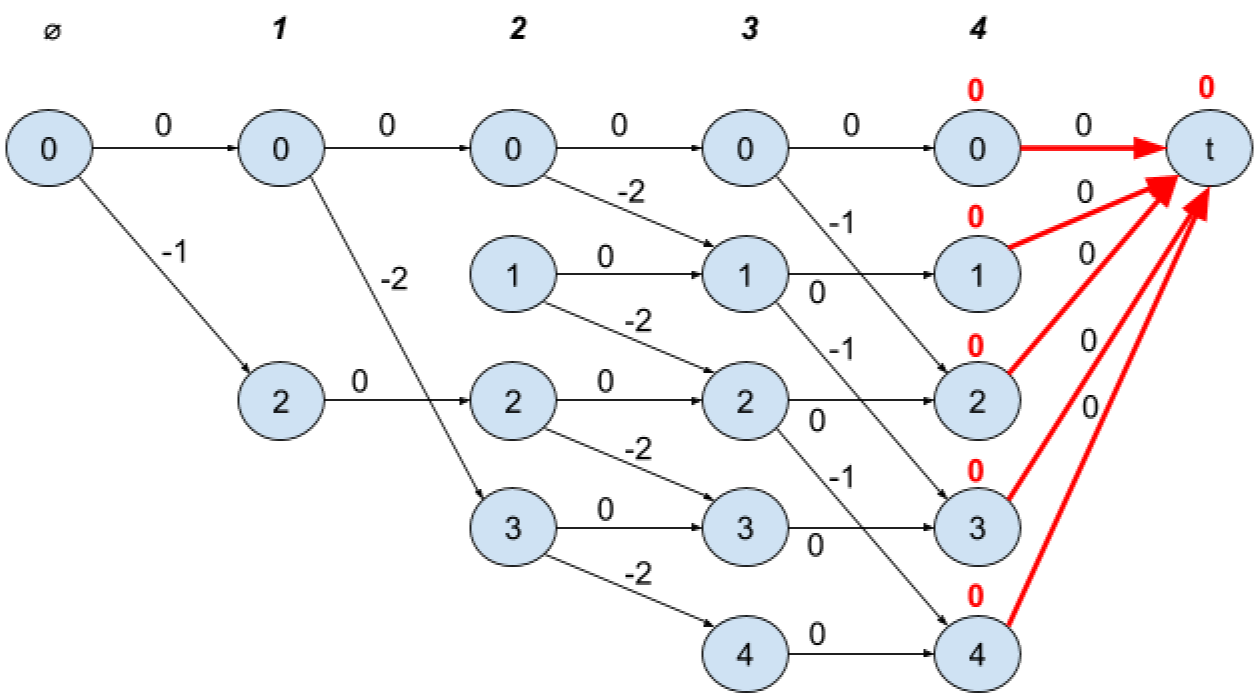
Με αυτόν τον τρόπο είχαμε υπολογίσει τις βέλτιστες διαδρομές στη [Διάλεξη 5](#).

Παράδειγμα: το πρόβλημα του σάκου

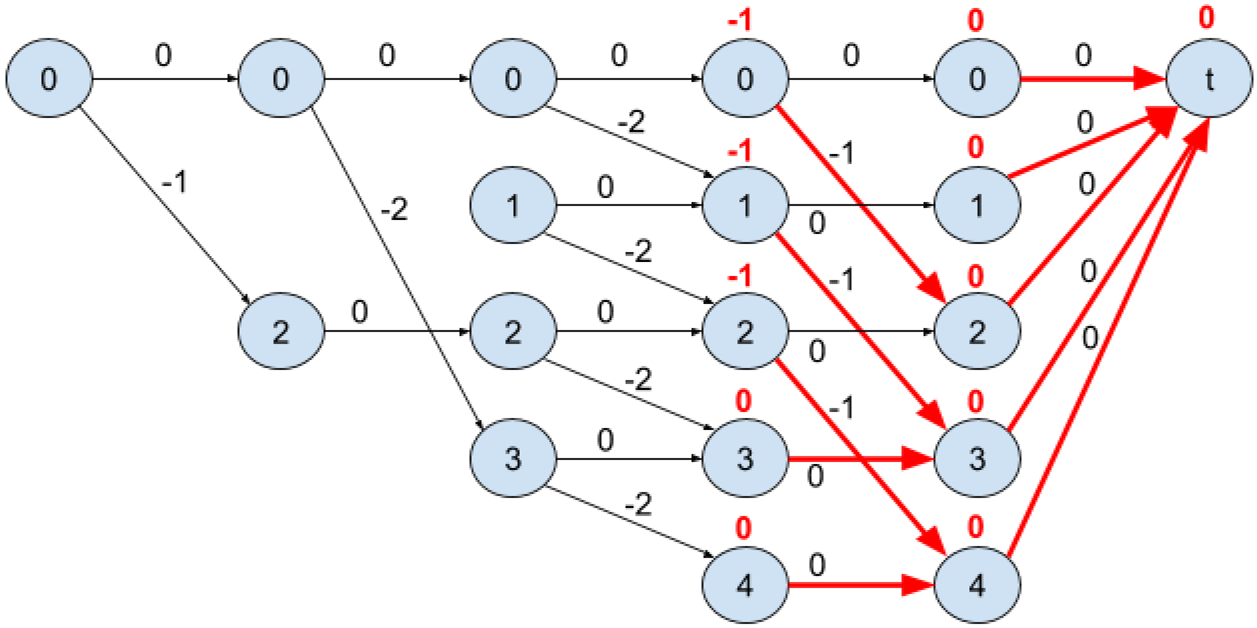
Ας υπολογίσουμε το βέλτιστο μονοπάτι για το πρόβλημα του σάκου χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο ΔΠ. Παρατηρήστε ότι μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχίζοντας τον υπολογισμό των $V(x)$ από καταστάσεις κοντινές στην τελευταία κατάσταση t.



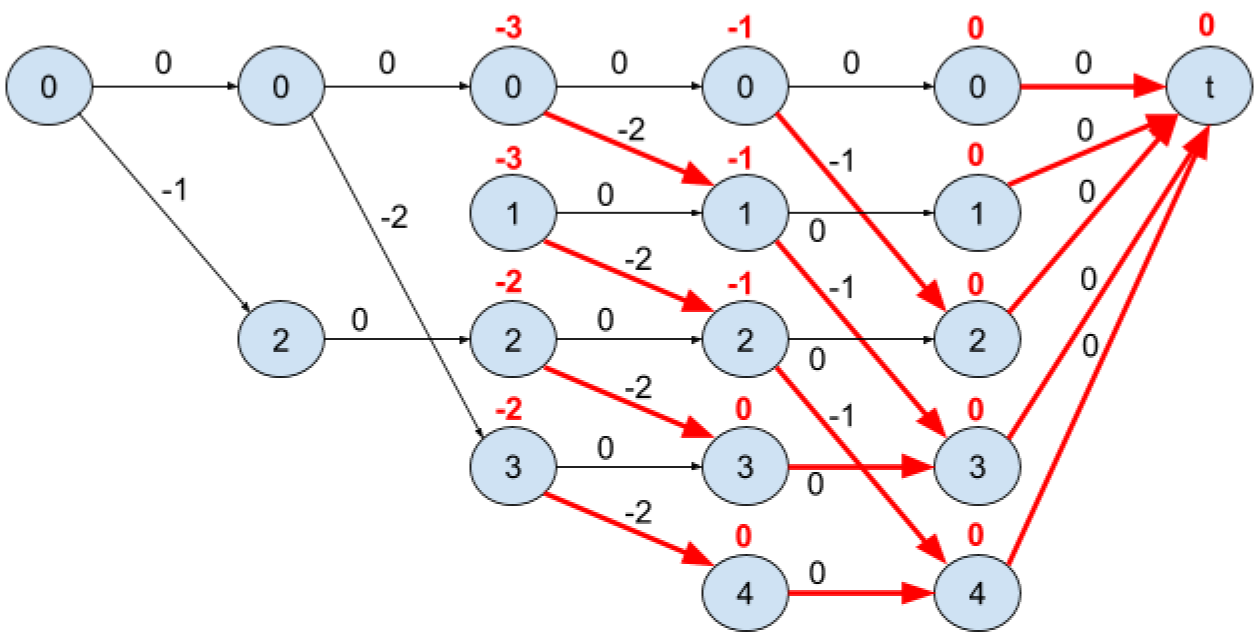
Υπολογισμός $V(x)$ για x που απέχουν ένα βήμα από το τέλος:



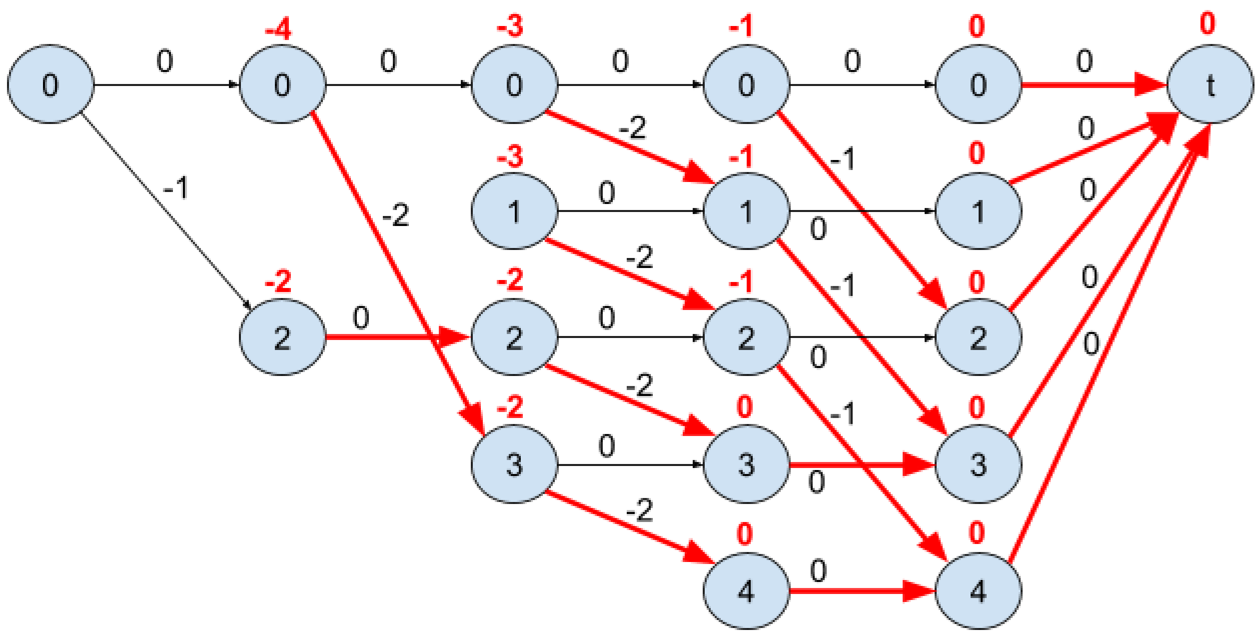
Υπολογισμός $V(x)$ για x που απέχουν δύο βήματα από το τέλος:



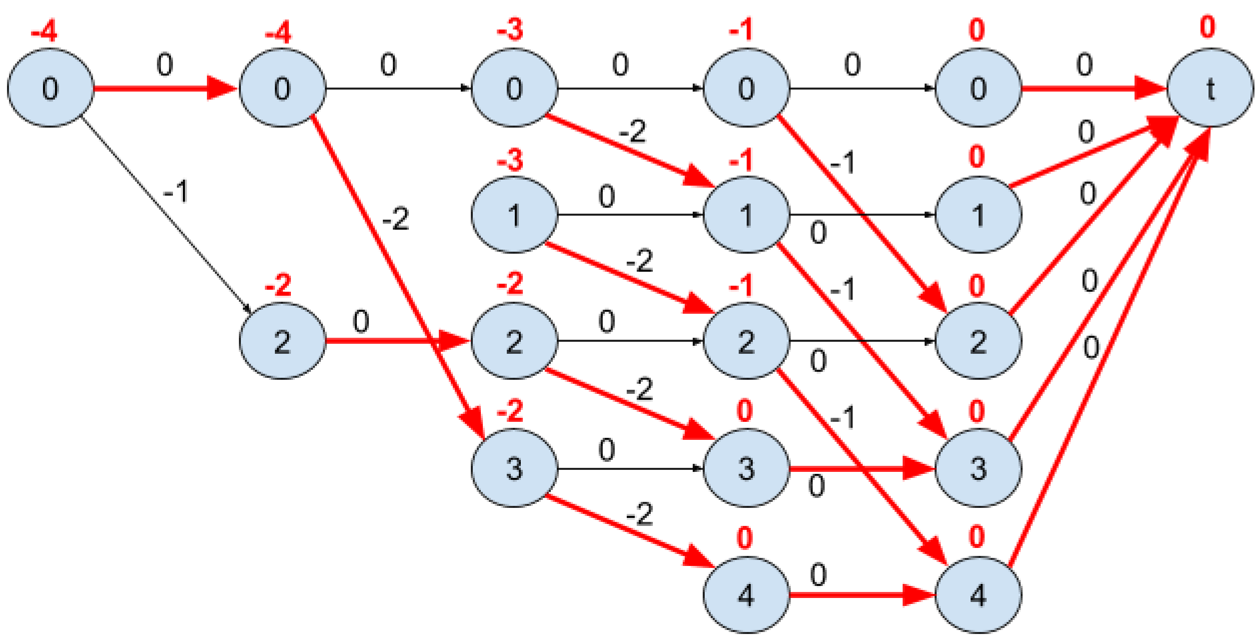
3 βήματα πριν το τέλος:



4 βήματα πριν το τέλος:



Τέλος, για την αρχική κατάσταση:



Η βέλτιστη λύση είναι η συμπερίληψη των αντικειμένων 2 και 3. Η βέλτιστη αξία είναι 4.

Ο αλγόριθμος που ακολουθήσαμε στα παραπάνω παραδείγματα είναι ο **Αλγόριθμος Δυναμικού Προγραμματισμού** ο οποίος ονομάζεται και **οπισθοδρομική αναγωγή**

(backward induction), λόγω του αναδρομικού τρόπου υπολογισμού των βέλτιστων αποφάσεων αρχίζοντας από τα τελευταία στάδια και προχωρώντας “προς τα πίσω”.

Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να εφαρμοστεί όταν υπάρχει τρόπος υπολογισμού όλων των $V(x)$ σταδιακά αρχίζοντας από την τελική κατάσταση t. Αυτό είναι δυνατόν, αν και μόνο αν οι καταστάσεις χωρίζονται σε N στάδια $S_0, S_1, \ldots, S_N$, όπου $S_0 = \{t\}, S_N = \{s\}$ και κάθε κατάσταση επικοινωνεί μόνο με καταστάσεις προγενέστερου σταδίου, δηλαδή εάν $x \in S_m$ και υπάρχει ακμή (x, y) (ισοδύναμα $c(x, y) < +\infty$) τότε $y \in S_{m'}$ με $m' < m$.

Στο παράδειγμα του πλανόδιου πωλητή οι καταστάσεις του ίδιου σταδίου βρίσκονται στην ίδια στήλη και το πρώτο στάδιο βρίσκεται στη τελευταία δεξιά στήλη.

Αλγόριθμος Δυναμικού Προγραμματισμού (Οπισθοδρομική Αναγωγή)
0. Υπολογισμός $V(t)$ 1. Υπολογισμός $V(x)$ για $x \in S_1$ μέσω εξίσωσης ΔΠ 2. Υπολογισμός $V(x)$ για $x \in S_2$ μέσω εξίσωσης ΔΠ 3. ... N Υπολογισμός $V(x)$ για $x \in S_N$ μέσω εξίσωσης ΔΠ