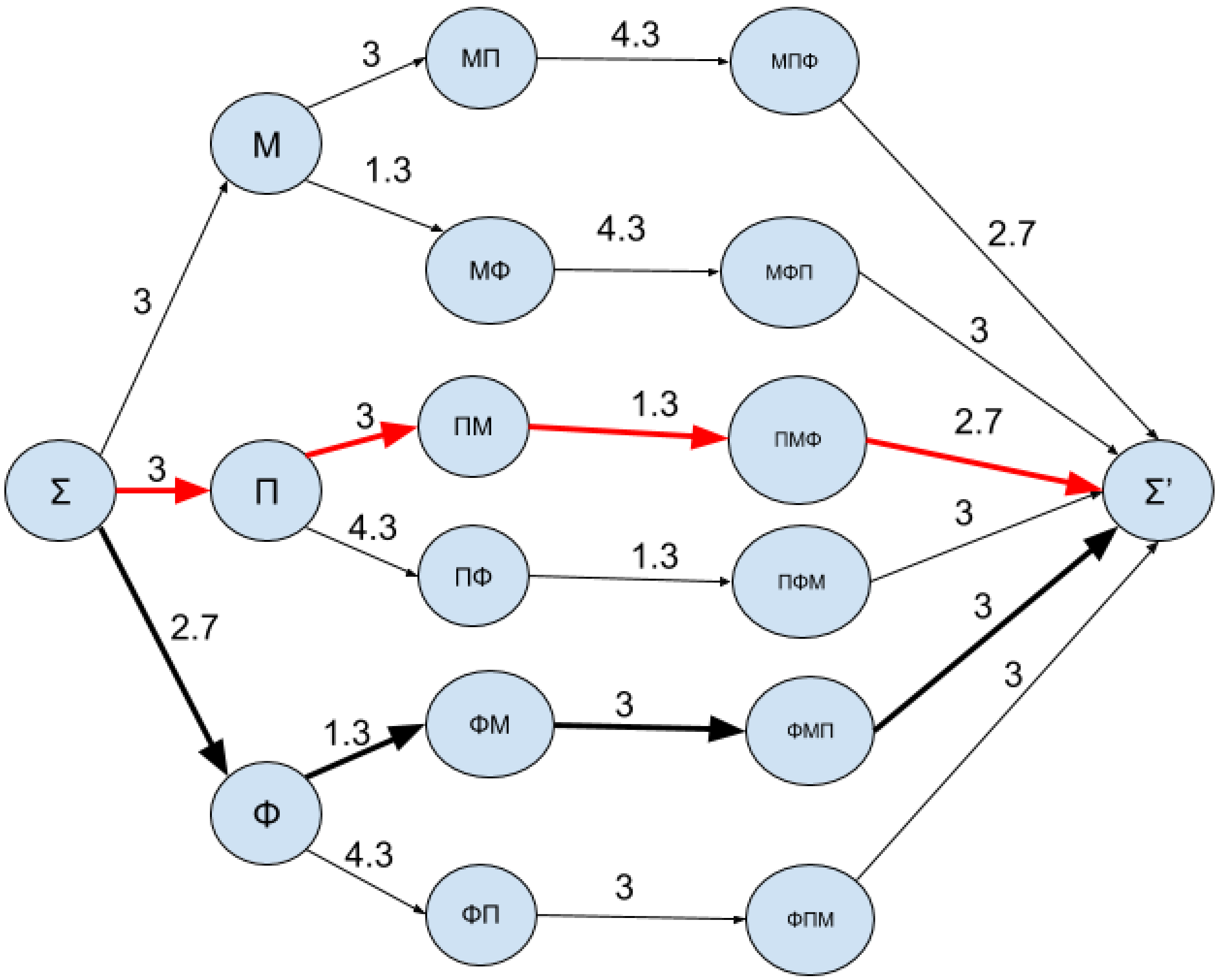
Διάλεξη 5

Διαμόρφωση προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού, Πέμπτη 1/3/18

Στην προηγούμενη διάλεξη διαμορφώσαμε το πρόβλημα του συντομότερου μονοπατιού ως ακέραιο πρόγραμμα. Αυτό δεν είναι χρήσιμο αφού σχεδόν πάντα οι γνωστοί εξειδικευμένοι αλγόριθμοι εύρεσης συντομότερων μονοπατιών, όπως ο αλγόριθμος του Dijkstra και ο Bellman-Ford, είναι πιο γρήγοροι από αλγόριθμους επίλυσης γενικών ακέραιων προγραμμάτων. Μάλιστα, ιδιαίτερα σύνηθες είναι το αντίστροφο: η διαμόρφωση προβλημάτων βελτιστοποίησης ως προβλήματα εύρεσης συντομότερου μονοπατιού και επίλυση με έναν από τους παραπάνω αλγορίθμους (σχεδόν πάντα με Bellman-Ford όπως θα δούμε αργότερα στο μάθημα). Μια τέτοια διαμόρφωση δεν είναι πάντα δυνατή και πολλές φορές απαιτεί εφευρετικότητα. Προβλήματα αυτού του τύπου ονομάζονται προβλήματα **δυναμικού προγραμματισμού**.

Παράδειγμα 1: πλανόδιος πωλητής (ξανά)

Για το παράδειγμα με τα [καθημερινά ψώνια (Διάλεξη 1)]() θεωρήστε το παρακάτω γράφημα:



Οι κορυφές αντιστοιχούν στις τοποθεσίες από όπου έχουμε ήδη περάσει. Για παράδειγμα, από την Σ μπορούμε να περάσουμε πρώτα από την τοποθεσία Μ, Φ ή Π. Εάν μεταβούμε στην Μ τότε μένει να επισκεφτούμε μια από τις ΜΠ, ΜΦ. Εάν επιλέξουμε να επισκεφτούμε τη Φ, τότε μεταβαίνουμε στην κορυφή ΜΠΦ. (Εάν είχαμε επιλέξει την Π τότε θα είχαμε βρεθεί στη ΜΦΠ.)

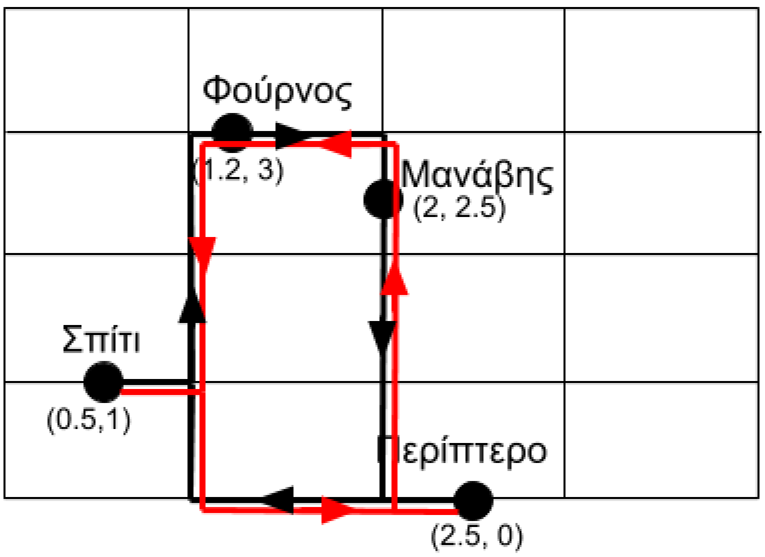
Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή μπορεί να διαμορφωθεί ισοδύναμα ως πρόβλημα εύρεσης συντομότερου μονοπατιού για το παραπάνω γράφημα αφού:

1. Κάθε διαδρομή του πλανόδιου πωλητή που ξεκινώντας από την τοποθεσία Σ, περνάει από τις Μ, Π, Φ και επιστρέφει στην Σ, αντιστοιχεί με ένα μονοπάτι από την κορυφή Σ στην Σ’.
2. Αντιστρόφως, κάθε τέτοιο μονοπάτι αντιστοιχεί σε κυκλική διαδρομή που ξεκινάει από Σ, περνάει από Μ,Π,Φ και επιστρέφει στη Σ.

3. Το μήκος κάθε διαδρομής του πωλητή αντιστοιχεί στο μήκος του αντίστοιχου μονοπατιού.

Συνεπώς η συντομότερη κυκλική διαδρομή που περνάει από τις τρεις τοποθεσίες αντιστοιχεί στο συντομότερο μονοπάτι από την κορυφή Σ στην Σ’ του παραπάνω γραφήματος.

Υπάρχουν δύο συντομότερα μονοπάτια: το Σ→Φ→Μ→Π→Σ’ και η ίδια διαδρομή με την ανάποδη φορά: Σ→Π→Μ→Φ→Σ’ με μήκος 10. Οι βέλτιστες λύσεις για το πρόβλημα είναι οι δύο κυκλικές διαδρομές που αντιστοιχούν στα μονοπάτια αυτά.



Για τη λύση προβλημάτων συντομότερου μονοπατιού μπορείτε να χρησιμοποιείτε solvers που είναι διαθέσιμοι στον παγκόσμιο ιστό, όπως:

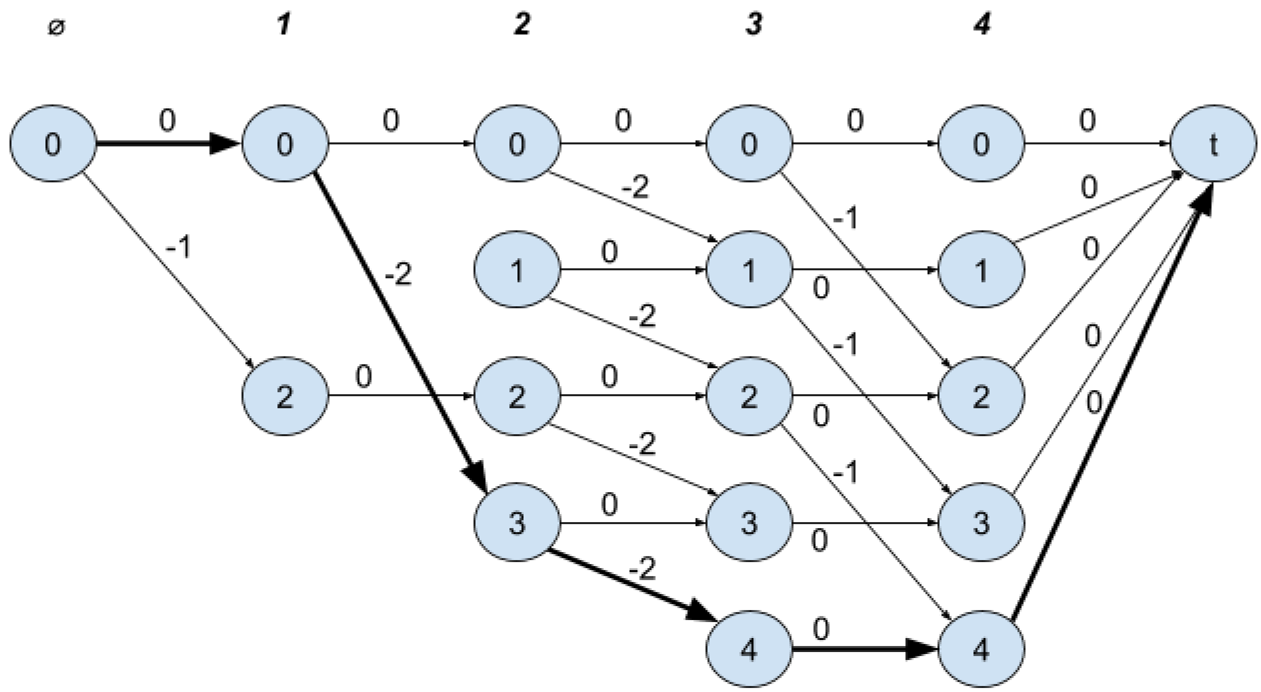
- https://www-m9.ma.tum.de/graph-algorithms/spp-bellman-ford/index_en.html
- https://www.easycalculation.com/operations-research/shortest-path-calculator.php

Παράδειγμα 2: σάκος (ξανά)

Θεωρείστε το πρόβλημα γεμίσματος ενός σάκου χωρητικότητας 4 κιλών (βλ. Διάλεξη 3) με 4 αντικείμενα και δεδομένα:

#αντ.	***1***	***2***	***3***	***4***
αξία	1	2	2	1
βάρος (κιλά)	2	3	1	2

Μπορούμε να διαμορφώσουμε το πρόβλημα με δυναμικό προγραμματισμό χρησιμοποιώντας το γράφημα:



Οι κορυφές είναι διαταγμένες από αριστερά προς δεξιά σε στήλες που αφορούν την εξέταση καθενός αντικειμένου από #1 έως #4 για περίληψη στο σάκο. Η αριστερότερη κορυφή αντιστοιχεί σε άδειο σάκο (βάρους 0). Σε κάθε κορυφή αναγράφεται το αντίστοιχο βάρος του σάκου. Η στήλη 1 έχει δύο κορυφές που αφορούν αντιστοίχως στην περίληψη ή όχι του αντικειμένου #1. Για παράδειγμα, η συμπερίληψη του #1 οδηγεί από την αριστερότερη κορυφή στην κορυφή 2 (αφού το βάρος του #1 είναι 2 κιλά) της στήλης 1. Ο αριθμός που αναγράφεται σε κάθε ακμή είναι η αξία που προστίθεται στο σάκο από την συμπερίληψη ή όχι του αντίστοιχου αντικειμένου στο σάκο. Εφόσον η χωρητικότητα του σάκου είναι 4 κιλά, δεν επιτρέπονται ακμές προς κορυφές με βάρος μεγαλύτερο του 4. Η δεξιότερη κορυφή t είναι μια εικονική κορυφή τερματισμού.

Παρατηρήστε ότι:

1. Κάθε μονοπάτι από τη δεξιότερη ακμή 0 προς την t αντιστοιχεί σε μια επιλογή αντικειμένων που επιλέγονται για εισαγωγή στο σάκο, χωρίς να παραβιάζεται ο περιορισμός χωρητικότητας.
2. Κάθε υποσύνολο αντικειμένων που δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα του σάκου αντιστοιχεί σε κάποιο μονοπάτι του παραπάνω γραφήματος.
3. Το άθροισμα των βαρών κατά μήκος των ακμών ενός μονοπατιού αντιστοιχεί στη συνολική αξία των αντίστοιχων αντικειμένων που επιλέγησαν για εισαγωγή.

Συνεπώς, το συντομότερο μονοπάτι αντιστοιχεί στην επιλογή αντικειμένων με τη μέγιστη συνολική αξία.