Διάλεξη 16

Ο αλγόριθμος simplex για γραμμικά προγράμματα, Τρίτη 17/5/16

Κανονική μορφή Γραμμικών Προγραμμάτων (ΓΠ)

Η επίλυση ενός ΓΠ με τον αλγόριθμο simplex απαιτεί πρώτα να το φέρουμε στη λεγόμενη **κανονική μορφή**:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Έτσι ώστε $\sum_{i} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \ldots, m$

Όπου $x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$

Εδώ οι $c_j, b_i, a_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ είναι σταθερές.

Δηλαδή στην κανονική μορφή ενός ΓΠ:

1. Έχουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης
2. Υπάρχουν μόνο ανισοτικοί περιορισμοί
3. Οι μεταβλητές απόφασης $x_j, j = 1, \ldots, n$ είναι μη αρνητικές.

Κάθε ΓΠ μπορεί να γραφεί σε κανονική μορφή, δηλαδή υπάρχει κάποιο ΓΠ σε κανονική μορφή το οποίο είναι ισοδύναμο με το αρχικό. (Δύο προβλήματα βελτιστοποίησης λέγονται ισοδύναμα εάν η βέλτιστη λύση του ενός μπορεί να βρεθεί εύκολα (δηλαδή με απλές αλλαγές μεταβλητών) από τη λύση του άλλου.)

Παράδειγμα 1

Γράψτε το ΓΠ που ακολουθεί σε κανονική μορφή.

$$\min -x_1 + x_2 + 2x_3$$

Έτσι ώστε $x_2 - x_3 \geq 2 + x_1$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4$$

$$x_1 \geq -2, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0$$

Μπορούμε να το φέρουμε σε κανονική μορφή ως εξής:

Η x_1 δεν είναι απαραίτητα θετική, οπότε στη θέση της χρησιμοποιούμε τη μεταβλητή $x_1' = x_1 + 2$. Με αυτή την αλλαγή, ο περιορισμός $x_1 \geq -2$ δίνει τον περιορισμό θετικότητας $x_1' \geq 0$.

Η x_2 δεν είναι απαραίτητα θετική, οπότε τη γράφουμε ως τη διαφορά δύο θετικών μεταβλητών: $x_2^+ - x_2^- = x_2$, όπου $x_2^+, x_2^- \geq 0$. Όπου εμφανίζεται η x_2 την αντικαθιστούμε με τη διαφορά $x_2^+ - x_2^-$ και θα προσθέσουμε τους περιορισμούς θετικότητας για τις x_2^+, x_2^-.

Το ΓΠ μετά από τις παραπάνω αλλαγές μεταβλητών γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\min -(x_1' - 2) + x_2^+ - x_2^- + 2x_3$$

Έτσι ώστε $x_2^+ - x_2^- - x_3 \geq x_1'$

$$x_1' + 2x_2^+ - 2x_2^- - 3x_3 = 6$$

$$x_1', x_2^+, x_2^-, x_3 \geq 0$$

Εάν βρίσκαμε τη λύση αυτού του ΓΠ τότε πολύ εύκολα, χρησιμοποιώντας τις αλλαγές μεταβλητής $x_1' = x_1 + 2, x_2^+ - x_2^- = x_2$ θα βρίσκαμε τη βέλτιστη λύση του αρχικού ΓΠ.

Σε αυτό το σημείο έχουμε κατορθώσει να βρούμε ένα νέο ΓΠ, ισοδύναμο με το αρχικό στο οποίο οι μεταβλητές απόφασης είναι θετικές. Μπορούμε πολύ εύκολα να το φέρουμε σε κανονική μορφή παρατηρώντας τα εξής:

- Η ελαχιστοποίηση της $-x_1' + x_2^+ - x_2^- + 2x_3$ είναι ισοδύναμη με μεγιστοποίηση της $x_1' - x_2^- + x_2^- - 2x_3$.
- Ο ανισοτικός περιορισμός είναι ισοδύναμος με $x_1' - x_2^+ + x_2^- + x_3 \leq 0$
- Ο ισοτικός περιορισμός είναι ισοδύναμος με τους δύο περιορισμούς $x_1' + 2x_2^+ - 2x_2^- - 3x_3 \leq 6, x_1' + 2x_2^+ - 2x_2^- - 3x_3 \geq 6,$

Συνεπώς φτάνουμε στο ΓΠ:

$$\max x_1' - x_2^+ + x_2^- - 2x_3$$

Έτσι ώστε $x_1' - x_2^+ + x_2^- + x_3 \leq 0$

$$x_1' + 2x_2^+ - 2x_2^- - 3x_3 \leq 6$$

$$-x_1' - 2x_2^+ + 2x_2^- + 3x_3 \le -6$$

$$x_1', x_2^+, x_2^-, x_3 \ge 0$$

Το οποίο είναι σε κανονική μορφή.

Ο αλγόριθμος simplex

Θεωρήστε το ΓΠ:

$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \le 6 \qquad (1)$$

$$x_1 - x_2 \le 3$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Ο αλγόριθμος simplex βασίζεται στη μετατροπή των περιορισμών σε ισοτικούς καθώς και τη μετατροπή της αντικειμενικής συνάρτησης σε ισοτικό περιορισμό ως εξής:

$$\max \zeta$$

$$\zeta = x_1 + x_2 \qquad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 + z_1 = 6$$

$$x_1 - x_2 + z_2 = 3$$

$$x_1, x_2, z_1, z_2 \ge 0$$

Η μεταβλητή ζ αναπαριστά την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης την οποία θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε. Παρατηρήστε ότι το τελευταίο ΓΠ είναι ισοδύναμο με το προηγούμενο. Ο λόγος που μετατρέψαμε τα πάντα σε ισοτικούς περιορισμούς είναι γιατί τώρα μπορούμε να δούμε τις εφικτές λύσεις του ΓΠ ως λύσεις ενός συστήματος εξισώσεων, με την προσθήκη περιορισμών θετικότητας: κάθε εφικτό σημείο (x_1, x_2) του (1) αντιστοιχεί σε $(x_1, x_2, z_1, z_2, \zeta)$ τα οποία λύνουν το σύστημα εξισώσεων (2) και ικανοποιούν τους περιορισμούς θετικότητας.

Το σύστημα (2) συνήθως γράφεται στη μορφή λεξικού:

$$\begin{aligned} \max \zeta &= \quad x_1 + x_2 \\ z_1 &= 6 - x_1 - 2x_2 \\ z_2 &= 3 - x_1 + x_2 \\ x_1, x_2, z_1, z_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Εδώ στην ουσία έχουμε λύσει ως προς τις μεταβλητές ζ, z_1, z_2 , δηλαδή τη μεταβλητή που αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση και τις μεταβλητές χαλαρότητας. Η μορφή αυτή επιτρέπει εύκολη εξαγωγή λύσεων (άρα και εφικτών λύσεων του ΓΠ, όπως αναφέραμε παραπάνω), θέτοντας όλες τις μεταβλητές δεξιά των =, δηλαδή τις x_1, x_2 εδώ, ίσες με μηδέν. Οι λύσεις ως προς ζ, z_1, z_2 είναι προφανής: 0, 6 και 3 αντίστοιχα, δηλαδή οι σταθερές που εμφανίζονται στην αντίστοιχη εξίσωση. Παρατηρήστε ότι όλες οι τιμές των x_1, x_2, z_1, z_2 είναι θετικές. Για το εφικτό σημείο $(x_1, x_2) = (0, 0)$ που αντιστοιχεί η λύση αυτή, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $\zeta = 0$, δηλαδή ο σταθερός όρος που εμφανίζεται στην εξίσωση του ζ.

Μπορούμε να βρούμε άλλα εφικτά σημεία που βελτιώνουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης; Αν αυξήσουμε τη μεταβλητή x_1 έχοντας τη x_2 να παραμένει μηδενική και αλλάζοντας τις ζ, z_1, z_2 κατάλληλα ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις στο (3), τότε λαμβάνουμε πάντοτε λύση του συστήματος (3). Η λύση αυτή θα αντιστοιχεί και σε εφικτό σημείο του (1), αρκεί επιπλέον να ικανοποιούνται οι περιορισμοί θετικότητας. Όμως για μικρές αυξήσεις της x_1 αυτό θα είναι πάντα δυνατό αφού τότε $z_1 = 6 - x_1 \geq 0, z_2 = 3 - x_1 \geq 0$ αρκεί η τιμή της x_1 να μην υπερβεί το 3 (στο 3, η z_2 μηδενίζεται). Για τα εφικτά σημεία που αντιστοιχούν σε τιμές της x_1 μικρότερες του 3, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $\zeta = x_1$, άρα η μεγαλύτερη τιμή λαμβάνεται για $\zeta = x_1 = 3$. Με τον τρόπο αυτόν βρήκαμε ότι για το σημείο $(x_1, x_2) = (3, 0)$ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι βελτιωμένη (ίση με 3) σε σχέση με αυτή του σημείου $(x_1, x_2) = (0, 0)$ (όπου αντιστοιχούσε η τιμή 0).

Θα θέλαμε να επαναλάβουμε τα παραπάνω βήματα αρχίζοντας τώρα από τη λύση $(x_1, x_2, z_1, z_2, \zeta) = (3, 0, 3, 0, 3)$ που αντιστοιχεί στο νέο σημείο $(x_1, x_2) = (3, 0)$ και να βρίσκαμε νέες λύσεις (δηλαδή εφικτά σημεία) με μεγαλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Όμως η κατάσταση δεν είναι ίδια με αυτήν που αρχίσαμε στο σημείο $(x_1, x_2) = (0, 0)$: θυμηθείτε ότι αρχικά οι τιμές των μεταβλητών δεξιά των = ήταν μηδενικές ενώ τώρα η $x_1 = 3 > 0$ βρίσκεται δεξιά. Παρατηρήστε ότι η $z_2 = 0$ βρίσκεται αριστερά, συνεπώς εάν μετασχηματίζοντας το (3) κατορθώσουμε να φέρουμε δεξιά τη z_2 και αριστερά τη x_1 τότε θα επανέλθουμε στην “κανονικότητα”, δηλαδή όλες οι μηδενικές μεταβλητές βρίσκονται δεξιά των =. Με λίγα λόγια αυτό που επιθυμούμε είναι η αμοιβαία αλλαγή των ρόλων των μεταβλητών x_1, z_2
.

Αν και υπάρχουν πολλοί ισοδύναμοι τρόποι να το επιτύχουμε, ένας κοινός τρόπος είναι η πράξη **pivot**: *αφαιρούμε κατάλληλα πολλαπλάσια της εξίσωσης που αντιστοιχεί στη μεταβλητή* z_2 *από τις υπόλοιπες εξισώσεις ώστε να μηδενιστούν οι συντελεστές της* x_1 *σε όλες τις εξισώσεις, εκτός φυσικά από αυτή που περιέχει τη* z_2*. Στην εξίσωση του* z_2*, απλά λύνουμε ως προς* x_1*.*

Η εκτέλεση του pivot δίνει:

$$\begin{aligned} \max \zeta &= 3 - z_2 + 2x_2 \\ z_1 &= 3 + z_2 - 3x_2 \\ x_1 &= 3 - z_2 + x_2 \\ x_1, x_2&, z_1, z_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Τώρα η λύση που είχαμε βρει (η $(x_1, x_2, z_1, z_2, \zeta) = (3, 0, 3, 0, 3)$) είναι αυτή που αντιστοιχεί εάν θέσουμε όλες τις δεξιά μεταβλητές ίσες με μηδέν. Οπότε μπορούμε να αναζητήσουμε μια καλύτερη λύση αυξάνοντας πάλι μια από τις z_2, x_2 και τροποποιώντας τις ζ, z_1, x_1 ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις (και περιορισμοί θετικότητας) στο [(4)](#).
Παρατηρήστε ότι εφόσον η z_2 εμφανίζεται με αρνητικό συντελεστή στην εξίσωση της ζ, η αύξησή της οδηγεί σε αναγκαστική μείωση της ζ, άρα σε χειρότερο εφικτό σημείο. Αντίθετα η αύξηση της x_2, λόγω του θετικού συντελεστή της, επιφέρει αύξηση στη ζ. Η μέγιστη αύξηση επιτυγχάνεται για $x_2 = 1$ λόγω μηδενισμού της z_1. Η νέα λύση είναι η $(x_1, x_2, z_1, z_2, \zeta) = (3, 1, 0, 0, 5)$ η οποία είναι καλύτερη από τη $(3, 0, 3, 0, 3)$ αφού $\zeta = 5 > 3$
.

Για να αναζητήσουμε καλύτερη λύση, κάνουμε ξανά pivot για να ανταλλάξουμε τον ρόλο των x_2, z_1

$$\begin{aligned} \max \zeta &= 5 - \frac{1}{3}z_2 - \frac{2}{3}x_2 \\ x_2 &= 1 + \frac{1}{3}z_2 - \frac{1}{3}z_1 \\ x_2 &= 1 + \frac{1}{3}z_2 - \frac{1}{3}z_1 \\ x_1 &= 4 - \frac{2}{3}z_2 - \frac{1}{3}z_1 \\ x_1, x_2&, z_1, z_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι σε όλες τις λύσεις ισχύει $\zeta = 5 - \frac{1}{3}z_2 - \frac{2}{3}x_2 \leq 5$ άρα η λύση $(x_1, x_2, z_1, z_2, \zeta) = (3, 1, 0, 0, 5)$ θα πρέπει να είναι η βέλτιστη.

Σε κάθε λεξικό, η λύση που εξάγουμε θέτοντας τις μεταβλητές δεξιά του = να ειναι μηδενικές, είναι η **βασική εφικτή λύση (basic feasible solution)**. Οι μεταβλητές αριστερά του = (εκτός της ζ) λέγονται **βασικές μεταβλητές** και εκτός την περίπτωση των εκφυλισμένων ΓΠ, είναι μη μηδενικές. Οι δεξιά μεταβλητές είναι οι **μη βασικές μεταβλητές**. Το σύνολο των βασικών μεταβλητών λέγεται **βάση**. Άρα η πράξη pivot βγάζει μια μεταβλητή από τη βάση και εισάγει μια άλλη στη θέση της.

Κατά συνέπεια, για το λεξικό (5) η βασική εφικτή λύση είναι η $(x_1, x_2, z_1, z_2, \zeta) = (3, 1, 0, 0, 5)$, βασικές μεταβλητές είναι οι x_1, x_2 και μη βασικές οι z_1, z_2