Κεφ. 4 Ανελίξεις - Αλυσίδες Μάρκοφ

4.1. Γενικά

Μία διακριτή στοχαστική ανέλιξη ορίζεται σαν μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ Θεωρούμε εδώ ότι οι X_i μπορούν να πάρουν τιμές σε ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών S που θα ονομάζουμε και σύνολο καταστάσεων (state space). Αν δηλαδή είναι $S = \{s_1, s_2, .., s_M\}$ η X_n μπορεί να πάρει τιμές είτε s_1 είτε s_2 ... είτε s_M.

Μία πλήρης πιθανολογική περιγραφή των X_n απαιτεί την γνώση των πιθανοτήτων $P(X_{i_1} = s_{j_1}, X_{i_2} = s_{j_2}, \dots, X_{i_k} = s_{j_k})$ γιά όλα τα $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$, $s_{j_1}, \dots, s_{j_k}$. Μία τέτοια περιγραφή είναι οπωσδήποτε περίπλοκη, γι' αυτό εξετάζει κανείς ειδικές περιπτώσεις ανελίξεων όπου οι πιθανότητες εκφράζονται απλούστερα. Η πιό απλή ειδική περίπτωση είναι νά έχουμε X_i ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με γνωστές κατανομές. Τότε η από κοινού πιθανότης π.χ. $P(X_1 = s_1, X_{10} = s_2, X_{25} = s_3)$ υπολογίζεται σαν το γινόμενο $P(X_1 = s_1) \cdot P(X_{10} = s_2) P(X_{25} = s_3)$, και η περιγραφή είναι πλήρης. Αν όμως θέλουμε να περιγράψουμε φαινόμενα όπου υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των X_i η παραπάνω περιγραφή δεν βοηθά.

Μιά απλή μορφή εξάρτησης είναι η εξής: Η X_n να εξαρτάται <u>μόνο</u> από την τιμή που πήρε η ανέλιξη την προηγούμενη χρονική στιγμή X_{n-1} και όχι από παλαιότερες τιμές, δηλαδή την τιμή της X_{n-2}, X_{n-3} κτλ. Η εξάρτηση αυτή περιγράφεται ως εξής:

<u>Ιδιότης Μαρκόφ</u>. Η ιδιότης ισχύει αν

$$P(X_n = s_j \,/\, X_{n-1} = s_i,\ X_{n-2} = s_k,\ X_{n-3} = \cdots,\ X_0 = s_e)$$
$$= P(X_n = s_j \,/\, X_{n-1} = s_i)$$

Δηλαδή η πιθανότης να βρεθεί η X_n στην κατάσταση s_i εξαρτάται μόνο από το πού βρισκόταν η X_{n-1}. αλλά όχι από το πού βρισκόταν οι X_{n-2}, X_{n-3}, κτλ. Εφεξής θα γράφουμε τις καταστάσεις σαν i, j, k αντί για , s_j, s_k, κτλ.

Γενικά η πιθανότης $P(X_n=j \,/\, X_{n-1}=i)$ εξαρτάται από το i, το j αλλά και το $n-1$ (δηλ. τις καταστάσεις <u>και</u> τον χρόνο). Αν επιπρόσθετα ο χρόνος n δεν παίζει ρόλο στις πιθανότητες, είναι δηλαδή

$P(X_n=j \,/\, X_{n-1}=i) = p_{ij}$ <u>ανεξάρτητο</u> του n

τότε λέμε ότι οι μεταβάσεις είναι <u>ανεξάρτητες του χρόνου</u>. Θα περιοριστούμε εδώ σε μεταβάσεις ανεξάρτητες του χρόνου.

Εφόσον οι καταστάσεις $i, j, k, \ldots$ είναι πεπερασμένες, οι πιθανότητες μεταβάσεως p_{ij} (ή p_{ji}) μπορούν να θεωρηθούν στοιχεία μιας μήτρας $P = \{p_{ij}\}$ που θα ονομάζουμε <u>μήτρα μεταβάσεως</u> και φυσικά το στοιχείο με δείκτη γραμμής i και δείκτη στήλης j δείχνει την πιθανότητα να μεταβεί η ανέλιξη στην κατάσταση j υπό την συνθήκη ότι ξεκίνησε στην κατάσταση i.

<u>Παράδειγμα 1</u>. Θεωρούμε ένα καταναλωτή κάποιου προϊόντος για το οποίο υπάρχουν δύο

"μάρκες", η A και η B. Ο καταναλωτής μπορεί να αγοράζει κάποιο μήνα το A ή το B. Έστω ότι έχουμε παρατηρήσει ότι αν ο καταναλωτής αγοράζει κάποιο μήνα το A, τον επόμενο μήνα αγοράζει το A με πιθανότητα 80%, ενώ αν αγοράζει το B τον επόμενο μήνα αγοράζει πάλι το B με πιθανότητα όμως 70%. Οι προτιμήσεις του καταναλωτή μπορούν να περιγραφούν σαν τ.μ. $X_0, X_1, X_2, \ldots$ με $X_i = A$ ή B. Όσα είπαμε για τις πιθανότητες γράφονται και ως εξής

$P(X_{n+1} = A \mid X_n = A) = 0{,}80$ και άρα $P(X_{n+1} = B \mid X_n = A)$ $= 1 - P(X_{n+1} = A \mid X_n = A) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$. Επίσης $P(X_{n+1} = B \mid X_n = B) = 0{,}70$ και άρα $P(X_{n+1} = A \mid X_n = B) = 0{,}30$. (Θυμηθείτε ότι οι υπό συνθήκη πιθανότητες αθροίζουν σε μονάδα). Η μήτρα μετάβασης είναι

$$P = \begin{array}{c c} & \\ A \to & \\ B \to & \\ & \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 0{,}80 & 0{,}20 \\ 0{,}30 & 0{,}70 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} A\uparrow & \quad B\uparrow \end{array} \end{array}$$

■

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1$

όπου δεχόμαστε καταστάσεις $j = \{1, 2, .., M\}$. Αυτό προκύπτει διότι $\sum_{j=1}^{M} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = 1$, και φυσικά

ισχύει για κάθε (γραμμή) i. Θα λέμε ότι μία μήτρα P με μη αρνητικά στοιχεία είναι <u>στοχαστική</u> αν τα στοιχεία κάθε γραμμής αθροίζουν σε μονάδα.

<u>Άσκηση</u> Αν P στοχαστική δείξτε ότι και η P^2 είναι στοχαστική.

Είδαμε ότι αν τα $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε $P(X_1, \dots, X_n) = P(X_1)P(X_2)\dots P(X_n)$. Αντίστοιχη απλοποίηση ισχύει και στις αλυσίδες Markov. Έτσι, το γεγονός $X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n$ έχει πιθανότητα

$$P(X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \frac{P(X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1)}{P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1)} P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1)$$

$$= P(X_n = i_n / X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1)$$

$$= P(X_n = i_n / X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_{n-1} = i_{n-1} / X_{n-2} = i_{n-2}) \dots P(X_2 = i_2 / X_1 = i_1) P(X_1 = i_1)$$

$$= P(X_1 = i_1)\, p_{i_1 i_2}\, p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

ή ισοδύναμα $P(X_n = i_n, \dots, X_2 = i_2 / X_1 = i_1) = p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$

<u>Εφαρμογές</u> (1) Έστω

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

· Υπολογίστε την πιθανότητα $X_2 = 2$ $X_3 = 3$ δεδομένου ότι $X_1 = 1$.

Η πιθανότητα $P(X_3 = 3, X_2 = 2 / X_1 = 1)$ ισούται με $p_{12} \cdot p_{23} = 1/4 \cdot 3/4 = 3/16$.

· Υπολογίστε την πιθανότητα παραμονής στις καταστάσεις 1,2 επί 3 περιόδους, δεδομένου ότι η ανέλιξη ξεκινά από 1.

Η πιθανότητα είναι $p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} + p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22}$
$= 1/2^2 + 0 + 1/2 \cdot 1/4 + 1/4 \cdot 1/4 = 7/16$

Τα παραπάνω εφαρμόζονται στον υπολογισμό των $P(X_n=j/X_0=i)$.
Στο προηγούμενο παράδειγμα της αγοράς, ας υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X_{n+2}=A/X_n=A)$. Προφανώς είναι

$$P(X_{n+2}=A/X_n=A) = \frac{P(X_{n+2}=A, X_n=A)}{P(X_n=A)} = \{P(X_{n+2}=A, X_{n+1}=A, X_n=A) +$$

$$P(X_{n+2}=A, X_{n+1}=B, X_n=A)\} / P(X_n=A) =$$

$$= \frac{P(X_{n+2}=A/X_{n+1}=A, X_n=A)\, P(X_{n+1}=A, X_n=A)}{P(X_n=A)} + \frac{P(X_{n+2}=A/X_{n+1}=B, X_n=A)\, P(X_{n+1}=B, X_n=A)}{P(X_n=A)}$$

$$= P(X_{n+2}=A/X_{n+1}=A)\, P(X_{n+1}=A/X_n=A) + P(X_{n+2}=A/X_{n+1}=B)\, P(X_{n+1}=B/X_n=A)$$

$$= P_{AA}\cdot P_{AA} + P_{BA}\cdot P_{AB} = 0{,}8\times 0{,}8 + 0{,}3\times 0{,}2 = 0{,}70.$$

Εδώ χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες των πιθανοτήτων υπό συνθήκη καθώς και η ιδιότητα Μαρκόφ.

Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύεται ως εξής: Έστω ότι οι καταστάσεις είναι $j=1,2,..,M$. Επίσης συμβολίζουμε με P_{ij} τα $P(X_{n+1}=j/X_n=i)$. Τότε είναι

$$P(X_{n+2}=j/X_n=i) = \frac{P(X_{n+2}=j, X_n=i)}{P(X_n=i)} = \sum_{k=1}^{M} \frac{P(X_{n+2}=j, X_{n+1}=k, X_n=i)}{P(X_n=i)}$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \frac{P(X_{n+2}=j, X_{n+1}=k, X_n=i)\, P(X_{n+1}=k, X_n=i)}{P(X_{n+1}=k, X_n=i)\, P(X_n=i)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} P(X_{n+2}=j/X_{n+1}=k, X_n=i)\, P(X_{n+1}=k/X_n=i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} P(X_{n+2}=j/X_{n+1}=k)\, P(X_{n+1}=k/X_n=i) = \sum_{k=1}^{M} P_{ik} P_{kj}$$

Στο προτελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα Μαρκόφ.

Αν συμβολίσουμε με $P_{ij}^{(k)}$ την πιθανότητα μετάβασης από i σε j σε k βήματα, δηλαδή

$p_{ij}^{(k)} = P(X_{n+k}=j \mid X_n=i)$, οι παραπάνω υπολογισμοί έδειξαν ότι $p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}^{(1)} p_{kj}^{(1)}$, όπου βέβαια $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$. Όμως ο όρος $\sum_k p_{ik}p_{kj}$ είναι ακριβώς το (i,j) στοιχείο της μήτρας P^2. Αν συμβολίσουμε το (i,j) στοιχείο της μήτρας P^k ως p_{ij}^k, οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι $p_{ij}^{(2)} = p_{ij}^2$. Επαγωγικά μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι ισχύει το

<u>Θεώρημα</u> Ισχύει (α) $p_{ij}^{(k)} = p_{ij}^k \quad (k \geq 1)$

$$(\beta) \quad p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)} \quad (1 < m < n)$$

Όσον αφορά το (α), το αποδείξαμε για $k=2$. Αν ισχύει για κάποιο k, τότε $p_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{m} p_{il} p_{lj}^{(k)} = \sum_{l=1}^{m} p_{il} p_{lj}^{k}$ δηλαδή το τελευταίο άθροισμα είναι το (i,j) στοιχείο του γινομένου της μήτρας P και της P^k, άρα είναι το (i,j) στοιχείο της P^{k+1}.

Όσον αφορά το (β), αφήνεται σαν άσκηση.

<u>Εφαρμογή</u> Στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογίζουμε τα $p_{ij}^{(3)}$. Είναι $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ και $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}30 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$

Άρα $P^3 = PP^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}30 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}525 & 0{,}475 \end{pmatrix}$

Παρατηρούμε, αν συνεχίσουμε τους υπολογισμούς ότι

$$P^6 = P^3 \cdot P^3 = \begin{pmatrix} 0,606.. & 0,394. \\ 0,591. & 0,409. \end{pmatrix} \qquad P^7 = P \cdot P^6 = \begin{pmatrix} 0,603. & 0,397. \\ 0,595 & 0,405. \end{pmatrix}$$

και γενικά $P^n \xrightarrow[n\to\infty]{} P^\infty = \begin{pmatrix} 0,60 & 0,40 \\ 0,60 & 0,40 \end{pmatrix}$. Η ιδιάζουσα μορφή της $\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty$ σημαίνει και το εξής: Αν η αρχική κατανομή της αλυσίδας είναι $P(X_0=A)=\pi$, $P(X_0=B)=1-\pi$, δηλαδή $\pi^0=(\pi, 1-\pi)$ τότε η κατανομή της X_n, π^n είναι $\pi^n=(\pi,1-\pi)P^n$ και για $n\to\infty$ είναι $\pi^\infty = \pi^0 \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = (0,6 \,,\, 0,4)$ που είναι ανεξάρτητο της αρχικής κατανομής! Αυτό είναι ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον αποτέλεσμα για τις εφαρμογές, που όπως θα δούμε συμβαίνει αρκετά συχνά, όχι όμως πάντοτε!

Είναι προφανές ότι το π^∞ ικανοποιεί τις εξισώσεις $\pi^\infty P = \pi^\infty$ και βέβαια $\sum_i \pi_i^\infty = 1$. Η πρώτη εξίσωση προκύπτει από την εξής παρατήρηση:

$$\pi^\infty = \lim_{n\to\infty} \pi^0 P^n = \left(\lim_{n\to\infty} \pi^0 P^{n-1}\right) P = \pi^\infty P.$$

Αν οι δύο αυτές σχέσεις έχουν μία μοναδική λύση, τότε η "τελική" πιθανότητα π^∞ είναι ανεξάρτητη της αρχικής π^0, εφόσον $\lim_{n\to\infty} \pi^0 P^n = \pi^\infty$, που είναι ανεξάρτητο από την τιμή του π^0 από την οποία ξεκινήσαμε.

<u>Προσοχή</u> Το ότι η εξίσωση $xP=x$, $\sum_i x_i=1$ έχει μοναδική λύση <u>δεν</u> σημαίνει ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} \pi^0 P^n$ υπάρχει. Θεωρείστε $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $\pi^0=(1/3, 2/3)$

Είναι $P^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Άρα $\pi^{2k} = (1/3, 2/3)$ ενώ $\pi^{2k+1} = (2/3, 1/3)$ οπότε $\lim_{n\to\infty} \pi^n$ <u>δεν</u> υπάρχει

Αν όμως το π^∞ υπάρχει και αν η εξίσωση $xP = x$, $\sum_i x_i = 1$ έχει μοναδική λύση, θα πρέπει $\pi^\infty = x$.

4.2. Εργοδικότης

Το τί θα συμβεί στην κατανομή π^n για μεγάλο n και κατά πόσο θα υπάρχει κάποια σύγκλιση εξαρτάται από την μήτρα P^n. Σε περίπτωση που $\lim_{n\to\infty} P^n$ υπάρχει, τότε η P ονομάζεται <u>εργοδική μήτρα</u>. Γράφουμε δε $\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty$.

Οι δυνάμεις μίας μήτρας υπολογίζονται εύκολα αφού πρώτα διαγωνοποιηθεί. Αν $P = M\Lambda M^{-1}$ όπου Λ διαγώνιος με στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, είναι $P^2 = M\Lambda M^{-1} M\Lambda M^{-1} = M\Lambda^2 M^{-1}$ και γενικά $P^n = M\Lambda^n M^{-1}$.
Προφανώς η Λ^n είναι διαγώνιος μήτρα με στοιχεία $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n$, όπου λ_i οι ιδιοτιμές (χαρακτηριστικές τιμές) της P. Αν $|\lambda_i| < 1$ θα είναι $\lim_{n\to\infty} \lambda_i^n = 0$ ενώ αν $|\lambda_i| > 1$ θα είναι $\lim \lambda_i^n = \infty$. Προφανώς αν $|\lambda| = 1$ και $\lambda = 1$ είναι $\lambda_i^n = 1$. Όμως αν $|\lambda| = 1$ και $\lambda = -1$ τότε το $\lim_{n\to\infty} \lambda_i^n$ <u>δεν</u> υπάρχει. (Το ίδιο ισχύει αν $\lambda = \cos\frac{2\pi}{k} + i \sin\frac{2\pi}{k}$ όπου i η φανταστική μονάδα με $i^2 = -1$).

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\det(\lambda I - P) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}$ $= \lambda^3 - 1$. Οι ιδιοτιμές ικανοποιούν $\lambda^3 = 1$. Υπάρχουν τρείς διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda = 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ και άρα $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i & \\ 0 & & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{pmatrix}$. Επιβεβαιώστε ότι $\Lambda^3 = I$.

της εργοδικότητας

Η εξίσωση Γ αποδεικνύεται από το

<u>Θεώρημα 1</u> Οι ιδιοτιμές λ μιας στοχαστικής μήτρας έχουν $|\lambda| \leq 1$

<u>Απόδειξη</u> Αν π ιδιοδιάνυσμα, είναι $\pi P = \lambda \pi$ ή

$$\lambda \pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}.$$ Παίρνοντας απόλυτες τιμές είναι

$$|\lambda|\,|\pi_j| \leq \sum_i |\pi_i|\,|P_{ij}| = \sum_i |\pi_i| P_{ij} \quad (P_{ij} \geq 0).$$

Αν $|\pi_j| = \max_i |\pi_i|$ (και $\pi \neq 0$) είναι

$$|\lambda| \leq \sum_i \frac{|\pi_i|}{|\pi_j|} P_{ij} \leq \sum_i P_{ji} = 1 \quad \left(\frac{|\pi_i|}{|\pi_j|} \leq 1\right) \blacksquare$$

Ένας χαρακτηρισμός των εργοδικών μητρών είναι ο εξής

<u>Θεώρημα 2</u> Μία στοχαστική μήτρα P είναι εργοδική ακριβώς όταν

(α) Η μόνη ιδιοτιμή με $|\lambda|=1$ είναι η 1 και

(β) Αν η $\lambda=1$ έχει πολλαπλότητα k, υπάρχουν k ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda=1$.

<u>Μερική Απόδειξη</u> Οι παραπάνω συνθήκες επιτρέπουν την διαγωνιοποίηση της μήτρας με μορφή $P = M\Lambda M^{-1}$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \underbrace{1 \; \ddots \; 1}_{k\text{-φορές}} & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix} \quad \text{με τα } |\lambda_i| < 1.$$

Τότε $$\lim_{n\to\infty} \Lambda^n = \begin{pmatrix} \underbrace{1 \; \ddots \; 1}_{k\text{-φορές}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ άρα } P^\infty = M\Lambda^\infty M^{-1} \blacksquare$$

<u>Παράδειγμα</u>

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Είναι $$\det(\lambda I - P) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}4 & \lambda & -0{,}6 & 0 \\ -0{,}2 & 0 & \lambda-0{,}1 & -0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 \lambda (\lambda - 0{,}1)$$

και άρα οι ιδιοτιμές είναι 0, $0{,}1$ και 1 με πολλαπλότητα 2. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι στην $\lambda=1$ αντιστοιχούν τα αντ. ιδιοδιανύσματα $(1\ 0\ 0\ 0)$ και $(0\ 0\ 0\ 1)$, στην $\lambda=0{,}1$ το $(-2, 0, 9, -7)$ και στην $\lambda=0$ το $(4, 5, -30, 21)$. Είναι λοιπόν για

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\-2&0&9&-7\\4&5&-30&21\end{pmatrix}, \quad MP=\Lambda M \quad \text{με} \quad \Lambda=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0{,}1&\\&&&0\end{pmatrix}$$

και $P=M^{-1}\Lambda M$, $\quad P^{\infty}=M^{-1}\Lambda^{\infty}M = M^{-1}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}M$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\8/15&0&0&7/15\\2/9&0&0&7/9\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad \text{εφόσον} \quad M^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\8/15&7/15&10/15&3/15\\2/9&7/9&1/9&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

Αν λοιπόν $\pi^0=(0,1,0,0)$ $\quad \pi^{\infty}=(8/15, 0, 0, 7/15)$ ενώ αν $\pi^0=(0,0,1,0)$ είναι $\pi^{\infty}=(2/9, 0, 0, 7/9)$. ■

Μια περίπτωση όπου μπορούμε να συμπεράνουμε εύκολα την εργοδικότητα είναι όταν η P είναι κανονική. Μια μήτρα P είναι κανονική αν για κάποιο ακέραιο $k>0$, η P^k έχει όλα τα στοιχεία της θετικά (όχι μηδέν)

Παράδειγμα Η $P=\begin{pmatrix}0{,}1&0{,}9\\0{,}2&0{,}8\end{pmatrix}$ είναι κανονική, ενώ η $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ δεν είναι. Η $P=\begin{pmatrix}0{,}5&0{,}5\\1&0\end{pmatrix}$ είναι κανονική εφόσον $P^2=\begin{pmatrix}0{,}75&0{,}25\\0{,}5&0{,}5\end{pmatrix}$. Η $P=\begin{pmatrix}1&0\\1/2&1/2\end{pmatrix}$ δεν είναι κανονική.

Η χρησιμότητα των κανονικών μητρών οφείλεται στό

<u>Θεώρημα 3</u> Αν P κανονική, η μόνη ιδιοτιμή της με $|\lambda|=1$ είναι η $\lambda=1$, και έχει πολλαπλότητα 1.

Η απόδειξη παραλείπεται. Από τό θεώρημα αυτό σε συνδυασμό με αυτά της σελ. 8 έπεται ότι

<u>Πόρισμα</u> (α) Μία κανονική μήτρα είναι εργοδική.

(β) Η P^∞ έχει όλες τις γραμμές της ίδιες

Το (β) είναι πολύ σημαντικό. Ισχύει διότι

$P^\infty = \lim_{n\to\infty} P^n = \left(\lim_{n\to\infty} P^{n-1}\right) P = P^\infty P$. Άρα κάθε γραμμή π_i της P^∞ ικανοποιεί την σχέση

$\pi_i = \pi_i P$, που όμως σύμφωνα με το θεώρημα έχει μία μόνο λύση (τό μοναδικό ιδιοδιάνυσμα της $\lambda=1$).

Έτσι η $P^\infty = \begin{pmatrix} \cdots \pi \cdots \\ \cdots \pi \cdots \\ \vdots \\ \cdots \pi \cdots \end{pmatrix}$ όπου π ιδιοδιάνυσμα της P.

Τότε γιά οποιαδήποτε αρχική κατανομή π^0 είναι $\pi^\infty = \pi^0 (P^\infty) = \pi^0 \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \end{pmatrix} = \pi$. Δηλαδή η τελική κατανομή π^∞ <u>δεν</u> εξαρτάται από τό πώς άρχισε η διαδικασία.

<u>Παράδειγμα</u> Η $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι κανονική.

Για $\lambda=1$ τό ιδιοδιάνυσμα $(\pi, 1-\pi)$ ικανοποιεί

$$(\pi, 1-\pi) = (\pi, 1-\pi)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{2}\pi + 1 - \pi, \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

ή $1 = \frac{3}{2}\pi$ ή $\pi = \frac{2}{3}$. Άρα $P^\infty = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. Αν π.χ.

$\pi^0 = (1/5, 4/5)$ $\qquad \pi^\infty = (1/5, 4/5)\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 4/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (1/5, 4/5)$

4.3. Πιθανότητες πρώτης μετάβασης - Ταξινόμηση καταστάσεων.

Έστω $X_0=i$, δηλαδή αρχίζουμε από την κατάσταση i, και ενδιαφερόμαστε για το πότε θα φτάσει η X για πρώτη φορά σε μια κατάσταση j. (Αν $j=i$, ενδιαφερόμαστε για το πότε θα επιστρέψει στην αρχική κατάσταση). Για την εξέταση αυτού του θέματος, είναι χρήσιμο να ορίσουμε την ποσότητα

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n=j,\ X_k\neq j \text{ για } k<n \,/\, X_0=i)$$

που είναι η πιθανότητα να γίνει η πρώτη μετάβαση στην κατάσταση j την περίοδο n — δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση ήταν i.

Μεταξύ των $f_{ij}^{(n)}$ και $p_{ij}^{(n)}$ υπάρχει η σχέση

$$p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + f_{ij}^{(2)} p_{jj}^{(n-2)} + \dots + f_{ij}^{(n-1)} p_{jj} + f_{ij}^{(n)}$$

που ισχύει για τον εξής λόγο: Είδαμε ότι $p_{ij}^{(n)} = P(X_n=j/X_0=i)$, δηλαδή η πιθανότης να βρεθεί το X στην j τον χρόνο n. Όμως το γεγονός $\{X_n=j\}$ μπορεί να αναλυθεί σε γεγονότα $\{X_n=j,\ X_k=j,\ X_\lambda\neq j \text{ για } \lambda\neq k\}$ για $k=1,2,\dots,n$, που είναι αμοιβαία αποκλειόμενα. Επομένως η $p_{ij}^{(n)}$ είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των γεγονότων αυτών, που μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει ότι αντιστοιχούν στους όρους του αθροίσματος του δεξιού σκέλους της εξίσωσης.

Από την παραπάνω σχέση και την γνώση των $p_{jj}^{(k)}$ μπορεί κανείς να υπολογίσει αναδρομικά τα $f_{ij}^{(n)}$

ως εξής

$$f_{ij}^{(1)} = P_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$
$$f_{ij}^{(2)} = P_{ij}^{(2)} - f_{ij}^{(1)} P_{jj}$$
$$f_{ij}^{(3)} = P_{ij}^{(3)} - f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(2)} - f_{ij}^{(2)} P_{jj}$$
$$\cdots\cdots$$
$$f_{ij}^{(n)} = P_{ij}^{(n)} - f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(n-1)} - \cdots - f_{ij}^{(n-2)} P_{jj}^{(2)} - f_{ij}^{(n-1)} P_{jj}$$

<u>Παράδειγμα</u> $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. Βρείτε τα $f_{11}^{(n)}$ $n=1,2,3$

Είναι $f_{ij}^{(1)} = P_{ij}^{(1)}$. Άρα $f_{11}^{(1)} = p_{11} = 0,8$. Το $f_{11}^{(2)} = P_{11}^{(2)} - p_{11} f_{11}^{(1)}$ $= P_{11}^{(2)} - p_{11}^2 = 0,70 - 0,8^2 = 0,06$. Τέλος $f_{11}^{(3)} = P_{11}^{(3)} - f_{11}^{(1)} P_{11}^{(2)} - f_{11}^{(2)} P_{11}$ $= (0,7 \times 0,8 + 0,2 \times 0,45) - 0,7 \times 0,8 - 0,8 \times 0,06 = 0,042$.
Προφανώς ο υπολογισμός των $f_{ij}^{(n)}$ είναι αρκετά επίπονος.

Το άθροισμα $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ μας δείχνει με ποιά πιθανότητα θα υπάρξει κάποια μετάβαση μέσα στο χρόνο. Αν $f_{ij} = 1$, θα υπάρξει οπωσδήποτε κάποια μετάβαση, αν όμως $f_{ij} < 1$, υπάρχει περίπτωση να μην υπάρξει ποτέ μετάβαση στην j. Ανάλογα, αν $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$ υπάρχει περίπτωση να μην επιστρέψουμε ποτέ στην κατάσταση απ' όπου ξεκινήσαμε.

<u>Ορισμός</u> Μία κατάσταση i ονομάζεται <u>μεταβατική</u> αν $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$ ενώ διαφορετικά ονομάζεται <u>επαναλαμβανόμενη</u>. Μία κατάσταση i ονομάζεται <u>απορροφητική</u> αν $p_{ii} = 1$. Τέλος αν για μία i ισχύει $P_{ii}^{(n)} = 0$ για n που δεν είναι πολλαπλάσια κάποιου αριθμού d, η i ονομάζεται <u>περιοδική</u> <u>με περίοδο d</u>, εφόσον το d είναι ο μεγαλύτερος δυνατός ακέραιος.

<u>Παράδειγμα</u> (α) Έστω $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Είναι $f_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{12}^{(n)} < 1$ αφού με πιθανότητα $1/3$ η επόμενη κατάσταση είναι η 3 που είναι συγκεντρωτική. Επίσης είναι $f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} < 1$ για τον ίδιο λόγο. Τέλος ισχύει και $f_{22} < 1$ (γιατί;). Όμως είναι $f_{33}^{(1)} = 1$, $f_{33}^{(k)} = 0$ $k > 1$, και άρα $f_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{33}^{(n)} = 1$. Άρα οι καταστάσεις $\{1,2\}$ είναι μεταβατικές ενώ η $\{3\}$ συγκεντρωτική και επαναληπτική (επαναλαμβανόμενη)

(β) Οι δύο καταστάσεις της $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ έχουν περίοδο 2, ενώ οι καταστάσεις της $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ έχουν περίοδο 4. Όλες είναι επαναληπτικές.

(γ) Οι καταστάσεις $\{1,2\}$ της $P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

είναι περιοδικές και μεταβατικές, ενώ η $\{3\}$ είναι επαναλαμβανόμενη.

(δ) Και οι δύο καταστάσεις της $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

είναι επαναληπτικές. Αυτό ισχύει για τον εξής λόγο: Αν $X_0 = 1$, η πιθανότητα να μην υπάρξει επιστροφή στην κατάσταση 1 τις χρονικές στιγμές $n = 1, 2, \ldots, M$ είναι $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^M$, που τείνει στο 0 καθώς $M \to \infty$. Άρα $f_{11} = 1$ και επίσης (με ίδιο επιχείρημα) είναι $f_{22} = 1$. ■

Τα παραπάνω παραδείγματα παρουσιάζουν ωρισμένα φαινόμενα που μπορούν να αναλυθούν διαγραμματικά: Λέμε ότι η κατάσταση i <u>ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΕΙ</u>

με την j αν είναι $p_{ij}^{(n)}>0$ για κάποιο $n\geq 1$, και γράφουμε $i\to j$. Αν είναι $i\to j$ και $j\to i$ γράφουμε $i\leftrightarrow j$. Μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί ότι η σχέση $\leftrightarrow$ ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες

(α) $i\leftrightarrow i$ για κάθε i

(β) $i\leftrightarrow j$ συνεπάγεται $j\leftrightarrow i$

(γ) Αν $i\leftrightarrow j$ και $j\leftrightarrow k$ τότε είναι $i\leftrightarrow k$

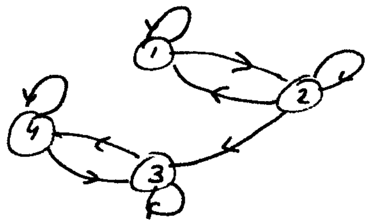
Αυτό σημαίνει ότι η $\leftrightarrow$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Αν $[i]=\{j / i\leftrightarrow j\}$ δηλαδή το $[i]$ περιλαμβάνει όλες τις καταστάσεις που επικοινωνούν με το i και αντιστρόφως, τα $[i]$ ονομάζονται κλάσεις ισοδυναμίας. Ισχύει προφανώς ότι αν $i\leftrightarrow j$ θα είναι $[i]=[j]$ (γιατί;) ενώ αν $i\not\leftrightarrow j$ οι κλάσεις $[i]$ και $[j]$ δεν έχουν τομή, δηλαδή $[i]\cap[j]=\emptyset$. Διότι αν κάποια κατάσταση k είχε $k\in[i]$ και $k\in[j]$ θα ήταν $k\leftrightarrow i$ και $k\leftrightarrow j$ και άρα $i\leftrightarrow j$, που όμως δεν μπορεί να ισχύει εφόσον $i\not\leftrightarrow j$. Αυτό σημαίνει ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας $[i]$ διαμερίζουν το σύνολο των καταστάσεων.

Οι σχέσεις $\to$, $\leftrightarrow$ και οι κλάσεις ισοδυναμίας βρίσκονται γραφικά ως εξής. Έστω P μια μήτρα μετάβασης. Κατασκευάζουμε προσανατολισμένο γράφημα με κορυφές τις καταστάσεις $i,j,k,\dots$. Κατασκευάζουμε πλευρές (i,j) μόνο αν $p_{ij}>0$. Θα είναι $i\to j$ μόνο αν υπάρχει κάποια διαδρομή από i προς j. Θα είναι $i\leftrightarrow j$ μόνο αν υπάρχει κύκλωμα που περιλαμβάνει τις i και j.

<u>Παράδειγμα</u>

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Το αντίστοιχο γράφημα είναι



Είναι $1\to 1$, $1\to 2$, $1\to 3$, $1\to 4$, $2\to 2$, $2\to 1$, $2\to 3$, $2\to 4$, $3\to 3$, $3\to 4$, $4\to 4$, $4\to 3$. Άρα $1\leftrightarrow 1$, $1\leftrightarrow 2$, $3\leftrightarrow 3$, $3\leftrightarrow 4$ και άρα οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι $[1]=[2]=\{1,2\}$ $[3]=[4]=\{3,4\}$. ■

Η σημασία των παραπάνω φαίνεται στο

<u>Θεώρημα</u> Έστω $i \leftrightarrow j$

(α) Αν η i είναι επαναλαμβανόμενη, το ίδιο ισχύει και για την j

(β) Αν η i είναι μεταβατική, το ίδιο ισχύει και για την j

(γ) Αν η i είναι περιοδική με περίοδο d το ίδιο ισχύει και για την j.

Η απόδειξη παραλείπεται, ας δούμε όμως τις εφαρμογές του, σε συνδυασμό με τις διάφορες κλάσεις ισοδυναμίας. Κατασκευάζουμε ένα δεύτερο γράφημα με κορυφές τις κλάσεις ισοδυναμίας $[i], [j], \dots$ και πλευρές $([i],[j])$ μόνο αν $i \to j$. Παρατηρούμε ότι αν $([i],[j])$ είναι μία πλευρά

η $([j],[i])$ δεν μπορεί νά είναι πλευρά, γιατί θά ήταν $i \to j$ και $j \to i$ οπότε θά ήταν $[i]=[j]$.
Με το ίδιο σκεπτικό, στο νέο γράφημα δεν υπάρχουν κυκλώματα.

Εξετάζουμε τώρα τις κορυφές από τις οποίες δεν ξεκινά καμία πλευρά. Τέτοιες κορυφές υπάρχουν, γιατί αλλιώς θά υπήρχε κάποιο κύκλωμα. Αυτές οι κορυφές αντιστοιχούν σε επαναλαμβανόμενες καταστάσεις, ενώ οι υπόλοιπες ανήκουν σε μεταβατικές καταστάσεις.

Παράδειγμα (α) Από το γράφημα της προηγούμενης σελίδας παίρνουμε το νέο γράφημα

$$\{1,2\} \longrightarrow \{3,4\}$$

Αυτό δείχνει ότι οι $\{3,4\}$ είναι επαναλαμβανόμενες καταστάσεις. Εφόσον στην P δεν υπάρχει περιοδικότητα, όπως φαίνεται στο αρχικό γράφημα, η P^∞ υπάρχει και είναι της μορφής

$$P^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & x_3 & y_3 \\ 0 & 0 & x_4 & y_4 \end{pmatrix}$$

Από την σχέση $P^\infty P = P^\infty$ μπορεί κανείς νά συμπεράνει ότι $x_i = y_i = 1/2$ και άρα $P^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ & & \vdots & \end{pmatrix}$

(β) Έστω $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Το αρχικό γράφημα

είναι  και επομένως οι

κλάσεις είναι $[1]=\{1\}$ και $[2]=[3]=\{2,3\}$. Το νέο γράφημα είναι $\boxed{1} \longrightarrow \boxed{2}$ και άρα οι $\{2,3\}$ είναι επαναλαμβανόμενες ενώ η $[1]$ μεταβατική. Η P^{∞} υπάρχει και είναι της μορφής $\begin{pmatrix} 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$

Από την $P^{\infty} P = P^{\infty}$ έπεται ότι $x_i = 2/3$ ενώ $y_i = 1/3$. ■

Αν και τα $f_{ij}^{(n)}$, οι πιθανότητες πρώτης μετάβασης, υπολογίζονται δύσκολα, οι αναμενόμενες τιμές των χρόνων πρώτης μετάβασης υπολογίζονται εύκολα. Ορίζουμε με μ_{ij} τον αναμενόμενο χρόνο πρώτης μετάβασης και είναι

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} & \text{αν } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1 \\ \infty & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση</u> Αν $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1$, το μ_{ij} θα έπρεπε να είναι $\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} + \infty (1 - f_{ij}) = \infty$. Έτσι δικαιολογείται ο παραπάνω ορισμός. Μπορεί επίσης να είναι $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$ αλλά $\mu_{ij} = \sum_{n=1} n f_{ij}^{(n)} = \infty$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάτι τέτοιο είναι αδύνατο αν οι καταστάσεις είναι πεπερασμένες.

Τα μ_{ij} που είναι $< \infty$ ικανοποιούν την σχέση

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mu_{kj}$$

Αυτό ισχύει εφόσον

$$\mu_{ij} = \underbrace{1 \cdot p_{ij}}_{\text{μετάβαση στο } j} + \underbrace{\sum_{k \neq j} p_{ik}}_{\text{μετάβαση σε } k \neq j} \underbrace{\left(\sum_{n \geq 2} n f_{kj}^{(n-1)} \right)}_{\text{αναμενόμ. χρόνος μετάβασης}}$$

Αλλά

$$\sum_{n \geq 2} n f_{kj}^{(n-1)} = \sum_{n \geq 2} (n-1) f_{kj}^{(n-1)} + \sum_{n \geq 2} f_{kj}^{(n-1)} = \mu_{kj} + 1$$

εφόσον πρέπει $\sum_{n} f_{kj}^{(n)} = 1$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση προκύπτει το αποτέλεσμα.

<u>Εφαρμογή</u> Έστω
$$P = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0{,}8 & 0{,}2 & & \\ 2 & & 0{,}7 & 0{,}3 & \\ 3 & & & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 4 & & & & 1 \end{array}$$
που μπορεί να ερμηνευθεί σαν η πιθανότης προαγωγής ενός στελέχους από ένα βαθμό ιεραρχίας σε ένα έτος στον επόμενο. Η ερώτηση είναι πόσα έτη χρειάζονται για να φθάσει ένα στέλεχος από τον 1° στον 4° βαθμό. Θέλουμε να υπολογίσουμε το μ_{14}. Είναι

- $\mu_{34} = 1 + 0{,}5\,\mu_{34} \longrightarrow \mu_{34} = 2$
- $\mu_{24} = 1 + p_{22}\mu_{24} + p_{23}\mu_{34} \Rightarrow 0{,}3\,\mu_{24} = 0{,}3\times 2 + 1 \Rightarrow 16/3 = \mu_{24}$
- $\mu_{14} = 1 + p_{11}\mu_{14} + p_{12}\mu_{24} \longrightarrow 0{,}2\,\mu_{14} = 1 + 0{,}2\times\frac{16}{3} \Rightarrow \mu_{14} = 31/3$

4.4. Συναρτήσεις κόστους

Έστω $j = 1, \dots, M$ οι καταστάσεις. Συχνά για κάθε κατάσταση συνδέουμε ένα κόστος (κέρδος) $C(j)$, και έτσι τον χρόνο n έχουμε κόστος $C(X_n)$. Προφανώς $E\{C(X_n)/X_0 = i\} = \sum_{j=1}^{M} C(j)\, p_{ij}^{(n)}$. Επίσης συχνά ενδιαφερόμαστε για το διαχρονικό μέσο κόστος $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} C(X_n)$ και την αναμενόμενη τιμή του

$$E\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} C(X_n)/X_0 = i\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} C(j)\, p_{ij}^{(n)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{M} C(j)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)}\right)$$

. Έτσι βλέπουμε ότι η παράσταση $\bar{p}_{ij}^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)}$ παρουσιάζει ενδιαφέρον.

Προφανώς το $\bar{p}^{(n)}_{ij}$ είναι το i-j στοιχείο της μήτρας $\bar{P}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^n$. Μπορεί κανείς εύκολα να δεί ότι

$$\bar{P}_N \cdot P = \bar{P}_N + \frac{P - P^{N+1}}{N}$$

Όμως γιά $N \to \infty$, η P^{N+1} είναι φραγμένη από το $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\end{smallmatrix}\right)$, άρα $\lim_{N \to \infty} \frac{P - P^{N+1}}{N} = 0$. Άρα το

$\lim_{N \to \infty} \bar{P}_N = \bar{P}$ υπάρχει και ικανοποιεί την σχέση $\bar{P} P = \bar{P}$. Άρα το $\bar{p}^{(n)}_{ij}$ που είναι η i-οστή γραμμή της $\bar{P}_N$ έχει σαν όριο την i-οστή γραμμή της $\bar{P}$, που ικανοποιεί την εξίσωση $\bar{P} P = \bar{P}$.
Αν τώρα η εξίσωση $xP = x$, $\sum x_i = 1$ έχει μοναδική λύση, η λύση αυτή ταυτίζεται με το $\lim_{N \to \infty} \bar{p}^{(n)}_{ij} = \pi^{\infty}_j$

Παρατηρούμε ότι σ' αυτή την περίπτωση <u>όλες</u> οι γραμμές είναι ίδιες, δηλαδή $\pi^{\infty}_{ij} = \pi^{\infty}_j$ για κάθε i, και άρα το $\pi^{\infty} = (\pi^{\infty}_1, \ldots, \pi^{\infty}_m)$ είναι οι οριακές πιθανότητες που είδαμε στις εργοδικές και τις κανονικές μήτρες. Έτσι αφού βρεί το π^{∞} μπορούμε να υπολογίσουμε το $\lim_{N} E\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} C(X_n)\right\} \overset{ws}{=} \sum_{j=1}^{M} \pi^{\infty}_j \cdot C(j)$

<u>Παράδειγμα</u> (α) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C(1) = 10 \quad C(2) = -20$

Οπότε $E\{\ldots\} = 10 \tfrac{1}{2} + (-20)\tfrac{1}{2} = -5$

γιατί η μόνη λύση της $xP = x$ είναι $x = (1/2, 1/2)$.

(β) $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ $\quad \pi^{\infty} = (0{,}6\ ,\ 0{,}4)$. Αν $C(1) = 1000$

$C(2) = 0$, $\quad \bar{C} = 1000 \times 0{,}6 + 0 \times 0{,}4 = 600$

Πολλές φορές ενδιαφέρεται κανείς γιά το προεξοφλημένο αναμενόμενο κόστος

$$V(i,N) = E\left\{ \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(1+\rho)^n} C(X_n) \,\Big|\, X_0 = i \right\}$$

Είναι όμως $\quad V(i,N) = C(i) + \sum_{j=1} p_{ij} E\left\{ \sum_{n=1}^{N} \frac{C(X_n)}{(1+\rho)^n} \,\Big|\, X_1 = j \right\}$

$$= C(i) + \frac{1}{1+\rho} \sum_{j=1}^{M} p_{ij} E\left\{ \sum_{n=1}^{N} \frac{C(X_n)}{(1+\rho)^{n-1}} \,\Big|\, X_1 = j \right\}$$

Παρατηρούμε ότι $\quad E\left\{ \sum_{n=1} \frac{C(X_n)}{(1+\rho)^{n-1}} \,\Big|\, X_1 = j \right\} = V(j, N-1)$

οπότε είναι $\quad V(i,N) = C(i) + \frac{1}{1+\rho} \sum_{j=1}^{M} p_{ij} V(j, N-1)$

ή σε διανυσματική μορφή $\quad V(N) = C + \frac{1}{1+\rho} P V(N-1)$

όπου $\quad V(N) = \begin{pmatrix} V(1,N) \\ V(2,N) \\ \vdots \\ V(M,N) \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C(1) \\ \vdots \\ C(M) \end{pmatrix}$

Το όριο $\lim_{N\to\infty} V(N) = V$ υπάρχει και ικανοποιεί την σχέση $\quad \left(I - \frac{1}{1+\rho} P\right) V = C$

Παράδειγμα (α) $\quad P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rho = 0{,}1111\ldots$

οπότε $\frac{1}{1+\rho} = 0{,}9$. Το V ικανοποιεί την σχέση

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 0{,}9 \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \right] V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και άρα $\quad V = \begin{pmatrix} 6{,}727 \\ 4{,}909 \end{pmatrix}$

(β) Υπολογίστε τα $V(0), V(1), V(2)$. Είναι $V(0) = C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Το $V(1)$ ικανοποιεί την $\quad V(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}9 \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}72 \\ 0{,}27 \end{pmatrix}$

και $V(2) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0,9\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,3 & 0,7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1,72\\0,27\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2,287\\0,635\end{pmatrix}$

(γ) Υπολογίστε τα $V(1), V(2)$ γιά $\rho=0$. Είναι τότε

$V(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $V(1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,3 & 0,7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1,8\\0,3\end{pmatrix}$

$V(2) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,3 & 0,7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1,8\\0,3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2,50\\0,75\end{pmatrix}$

4.5. Διαδικασίες αποφάσεως Μαρκόφ

Θεωρούμε ότι σε κάποιο μοντέλο που περιγράφεται από πεπερασμένες καταστάσεις μπορούμε νά παρέμβουμε στις μήτρες μετάβασης επιλέγοντας κάποια δράση $d = 1, 2, .., D$. Έτσι έχουμε μήτρες μετάβασης P_d, που προσδιορίζουν την μετάβαση ανάλογα τού ποιά δράση επιλέξη. Το κόστος (κέρδος) ανά χρονική στιγμή είναι συνάρτηση γενικά της κατάστασης, του χρόνου, και της δράσης που επιλέξη, δηλαδή είναι $C(i, d, N)$.
Μία στρατηγική δ προσδιορίζει ποιά δράση d πρέπει νά επιλέξει (σύμφωνα με την στρατηγική) γιά κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή και σαν συνάρτηση της κατάστασης. Είναι δηλαδή $\delta(i, N) = d$.

Παράδειγμα Μία μηχανή είτε λειτουργεί ικανοποιητικά, είτε λειτουργεί ελαττωματικά είτε καθόλου (καταστάσεις $i = 1, 2, 3$ αντίστοιχα).

Το όφελος είναι 5, 3, 0 μονάδες ανά περίοδο, ανάλογα με την κατάσταση. Οι δράσεις είναι $d=1,2,3$ με
1: Καμμία παρέμβαση 2: Συντήρηση μηχανής
3: Ριζική επιδιόρθωση μηχανής. Το κόστος των δράσεων είναι $0, -1, -5$ αντίστοιχα. Μία στρατηγική (ανεξάρτητη του χρόνου) είναι π.χ. $\delta(1)=1$ $\delta(2)=2$ $\delta(3)=3$. Σε περίπτωση που εφαρμόσει η δ, η μήτρα μετάβασης είναι συνάρτηση των P_d. Έστω

$$P_1=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad P_2=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad P_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Για την συγκεκριμένη δ, $P_\delta=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

ενώ το κόστος ανά περίοδο είναι $C_\delta=\begin{pmatrix}5-0\\ 3-1\\ 0-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 2\\ -5\end{pmatrix}$

Αν $\rho=0{,}10$ το (άπειρο) προεξοφλημένο αναμενόμενο όφελος V_δ ικανοποιεί την σχέση

$$V_\delta = C_\delta + \frac{1}{1{,}1}P_\delta V_\delta \quad \text{ή}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{1{,}1}\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]V_\delta=\begin{pmatrix}5\\ 2\\ -5\end{pmatrix}\Rightarrow V_\delta=\begin{pmatrix}40{,}25\\ 37{,}21\\ 31{,}59\end{pmatrix}$$

Το μέσο αναμενόμενο κόστος, χωρίς προεξόφληση βρίσκεται ως εξής: είναι $\pi_\delta^\infty P_\delta=\pi_\delta^\infty$. Η P_δ είναι κανονική και το $\pi_\delta^\infty=\left(\frac{10}{15},\frac{4}{15},\frac{1}{15}\right)$, άρα $\bar{C}=\frac{10}{15}\cdot 5+\frac{4}{15}\cdot 2-\frac{1}{15}\cdot 5=\frac{53}{15}$ ■

Το φυσικό πρόβλημα που θέλει να λύσει κανείς είναι να βρεί την βέλτιστη στρατηγική με κριτήριο την μεγιστοποίηση του αναμενόμενου οφέλους, προεξοφλημένου ή όχι για πεπερασμένο ή άπειρο ορίζοντα. Η σημασία του απείρου ορίζοντα έγκειται στο ότι η βέλτιστη στρατηγική είναι απλούστερη από αυτή του πεπερασμένου ορίζοντα και προσεγγίζει ικανοποιητικά το βέλτιστο όφελος για σχετικά μεγάλους ορίζοντες.

Για <u>πεπερασμένο ορίζοντα</u> η βέλτιστη στρατηγική βρίσκεται με δυναμικό προγραμματισμό (προεξοφλημένο ή μέσο όφελος κόστος). Έστω $\hat{V}(i,N)$ το βέλτιστο (μέγιστο όφελος) αν $X_0=i$, δηλαδή

$$\hat{V}(i,N) = \max_{d} E\left\{ \sum_{i=0}^{N} \frac{c(X_i,\delta_i)}{(1+\rho)^i} \,/\, X_0=i \right\}$$

Μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί η εξίσωση ΔΠ που δίνει το $\hat{V}(i,N+1)$:

$$\hat{V}(i,N+1) = \max_{d=1,2,\ldots,D} \left\{ C(i,d) + \frac{1}{1+\rho} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(d)\hat{V}(j,N) \right\}$$

Η βέλτιστη δράση για $X_0=i$ και χρονικό ορίζοντα $N+1$ δίνεται από το d που ικανοποιεί το max. Προφανώς, για να λυθεί η εξίσωση ΔΠ χρειάζεται το $\hat{V}(i,0)$

<u>Παράδειγμα</u> Στο προηγούμενο παράδειγμα το

$$\hat{V}(i,0) = \max_{d=1,2,3} C(i,d) = \max_{d} \{\text{Κέρδος}(i) - \text{Κόστος}(d)\}$$

πράγμα που δείχνει ότι $\hat{d}=1$, δηλαδή δεν πρέπει να γίνει καμμία παρέμβαση στην μηχανή. Άρα

$\hat{V}(i,0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Για $N=1$ είναι $V(i,1) = \max_{d} \left\{ C(i,d) + \frac{1}{1+\rho} PV(0) \right\}$

$$\hat{V}(1,1)=\max_d \Big\{ C(1,d)+\frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{3} p_{1j}(d)\,\underbrace{C(j)}_{\to \hat{V}(j,0)}\Big\} = \quad (\text{Για } \rho=0{,}1)$$

$$=\max\Big\{5+\frac{1}{1{,}1}(0{,}7\times5+0{,}2\times3+0{,}1\times0),\ 4+\frac{1}{1{,}1}(0{,}9\times5+0{,}1\times3),\ 0+\frac{5}{1{,}1}\Big\}=\max\{8{,}73\ \ 8{,}36\ \ 4{,}54\}$$

Άρα $\hat{V}(1,1)=8{,}73$ και $\hat{\delta}(1,1)=1$, δηλαδή η καλύτερη δράση είναι η 1. Ανάλογα είναι

$$\hat{V}(2,1)=\max\Big\{3-0+\frac{1}{1{,}1}\{0{,}6\times3\},\ 3-1+\frac{1}{1{,}1}(0{,}5\times5+0{,}5\times3),\ -2+\frac{5}{1{,}1}\Big\}$$

$$=\max(4{,}63\ \ 5{,}64\ \ 2{,}54)=5{,}64 \quad \text{και } \hat{\delta}(2,1)=2$$

$$\hat{V}(3,1)=\max\Big(0+0\ \ -1+0\ \ -5+\frac{5}{1{,}1}\Big)=0 \quad \text{και } \hat{\delta}(3,1)=1$$

Για $N=2$ είναι

$$\hat{V}(1,2)=\max\Big\{5+\frac{1}{1{,}1}(0{,}7\times8{,}73+0{,}2\times5{,}64),\ 4+\frac{1}{1{,}1}(0{,}9\times8{,}73+0{,}1\times5{,}64),\ 0+\frac{8{,}73}{1{,}1}\Big)=\max(11{,}58,\ 11{,}66,\ 7{,}94)$$

$$=11{,}66 \qquad \hat{\delta}(1,2)=2$$

$$\hat{V}(2,2)=\max\Big\{3+\frac{1}{1{,}1}\,0{,}6\times5{,}64,\ 2+\frac{0{,}5\times8{,}73+0{,}5\times5{,}64}{1{,}1},\ -2+\frac{8{,}73}{1{,}1}\Big\}$$

$$=\max\{6{,}08\ \ 8{,}53\ \ 5{,}93\}=8{,}53 \qquad \hat{\delta}(2,2)=2$$

$$\hat{V}(3,2)=\max\Big\{0+\frac{0}{1{,}1},\ -1+\frac{0}{1{,}1},\ -5+\frac{8{,}73}{1{,}1}\Big\}=\max(0\ \ -1\ \ 2{,}94)=2{,}94$$

$$\hat{\delta}(3,2)=3.$$

Επιβεβαιώνεται ότι $\hat{\delta}(i,2)=\hat{\delta}(i,3)$ για $i=1,2,3$. ■

Η παραπάνω μέθοδος εφαρμόζεται είτε για προεξοφλημένα είτε όχι κριτήρια. Στην δεύτερη περίπτωση θέτουμε απλώς $\rho=0$.

Για ∞ χρονικό ορίζοντα θέλουμε να βρούμε την βέλτιστη στρατηγική $\delta(i,N)$. Μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι η βέλτιστη στρατηγική είναι ανεξάρτητη του χρόνου, είναι δηλαδή

$$\hat{\delta}(i,N_1)=\hat{\delta}(i,N_2) \quad (N_1\neq N_2).$$

Στην περίπτωση ∞ ορίζοντα με προεξοφλημένο όφελος, θέτουμε

$$\hat{V}(i) = \max_{\delta} E\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C(X_n;\delta)}{(1+\rho)^n} \,\Big|\, X_0 = i \right\}$$

Μπορεί πάλι να επιβεβαιωθεί ότι η $\hat{V}(i)$ ικανοποιεί την εξίσωση ΔΠ

$$\hat{V}(i) = \max_{d=1,2,..,D} \left\{ C(i;d) + \frac{1}{1+\rho} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(d)\, \hat{V}(j) \right\}.$$

Η εξίσωση ερμηνεύεται ως εξής: Έστω ότι από την αρχική κατάσταση i επιλέγεται κάποια δράση d, και γίνεται μία μετάβαση στο j (σύμφωνα με την μήτρα P_d). Το αναμενόμενο κέρδος είναι $C(i;d)$ για την μηδενική περίοδο σύν το προεξοφλημένο όφελος με έναρξη $X_1 = j$, με πιθανότητα $p_{ij}(d)$.
Η όλη διαδικασία πρέπει να συνεχισθεί κατά τον βέλτιστο τρόπο και άρα το αναμενόμενο όφελος είναι $\hat{V}(j)$. Προφανώς η καλύτερη d βελτιστοποιεί το $C(i;d)$ σύν το αναμενόμενο όφελος $\hat{V}(j)$, προεξοφλημένο με $\frac{1}{1+\rho}$ και σταθμισμένο με τα $p_{ij}(d)$.

Δεν είναι προφανές πώς λύνεται η παραπάνω εξίσωση ΔΠ, αντίθετα με τις προηγούμενες, που ίσχυαν για πεπερασμένο ορίζοντα. Μία μέθοδος είναι η εξής: Λύνω την εξίσωση ΔΠ για πεπερασμένο ορίζοντα και βρίσκω τα $\hat{V}(i;N)$ $N=1,2,\dots$
Μπορεί να αποδειχθεί ότι $\lim_{N\to\infty} \hat{V}(i;N) = \hat{V}(i)$, δηλ. η λύση της εξίσωσης ΔΠ για άπειρο ορίζοντα. Όμως η μέθοδος αυτή είναι υπολογιστικά επίπονη.

Εναλλακτικά, χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αλγόριθμο <u>Προσέγγισης Στρατηγικών</u> που οφείλεται στον R. Bellman.

(α) Θεωρούμε μία τυχαία στρατηγική δ_0. Υπολογίζουμε το προεξοφλημένο όφελός της με βάση την εξίσωση $V_{\delta_0} = C_{\delta_0} + \frac{1}{1+\rho} P_{\delta_0} V_{\delta_0}$

(β) Έστω ότι για μία στρατηγική δ_k, βρήκαμε το όφελός της V_{δ_k}. Βρίσκουμε μία νέα στρατηγική δ_{k+1} ως εξής: Η $\delta_{k+1}(i)$ είναι η δράση d που μεγιστοποιεί την παράσταση

$$C(i,d) + \frac{1}{1+\rho} \sum_{j=1}^{m} P_{ij}(d) V_{\delta_k}(j)$$

(γ) Αν $\delta_k(i) = \delta_{k+1}(i)$ για κάθε i, βρήκαμε την βέλτιστη στρατηγική, και το βέλτιστο όφελος βρίσκεται από την $V_{\delta_{k+1}} = C_{\delta_{k+1}} + \frac{1}{1+\rho} P_{\delta_{k+1}} V_{\delta_{k+1}}$

Διαφορετικά, θέτουμε $k \leftarrow k+1$ και επαναλαμβάνουμε το (β)

<u>Παράδειγμα.</u> Θεωρούμε το παράδειγμα της σελ. 21. Εδώ $\delta_0(1)=1$, $\delta_0(2)=2$, $\delta_0(3)=3$. Το αναμενόμενο όφελος είναι $V_{\delta_0} = \begin{pmatrix} 40,25 \\ 37,21 \\ 31,59 \end{pmatrix}$. Η δ_1 υπολογίζεται ως εξής: Για την $\delta_1(1)$ εξετάζουμε το

$$\max\left\{5 + \frac{1}{1,1}(0,7 \cdot 40,25 + 0,2 \times 37,21 + 0,1 \times 31,59),\ 4 + \frac{0,9 \times 40,25 + 0,1 \times 37,21}{1,1},\ 0 + \frac{40,25}{1,1}\right\} = \max\{40,25 \quad \underset{\uparrow}{40,31} \quad 36,6\}$$

άρα $\delta_1(1) = 2$

Για την $\delta_1(2)$ ισχύει $\delta_1(2) = 2$ $\delta_1(3) = 3$ (Άσκηση).

Το αναμενόμενο όφελος από την δ_1 βρίσκεται

Λύνοντας την εξίσωση $V_{d_1} = \begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix} + \frac{1}{1,1}\begin{pmatrix}0,9&0,1&0\\0,5&0,5&0\\1&0&0\end{pmatrix} V_{d_1}$

οπότε $V_{d_1} = \begin{pmatrix}40,86\\37,71\\32,15\end{pmatrix}$. Ποιά είναι η d_2; Για

την $d_2(1)$ εξετάζουμε το

$$\max\left\{ 5+\frac{1}{1,1}(0,7\times 40,86+0,2\times 37,71+0,1\times 32,15),\ 40,86,\ \frac{40,86}{1,1}\right\}$$

$$= \max\{40,78\ \ 40,86\ \ 37,15\}.$$ Άρα $d_2(1) = d_1(1) = 2$

Με το ίδιο σκεπτικό βρίσκουμε ότι $d_2(2) = d_1(2) = 2$ και $d_2(3) = d_1(3) = 3$. Άρα σύμφωνα με τον αλγόριθμο (3ο βήμα), η βέλτιστη στρατηγική είναι η $d_2 = d_1$ και το βέλτιστο κόστος το $V_{d_1} = \begin{pmatrix}40,86\\37,71\\32,15\end{pmatrix}$. ■

ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η προσέγγιση στρατηγικής είναι σωστή και οδηγεί στην βέλτιστη στρατηγική. Η απόδειξη είναι (σχηματικά) ως εξής: Γράφουμε V_{d_k} σαν V_k. Είναι

$$V_{k+1}(i) - V_k(i) = C(i, d_{k+1}(i)) - C(i, d_k(i)) + \frac{1}{1+\rho}\left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(d_{k+1}) V_{k+1}(j) - \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(d_k) V_k(j)\right)$$

$$= \left[C(i, d_{k+1}(i)) + \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(d_{k+1}) V_k(j)\right] - \left[C(i, d_k(i)) + \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(d_k) V_k(j)\right]$$

$$+ \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(d_{k+1})\left[V_{k+1}(j) - V_k(j)\right] \geq \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(d_{k+1})\left[V_{k+1} - V_k\right]$$

Έστω $\Delta V(j) = V_{k+1}(j) - V_k(j)$. Από τα παραπάνω είναι $\Delta V \geq \frac{1}{1+\rho} P \Delta V$. Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι $\Delta V(j) \geq 0$ για όλα τα j. Γιατί αν είναι $\Delta V(j) < 0$, έστω $\Delta V(j)$ το μικρότερο από τα $\Delta V(i)$ $(i \neq j)$. Όμως τότε $\frac{1}{1+\rho} P \cdot \Delta V$ θα είναι μεγαλύτερο, και όχι μικρότερο του $\Delta V(j)$, αφού η P είναι στοχαστική και $\frac{1}{1+\rho} < 1$ ■

Το πρόβλημα της βέλτιστης στρατηγικής με κριτήριο την βελτιστοποίηση του μη προεξοφλημένου μέσου οφέλους μπορεί να λυθεί είτε με μεθόδους όπως οι παραπάνω είτε με γραμμικό προγραμματισμό. Θα δείξουμε την δεύτερη μέθοδο.

Θεωρούμε προσωρινά ότι η επιλογή δράσεων μπορεί να είναι πιθανοτική. Αν έχουμε καταστάσεις $j = 1, 2, .., M$ και αποφάσεις (δράσεις) $d = 1, 2, .., D$, έστω

$$D_{jd} = P(\text{Επιλέγεται η δράση } d \,/\, \text{Η κατάσταση είναι } j)$$

Τότε είναι

$$y_{jd} = P(\text{Η κατάσταση είναι } j \text{ \underline{και} Επιλέγεται } d)$$

$$= D_{jd} \cdot \pi_j$$ με π_j την οριακή πιθανότητα να είναι η X_n στην j

Το αναμενόμενο όφελος είναι

$$E(C) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{d=1}^{D} C(j,d)\, D_{jd}\, \pi_j = \sum_{j,d} y_{jd} C_{jd}$$

Πρέπει βέβαια να είναι (α) $\sum_{j=1}^{M} \sum_{d=1}^{D} y_{jd} = 1$
(άθροισμα πιθανοτήτων)

(β) $\pi_j = \sum_{i=1}^{M} \pi_i \sum_{d=1}^{D} P_{ij}(d) D_{id} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{d=1}^{D} y_{id} P_{ij}(d)$

$= \sum_{d=1}^{D} y_{jd}$ και (γ) $y_{jd} \geq 0$.

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης του $E(C)$ είναι

$$\max \sum_{j=1}^{M} \sum_{d=1}^{D} C_{jd}\, y_{jd}$$

με συνθήκες

- $\sum_{j=1}^{M} \sum_{d=1}^{D} y_{jd} = 1$
- $\sum_{d=1}^{D} y_{jd} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{D} y_{id}\, P_{ij}(d) \qquad \forall\, j=1,\dots,M$
- $y_{jd} \geq 0 \qquad j=1,\dots,M \quad d=1,\dots,D$

Βρίσκοντας τα βέλτιστα y_{jd} μπορούμε να βρούμε και την βέλτιστη πολιτική ως εξής: Είναι

$$D_{jd} = \frac{y_{jd}}{\sum_{d=1}^{D} y_{jd}}$$

Μπορεί να αποδειχθεί από την θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού ότι για κάθε j, μόνο ένα $y_{jd} > 0$, και άρα η βέλτιστη απόφαση δεν είναι πιθανοθεωρητική, εφόσον $D_{jd} = 0$ εκτός από κάποιο $d^*(j)$ όπου $D_{jd^*} = 1$

Παράδειγμα Στο προηγούμενο παράδειγμα, η συνάρτηση κέρδους είναι

$$(\max)\quad 5y_{11} + 4y_{12} + 0y_{13} + 3y_{21} + 2y_{22} + (-2)y_{23} + $$
$$+ 0y_{31} + (-1)y_{32} + (-5)y_{33}$$

Η μεγιστοποίηση γίνεται με περιορισμούς

- $\sum_{i=1}^{3} \sum_{d=1}^{3} y_{id} = 1$
- $y_{id} \geq 0$ και

- $y_{11}+y_{12}+y_{13} = 0{,}7\, y_{11} + 0{,}9\, y_{12} + 1\, y_{13} + 0\, y_{21} + 0{,}5\, y_{22} + 1\, y_{23} + 0\, y_{31} + 0\, y_{32} + 1\, y_{33}$
- $y_{21}+y_{22}+y_{23} = 0{,}2\, y_{11} + 0{,}1\, y_{12} + 0\, y_{13} + 0{,}6\, y_{21} + 0{,}5\, y_{22} + 0\, y_{23} + 0\, y_{31} + 0\, y_{32} + 0\, y_{33}$
- $y_{31}+y_{32}+y_{33} = 0{,}1\, y_{11} + 0\, y_{12} + 0\, y_{13} + 0{,}4\, y_{21} + 0\, y_{22} + 0\, y_{23} + 1\, y_{31} + 1\, y_{32} + 0\, y_{33}$.

Η επίλυση του προβλήματος ΓΠ δίνει την βέλτιστη στρατηγική. ■

Μία τελευταία μέθοδος δίνεται χωρίς άμεση δικαιολόγηση:

(α) Έστω αριθμοί R, $v_1, \ldots, v_M$ (v_j για $j=1,\ldots,M$) τέτοιοι ώστε (i) για κάθε $i=1,\ldots,M$ $R + v_i = C(i) + \sum_{j=1}^{M} p_{ij} v_j$ (ii) $v_1 = 0$. Τότε το R είναι το μέσο αναμενόμενο κόστος με κόστος ανά κατάσταση i το $C(i)$

(β) Έστω αριθμοί R, v_j $j=1,\ldots,M$ με $v_1=0$ τέτοιοι ώστε για κάθε $i=1,\ldots,M$ ισχύει

$$R + v_i = \max_{d=1,\ldots,D} \left\{ C(i,d) + \sum_{j=1}^{M} p_{ij}(d)\, v_j \right\}$$

Τότε το R είναι το βέλτιστο μέσο αναμενόμενο κόστος. Η βέλτιστη στρατηγική για την κατάσταση i, $(\delta(i))$, είναι το d όπου επιτυγχάνεται η τιμή του max.

Και η εξίσωση αυτή λύνεται με την μέθοδο των προσεγγίσεων με στρατηγικές ή αξίες.

<u>Παράδειγμα</u> Η προσέγγιση πολιτικών προχωρά ως εξής: Παίρνουμε $\delta_0(1)=1$, $\delta_0(2)=2$, $\delta_0(3)=3$.

Τότε $C(\delta_0)=\begin{pmatrix}5\\2\\-5\end{pmatrix}$ $P_{\delta_0}=\begin{pmatrix}0,7 & 0,2 & 0,1\\ 0,5 & 0,5 & 0,0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ οπότε έχουμε

$$\begin{pmatrix}R\\R+v_2\\R+v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,7 & 0,2 & 0,1\\ 0,5 & 0,5 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} R=53/15\\ v_2'=-46/15\\ v_3'=-128/15\end{array}$$

Το δ_1 βρίσκεται βελτιστοποιώντας ως προς τα "v_2', v_3'":
Αν $i=1$ είναι $\delta_1(1)$ η δράση όπου επιτυγχάνεται το

$$\max\left\{5+0,2\left(-\tfrac{46}{15}\right)+0,1\left(-\tfrac{128}{15}\right),\ 4+0,1\left(-\tfrac{46}{15}\right),\ 0\right\}=\max\{3,53,\ 3,69,\ 0\}$$

άρα $\delta_1(1)=2$

Αν $i=2$ η $\delta_1(2)$ βρίσκεται από το

$$\max\left\{3+0,6\left(-\tfrac{46}{15}\right)+0,4\left(-\tfrac{128}{15}\right),\ 2+0,5\left(-\tfrac{46}{15}\right),\ -2\right\}=\{-2,25,\ 0,467,\ -2\}$$

άρα $\delta_1(2)=2$

Για $i=3$ επιβεβαιώνεται παρομοίως ότι $\delta_1(3)=3$.

Άρα $C(\delta_1)=\begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix}$ και $P_{\delta_1}=\begin{pmatrix}0,9 & 0,1 & 0\\ 0,5 & 0,5 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

και
$$\begin{pmatrix}R\\R+v_2\\R+v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,9 & 0,1 & 0\\ 0,5 & 0,5 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} R=11/3\\ v_2=-10/3\\ v_3=-26/3\end{array}$$

Για να βρούμε το $\delta_2(1)$ εξετάζουμε το

$$\max\left\{5+0,2\left(-\tfrac{10}{3}\right)+0,1\left(-\tfrac{26}{3}\right),\ 4+0,1\left(-\tfrac{10}{3}\right),\ 0\right\}=\max\{3,47,\ 3,67,\ 0\}$$

και άρα $\delta_2(1)=\delta_1(1)=2$

Με τον ίδιο τρόπο επιβεβαιώνεται ότι
$\delta_2(2)=\delta_1(2)=2$ και $\delta_2(3)=\delta_1(3)=3$.

Άρα η $\delta_1=\delta_2$ είναι η βέλτιστη πολιτική και το βέλτιστο μέσο κόστος είναι $11/3$ ■