Διάλεξη 6

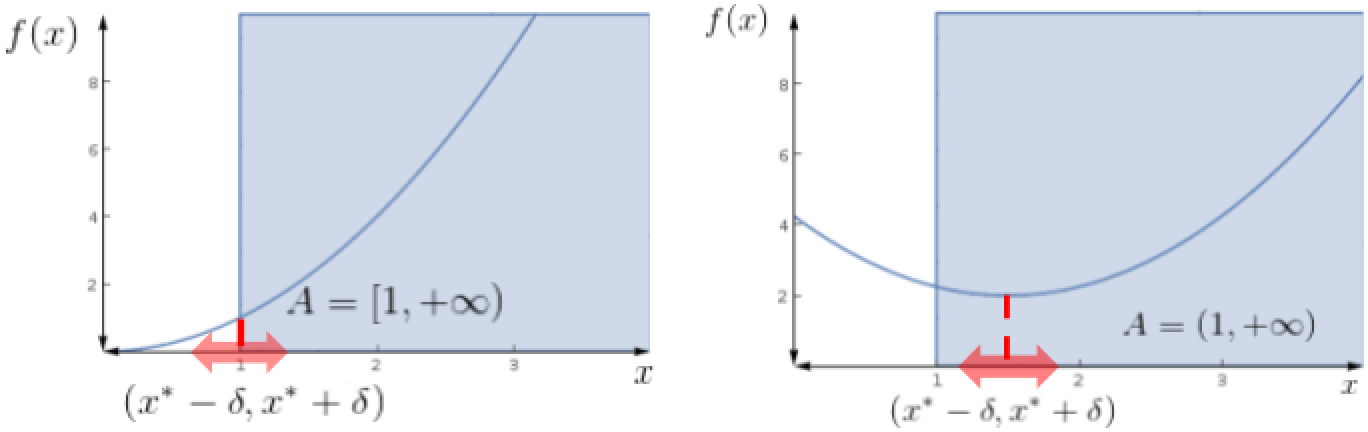
Βελτιστοποίηση συναρτήσεων μιας μεταβλητής χωρίς περιορισμούς, Πέμπτη 8/3/18

Θα δούμε μέθοδους επίλυσης προβλημάτων της μορφής $\min_{x \in A} f(x)$ όπου το A είναι ανοιχτό σύνολο, δηλαδή χωρίς συνοριακά σημεία, π.χ., $A = \mathbb{R}, A = (0, +\infty), A = (-1, 5)$. Στη διάλεξη αυτή θα θεωρήσουμε $A \subseteq \mathbb{R}$, δηλαδή την περίπτωση μιας μεταβλητής απόφασης ώστε να εισαγάγουμε τις βασικές ιδέες.

Περιεχόμενα

1. Αναγκαία συνθήκη για βέλτιστη λύση

Εφόσον η βέλτιστη λύση, εάν υπάρχει, δεν είναι συνοριακό σημείο, υπάρχει ένα αρκετά μικρό διάστημα $(x^* - \delta, x^* + \delta)$ το οποίο βρίσκεται αυστηρά εντός του A.



Αριστερά το σύνολο A δεν είναι ανοικτό και η βέλτιστη λύση $x^*=1$ βρίσκεται στο σύνορο. Η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης στη βέλτιστη λύση δεν είναι μηδενική. Στο δεξί διάγραμμα η βέλτιστη λύση είναι η $x^*=1$ και αφού το A είναι ανοικτό υπάρχει $\delta>0$ ώστε $(x^*-\delta, x^*+\delta)\subseteq A$.

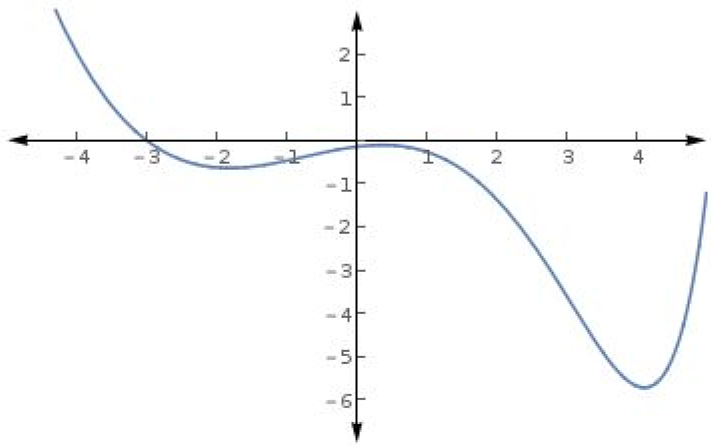
Παρατηρήστε ότι αυτό δεν θα ήταν δυνατό εάν το x^* ήταν συνοριακό σημείο ενός μη ανοικτού συνόλου. Για παράδειγμα εάν $A=[1,+\infty)$ και $x^*=1$, τότε δεν υπάρχει $(x^*-\delta, x^*+\delta)\subseteq A$ για οσοδήποτε μικρό $\delta>0$.

Τώρα για οποιοδήποτε δ όπως παραπάνω, για κάθε $x^*<x<x^*+\delta$ ισχύει $\dfrac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*}\geq 0$ άρα $f'(x^*)\geq 0$ λαμβάνοντας το όριο $x\to x^*$. Παρόμοια, για κάθε $x^*-\delta>x>x^*$ έχουμε $\dfrac{f(x^*)-f(x)}{x^*-x}\leq 0$ και άρα $f'(x^*)\leq 0$. Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες για την τιμή $f'(x^*)$ οδηγούμαστε στην ακόλουθη αναγκαία συνθήκη.

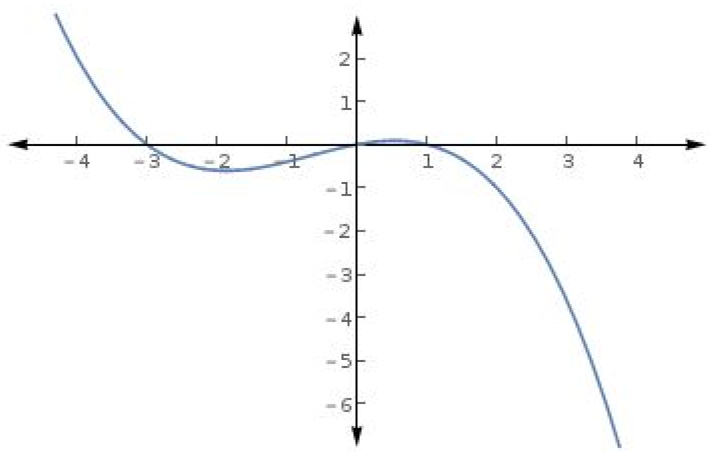
> ***ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1 [Αναγκαία συνθήκη βέλτιστης λύσης (για προβλήματα χωρίς περιορισμούς)]:***
> ***Εάν x^* βέλτιστη λύση τότε ισχύει $f'(x^*)=0$.***

ΟΜΩΣ ΠΡΟΣΟΧΗ!!! $f'(x^*)=0 \not\Rightarrow x^*$ βέλτιστη λύση

Η παραπάνω συνθήκη είναι μόνο αναγκαία και είναι σύνηθες να ισχύει $f'(x^*)=0$ και για σημεία που δεν είναι βέλτιστες λύσεις:



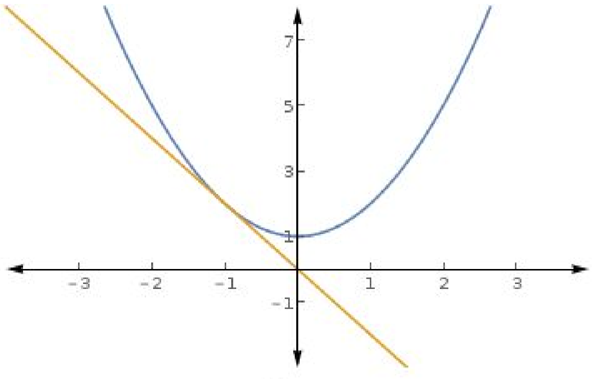
Ή ακόμη, μπορεί ανάμεσα στα σημεία που ικανοποιούν $f'(x^*) = 0$ να μην υπάρχει καμμία βέλτιστη λύση:



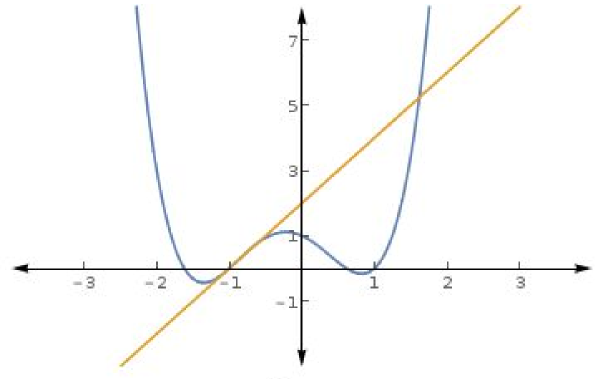
2. Μια ικανή συνθήκη: κυρτότητα

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ ***όπου*** S ***ένα διάστημα στο*** $\mathbb{R}$ ***είναι κυρτή εάν*** $f''(x) \geq 0$ ***για κάθε*** $x \in S$***.***

Μια σημαντική ιδιότητα των κυρτών συναρτήσεων είναι ότι η γραφική τους παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτόμενη ευθεία:



Κυρτή συνάρτηση: τα σημεία $(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης βρίσκονται όλα από πάνω από τα σημεία της εφαπτόμενης στο σημείο $(-1, 2)$.



Μη κυρτή συνάρτηση: σημεία τις γραφικής παράστασης βρίσκονται εκατέρωθεν της εφαπτομένης στο $(-1, 0)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2 [Ιδιότητα κυρτών συναρτήσεων]:
Εάν f κυρτή συνάρτηση τότε $f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ για κάθε x, x_0.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - [f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)]$ ικανοποιεί $g(x) \geq 0$ για κάθε x. Για τη g είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύουν $g(x_0) = g'(x_0) = 0$ και $g'' = f''$.
Η κυρτότητα της g σημαίνει ότι η g' είναι αύξουσα και άρα $g'(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq x_0$, ενώ $g'(x) \leq 0$ για κάθε $x \leq x_0$. Συνεπώς $g(x) \geq g(x_0) = 0$ για κάθε x.

(Εναλλακτική απόδειξη: Από το [θεώρημα Taylor](),
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$ για κάποιο ξ.) ■

Εάν στο σημείο x_0 μηδενίζεται η $f'(x_0)$, δηλαδή είναι σημείο μηδενικής κλίσης, από το θεώρημα συνεπάγεται ότι οι τιμές $f(x)$ βρίσκονται πάνω από την τιμή $f(x_0)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3 [Ικανή συνθήκη βέλτιστης λύσης]:
Εάν f κυρτή συνάρτηση και υπάρχει $x^* \in A$ που ικανοποιεί $f'(x^*) = 0$ τότε το x^* είναι βέλτιστη λύση.

Σε προβλήματα μεγιστοποίησης της μορφής $\max_{x \in A} f(x)$, όπου γνωρίζουμε ότι είναι ισοδύναμα με $\min_{x \in A} -f(x)$, πρέπει να ελέγξουμε ότι η $-f$ είναι κυρτή. Τέτοιες συναρτήσεις λέγονται κοίλες:

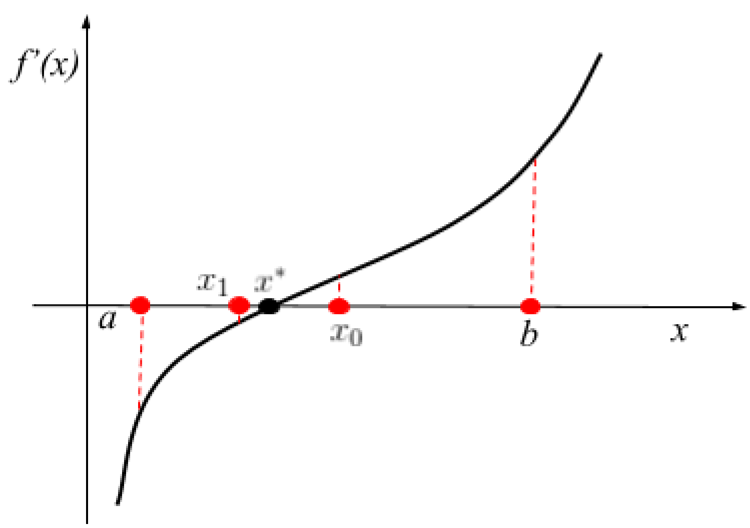
Ορισμός: Μια συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ όπου S ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ είναι <u>κοίλη</u> εάν $f''(x) \leq 0$ για κάθε $x \in S$.

3. Αλγόριθμοι αναζήτησης βέλτιστης λύσης

Οι δύο μέθοδοι που ακολουθούν αναζητούν βέλτιστες λύσεις ψάχνοντας για λύση της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

3.1 Δυαδική αναζήτηση

Έστω ότι δίνονται σημεία $a < b$, όπου $(a, b) \subseteq A$ και τα πρόσημα των παραγώγων $f'(a), f'(b)$ διαφορετικά μεταξύ τους, πχ, $f'(a) < 0, f'(b) > 0$. Από το [θεώρημα του Bolzano](#) προκύπτει ότι υπάρχει τιμή $x^* \in (a, b)$ με $f'(x^*) = 0$. Η βασική ιδέα της δυαδικής αναζήτησης είναι ότι εάν η τιμή της παραγώγου $f'(c)$ στο ενδιάμεσο σημείο $c = (a + b)/2$ του διαστήματος είναι αρνητική, τότε σίγουρα μια λύση της $f'(x) = 0$ βρίσκεται στο διάστημα $[c, b]$. Εάν $f'(c) > 0$ τότε το ίδιο ισχύει για το διάστημα $[a, c]$ και άρα σε κάθε περίπτωση συρρικνώνουμε το διάστημα αναζήτησης στο μισό.



ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΥΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ

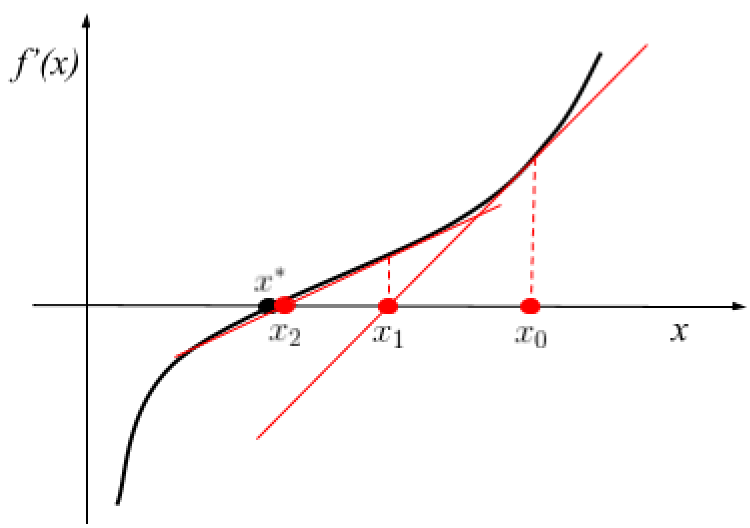
1. **Έστω** (a, b) **διάστημα με** $f'(a), f'(b)$ **ετερόσημα και** $c = \dfrac{a+b}{2}$
2. **Εάν το** $f'(c)$ **έχει το ίδιο πρόσημο με το** $f'(a)$ **τότε θέσε** $a = c$
3. **Εάν το** $f'(c)$ **έχει το ίδιο πρόσημο με το** $f'(b)$ **τότε θέσε** $b = c$
4. **Επανέλαβε το 1.**

Ανάλυση

3.2 Η μέθοδος Newton

Η μέθοδος του Newton σε κάθε επανάληψη δέχεται ως είσοδο μια εκτίμηση x_n της ρίζας x^* και παράγει μια νέα, τη x_{n+1}, ως εξής:
Θεωρούμε την ευθεία $y = f'(x_n) + f''(x_n)(x - x_n)$ η οποία εφάπτεται της γραφικής παράστασης της $f'(x)$ στο σημείο $(x_n, f'(x_n))$. Η νέα εκτίμηση x_{n+1} είναι το x εκείνο στο οποίο η ευθεία τέμνει τον οριζόντιο άξονα, δηλαδή $0 = f'(x_n) + f''(x_n)(x_{n+1} - x_n)$.

Λύνοντας ως προς x_{n+1} παίρνουμε $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$.



ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON

1. **Έστω αρχικό σημείο x_0, θέσε $n = 0$**
2. $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$
3. **Επανέλαβε το 2.**

Ανάλυση x_0

$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2$ όπου C μια σταθερά.