Τα προηγούμενα αποτελέσματα για το υπόδειγμα NBD ερμηνεύονται ως εξής:

Αν η λ έχει a priori (εκ των προτέρων) κατανομή Γ με παραμέτρους r, a και γίνει μία παρατήρηση μιας τυχαίας μεταβλ. Poisson με παράμετρο λ που έχει έκβαση x, η a posteriori κατανομή της λ είναι πάλι Γ με παραμέτρους $\hat{r}, \hat{a}$ και $\hat{r} = r + x$, $\hat{a} = a + 1$. Αν γίνουν n ανεξάρτητες Poisson μετρήσεις με εκβάσεις $x_1, \dots, x_n$, η a posteriori της λ είναι Γ με παραμέτρους $\hat{r} = r + \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\hat{a} = a + n$. Άρα $E(X_2 | X_1 = x) = \hat{r}/\hat{a} = r+x/a+1$.

Ανάλογα, αν η μέτρηση είναι παρατήρηση των επιτυχιών από δοκιμές Bernoulli, με άγνωστη παράμετρο p, είναι

$$f(x \text{ από } N \text{ επιτυχίες} \mid p) = \binom{N}{x} p^{x} (1-p)^{N-x}$$

Αν το p έχει a priori κατανομή Beta

$$g(p; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{\beta-1} \qquad 0 \le p \le 1$$

προκύπτει ότι η εκ των υστέρων κατανομή $\xi(p \mid x \text{ επιτυχίες από } N)$ είναι πάλι Beta με παραμέτρους $\hat{a} = a + x$, $\hat{b} = \beta + N - x$ (βλέπε LKM App. A, σελ. 602)

Οι ροπές της Beta είναι (βλέπε LKM)

$$E(X) = \alpha/(\alpha+\beta) \qquad Var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

Αν κάνουμε N ανεξάρτητες μετρήσεις (με N μεγάλο), εκ των οποίων $x = \pi N$ επιτυχίες η εκ των υστέρων κατανομή είναι Beta με $\hat{a} = a + \pi N$ $\hat{\beta} = \beta + (1-\pi) N$

με εκ των υστέρων αναμενόμενη τιμή του p:

$$E(p \mid x \text{ από } N) = \frac{a + \pi N}{a + \pi N + \beta - \pi N + N}$$

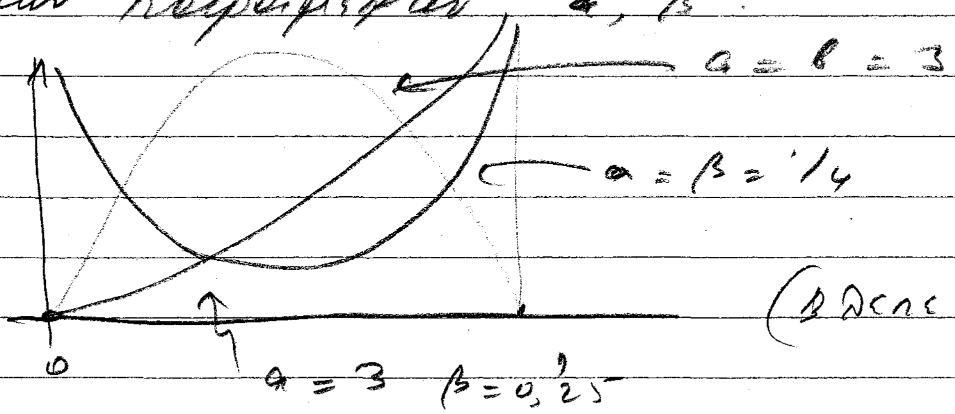
$$= \frac{\pi + a/N}{1 + (a+\beta)/N}$$

και $$Var(p) = \frac{(a + \pi N)\cdot(\beta + (1-\pi)N)}{(a+\beta+N)^2\,(a+\beta+N+1)} \quad (*)$$

Για μεγάλο N, η αναμενόμενη τιμή είναι περίπου π ενώ η διακύμανση τείνει στο μηδέν, κάτι που είναι αναμενόμενο.

Για μικρότερες τιμές του N, αν π.χ. $a = \beta = 1$ αρχικά και κάνουμε 3 μετρήσεις με δυο επιτυχίες, είναι $\hat{a} = a + 2 = 3$ $\hat{\beta} = \beta + 1 = 2$ με νέα αναμενόμενη τιμή του $p = \frac{3}{5}$ από $p = 1/2$ που ήταν αρχικά.

Η κατανομή Beta μπορεί να πάρει μια ευρεία ποικιλία μορφών για διάφορες τιμές των παραμέτρων a, β.



(Βλέπε LKM App A)

(Παρατηρείστε ότι για ακέραια $a \geq 0$, $\Gamma(a) = (a-1)!$ ενώ για a μη ακέραια πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο τύπος $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1}\,dt$)

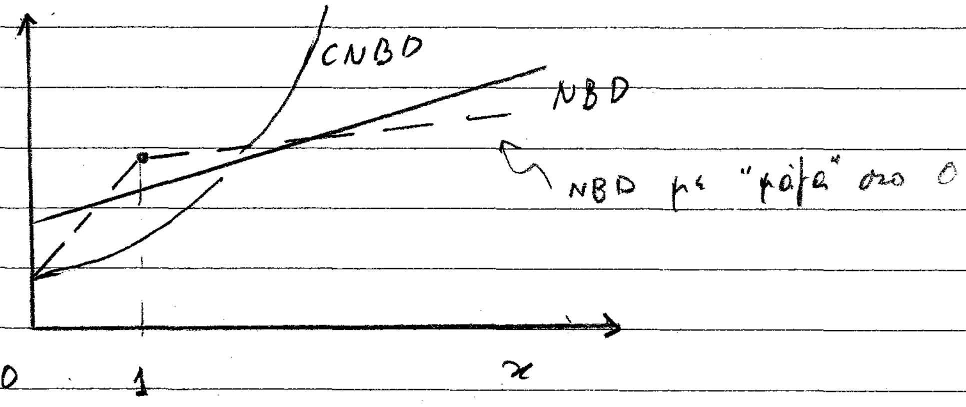
(*) Αυτό σημαίνει ότι για τον πληθυσμό N ατόμων για τον οποίο μετρήθηκε μερίδιο αγοράς π, η εκ των υστέρων κατανομή των παραμέτρων είναι $\hat{a} = a + \pi N$, $\hat{\beta} = \beta + (1-\pi)N$.

Έχουν διατυπωθεί πολλές προτάσεις βελτίωσης του υποδείγματος NBD. Δυο σημαντικές τέτοιες προτάσεις είναι

α. Ο χρόνος μεταξύ αγορών να μην έχει αρνητική εκθετική πυκνότητα γιατί έτσι έχει μεγαλύτερη πιθανότητα μια νέα αγορά σε χρόνο μηδέν (γιατί;). Αν θεωρηθεί ως πυκνότητα μία Erlang (Γ με ακέραιη παράμετρο $r>0$) με μέση τιμή r/a και μέγιστο "κοντά" στην μέση τιμή. Το υπόδειγμα που προκύπτει ονομάζεται Condensed NBD – CNBD και έχει αναλυθεί με ανάλογο τρόπο με το NBD

β. Η ετερογένεια πρέπει να διαφοροποιήσει τους καταναλωτές με $\lambda=0$ δίνοντάς τους μία "μάζα" πιθανότητας (π.χ. $1/10$) ενώ το υπόλοιπο του πληθυσμού να είναι κατανεμημένο σε $\lambda>0$ κατά μία συνεχή κατανομή $\Gamma(;a,r)$. Και το υπόδειγμα αυτό έχει αναλυθεί (σελ. 35 LKM)

Η σημασία των παραλλαγών αυτών έγκειται στο ότι δίνουν διαφορετικής φύσεως συναρτήσεις $E(X_2 \mid X_1 = x)$ που επιτρέπουν ενδεχομένως καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα. Έτσι έχουμε το διάγραμμα (σελ. 24 LKM)



Μπορείτε να εξηγήσετε τις καμπύλες; Η καμπύλη της "NBD με μάζα στο 0" είναι μάλλον πρόχειρη.

Υποδείγματα Επιλογής Είδους (Μάρκας)

Τα υποδείγματα αυτά εξετάζουν την επιλογή μάρκας ανεξάρτητα από τον χρονισμό των αγορών. Τα υποδείγματα διαφοροποιούνται ανάλογα με το αν οι προηγούμενες επιλογές επηρεάζουν τις επόμενες, αν λαμβάνονται υπόψη επιδράσεις ελεγχόμενων μεταβλητών (τιμή, διαφήμιση κλ.π)
Η δειγματοληψία περιλαμβάνει συνήθως ερωτήσεις σε ένα δείγμα (επιλέγουμε αντιπροσωπευτικό) καταναλωτών σχετικά με 2 ή περισσότερες αγορές τους ενός αγαθού (π.χ. οδοντόκρεμα). Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με μορφή πίνακα (σελ. 41 LKM)

Επιλογή την 2η Αγορά

Επιλογή Μάρκας την 1η Αγορά	A	B	C	Αθρ
A	137	47	19	203
B	41	179	12	232
C	22	10	46	78
Αθρ.	200	236	77	513

Ο πίνακας αυτός μπορεί να μετατραπεί διαιρώντας όλα τα στοιχεία δια του συνόλου του δείγματος (513) παίρνουμε τον πίνακα των από κοινού πιθανοτήτων καθώς και των υπό συνθήκη πιθανοτήτων, διαιρώντας τα στοιχεία των γραμμών δια του αθροίσματος των στοιχείων της γραμμής (203 την 1η, ...)
Έτσι προκύπτει ο πίνακας

	A	B	C	Αθρ.
A	$137/203 = 0,674$	0,232	0,094	1,00
B	$41/232 = 0,177$	0,772	0,051	1,00
C	$22/78 = 0,283$	0,125	0,592	1,00

Τα απλούστερα υποδείγματα είναι αυτά της μηδενικής μνήμης, Zero Order. Σε αυτά γίνεται η παραδοχή ότι η πιθ/τα αγοράς μιας μάρκας είναι σταθερή ανά καταναλωτή (έστω p_i για τον καταναλωτή i) αλλά τα p είναι ετερογενώς κατανεμημένα π.χ. κατά Beta με παραμέτρους που πρέπει να εκτιμηθούν.

Πιο ενδιαφέρον υπόδειγμα Zero Order είναι το απλό υπόδειγμα του Ehrenberg (1972) κατά το οποίο ισχύει

$$Pr(\text{Πρώτη αγορά μάρκας } i \text{ ΚΑΙ δεύτερη αγορά μάρκας } j)$$

$$= p(i,j) = k\, m_i m_j \qquad \underline{i \neq j}$$

όπου m_i, m_j τα μερίδια αγοράς που έχουν οι μάρκες στη δεύτερη περίοδο.

Εφόσον $\sum_{j=1}^{n} p(i,j) = m_i$ (γιατί;)

ισχύει $p(i,i) + k m_i \sum_{j \neq i} m_j =$

$$p(i,i) + k m_i (1 - m_i) = m_i$$

και άρα $p(i,i) = m_i - k m_i (1 - m_i)$, εφόσον δεχτούμε ότι $p(i) = m_i$.

Για τις δεσμευμένες πιθ/τες ισχύει:

$$p\left(\text{δεύτερη αγορά } j \,\middle|\, \text{πρώτη αγορά } i\right) = \frac{p(i,j)}{p(i)} = \frac{k\, m_i m_j}{m_i} \qquad i \neq j$$

$$= k\, m_j$$

ενώ αν $i = j$, $p(i|i) = 1 - k(1 - m_i)$.

Αυτό δείχνει ότι το υπόδειγμα είναι Zero Order.

Κατά πόσο επιβεβαιώνεται αυτό το υπόδειγμα απο τα στοιχεία είναι συμμετρικό (για το συγκεκριμένο παράδειγμα στοιχείων)

Με τα στοιχεία του πίνακα οι παράμετροι υπολογίζονται ως εξής: $m_A = 0,390 \ (=\frac{200}{513})$ $m_B = 0,460 \ (=\frac{236}{513})$ $m_C = 0,150$. Το k υπολογίζεται (για να επιτύχουμε ακρίβεια) αθροίζοντας τις σχέσεις $p(i,i) = m_i - k\, m_i (1-m_i)$

οπότε $\sum_i p(i,i) = 1 - k + k \sum m_i^2$

ή $$k = \frac{1-\sum_{i=1}^{3} p(i,i)}{1-\sum_{i=1}^{3} m_i^2}$$

Τα $p(i,i)$ είναι $p(A,A)=0,267 \ (\frac{137}{513})$ $p(B,B)=0,349$ $p(C,C)=0,152$ οπότε η εκτίμηση του k είναι

$$k = \frac{1-(0,267+0,349+0,152)}{1-0,39^2-0,46^2-0,15^2} = 0,479$$

Με τις εκτιμήσεις αυτές προκύπτει ο πίνακας σύγκρισης

	A	B	C
A	0,267 / 0,275	0,092 / 0,086	0,037 / 0,027
B	0,080 / 0,086	0,349 / 0,341	0,023 / 0,033
C	0,043 / 0,028	0,019 / 0,033	0,090 / 0,089

Παρατήρηση / Εκτίμηση

που δείχνει ικανοποιητική συμπεριφορά (εκτός των στοιχείων $p(C,A)$ $p(C,B)$, $p(A,C)$)

Στον πίνακα των υπό συνθήκη πιθανοτήτων βλέπουμε, το υπόδειγμα έχει μικρότερη επιτυχία ($P(A|B)=0,177 = P(A|C)=0,283$!!)

Όταν τα Zero Order υποδείγματα αποτυγχάνουν (δηλαδή οι παραπάνω εκτιμήσεις των $p(i,j)$ διαφέρουν πολύ από τις παρατηρήσεις) μπορεί

κανείς να θεωρήσει ότι η επιλογή μιας μάρκας είναι μια κατάσταση σε αλυσίδα Markof όπου ο πίνακας μετάβασης πρέπει να ικανοποιεί τις παρατηρήσεις στο δείγμα. Αν θεωρήσουμε π.χ. ότι ο πίνακας μετάβασης είναι αμετάβλητος χρονικά και είναι αυτός που εκτιμήθηκε π.χ. στη σελ. 11 μπορούμε να εκτιμήσουμε διάφορα μεγέθη όπως π.χ. το τελικό μερίδιο αγοράς, επόμενο μερίδιο αγοράς, πόσο σημαντικό είναι να επηρεασθεί κάποια από τις πιθανότητες μετάβασης (π.χ. μέσω διαφήμισης..). Βέβαια θα πρέπει να επιβεβαιωθεί στατιστικά η ιδιότης Markof - δηλαδή ότι $P(X_t = j \mid X_{t-1} = i) =$
$= P(X_t = j \mid X_{t-1} = i, X_{t-2} = \alpha, X_{t-3} = \beta \ldots) \ \forall \alpha, \beta, \ldots$
δηλαδή η μετάβαση εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα και όχι τις προηγούμενες καταστάσεις.

Στην εργασία των Morrison κ.α. (σελ. 47 LKM) γίνεται η παραδοχή ότι οι πελάτες* του χρηματιστηριακού οίκου ML είναι "prime" ή όχι, και ότι ο πίνακας μετάβασης είναι

$$
\begin{array}{ll}
 & \quad\quad t+1 \\
 & \text{Prime} \quad \text{Not Prime} \\
\text{Περίοδος } t: \begin{array}{l} \text{Prime} \\ \text{Not Prime} \end{array} & \begin{bmatrix} p & 1-k \\ kp & 1-kp \end{bmatrix}
\end{array}
$$

όπου το p είναι κατανεμημένο στον πληθυσμό με κάποια Beta (οι παράμετροι της α, β είναι προς εκτίμηση). Το k θεωρείται σταθερό για όλους τους πελάτες. Υψηλές τιμές του αντιστοιχούν σε αυξημένη "εξακολουθητικότητα" της ιδιότητας του "prime" πελάτη, ενώ περιμένουμε ότι $k < 1$ ($k=1$ για Prime πελάτες). Στην εργασία

* Prime: "καλοί" πελάτες, που κάνουν μεγάλο τζίρο.

εκτιμώνται οι παράμετροι ως $\alpha = 0{,}01$ $\beta = 1{,}18$ $k = 0{,}41$. Αξιοσημείωτο είναι ότι το k εκφράζεται από την σχέση:

$$k = \frac{P(X_t = Prime \mid X_{t-1} = Not\ Prime,\ X_{t-2} = Prime)}{P(X_t = Prime \mid X_{t-1} = Prime,\ X_{t-2} = Not\ Prime)}$$

που αποδεικνύεται αν λάβουμε υπόψη την εξαρτώμενη στην παράμετρο p (που είναι κατανεμημένη κατά Beta). Φυσικά, αν ο πληθυσμός ήταν ομογενής θα ίσχυε ότι

$$P(X_t = P \mid X_{t-1} = NP,\ X_{t-2} = P) = P(X_t = P \mid X_{t-1} = NP) = kp$$

$$P(X_t = P \mid X_{t-1} = P,\ X_{t-2} = NP) = P(X_t = P \mid X_{t-1} = P) = p$$

και η παραπάνω σχέση θα ίσχυε. Όμως η ανομοιογένεια στο p συνεπάγεται ότι η ανέλιξη της κατάστασης στο συνολικό πληθυσμό <u>ΔΕΝ</u> ικανοποιεί την Μαρκοβιανή ιδιότητα.

Τα υποδείγματα <u>Μάθησης</u> (Learning Models) διαφέρουν από τα Μαρκοβιανά καθώς η πιθ/τα μετάβασης εξαρτάται από την προηγούμενη πιθ/τα και την κατάσταση (και όχι μόνο την κατάσταση). Ορίζονται οι τελεστές <u>Αποδοχής</u> και <u>Απόρριψης</u> ως εξής: Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για μια συγκεκριμένη μάρκα και p_t η πιθ/τα να αγοράσει στην t-οστή ευκαιρία. Τότε η p_t εξελίσσεται σύμφωνα με τις σχέσεις

$$p_{t+1} = \begin{cases} a_1 + \lambda_1 p_t & \text{αν η μάρκα αγοράστηκε τον χρόνο } t \\ a_2 + \lambda_2 p_t & \text{αν αγοράστηκε άλλη μάρκα} \end{cases}$$

Ερώτηση: Αν έχουμε 2 μάρκες και

$q_t = 1-p_t$ η πιθ/τα να αγορασθεί η άλλη μάρκα, αποδείξτε ότι

$$q_{t+1} = \begin{cases} \beta_1 + \phi_1 q_t & \text{αν αγορασθηκε η άλλη μάρκα} \\ \beta_2 + \phi_2 q_t & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και εκτιμείστε τα β, λ.

<u>Άσκηση</u> (α) Για δεδομένα α, λ κατασκευάστε ένα φύλλο λογιστικού προσομοίωσης και εκτιμείστε εμπειρικά το μερίδιο αγοράς σε περίπτωση που υπάρχει σύγκλιση για μεγάλο αριθμό βημάτων
(β) Κάντε μια θεωρητική εκτίμηση του μεριδίου αγοράς και επιβεβαιώστε το με το φύλλο λογιστικού του (α).

<u>Τα Ολοκληρωμένα Στοχαστικά Υποδείγματα</u> συνδυάζουν υποδείγματα χρονισμού αγορών (π.χ. NBD) με υποδείγματα επιλογής μάρκας. Π.χ. Υποθέτουμε Erlang κατανομή των διαστημάτων μεταξύ αγορών με ετερογένεια του λ κατά Gamma, συνδυασμένη με zero order Bernoulli επιλογή μάρκας με ετερογένεια πολυδιάστατη Beta. Η βιβλιογραφία αναφέρει επιτυχία στην προσαρμογή των δειγματοληπτικών στοιχείων με τις διάφορες παραμέτρους των κατανομών της ετερογένειας.
(σελ. 53 LKM)

Ενδιαφέρον έχουν υποδείγματα που εκτιμούν την επίδραση των υπό έλεγχο μεταβλητών όπως η τιμή και η διαφήμιση. Ένα ενδιαφέρον

υπόδειγμα (Simon + Horsky – LKM p. 54) γιά δύο μάρκες A, B έχει ως εξής:
Έστω πίνακας μετάβασης με μεταβλητές πιθανότητες a_t και αμετάβλητη β ως

$$\begin{array}{c|cc} & A_t & B_t \\ \hline A_{t-1} & a_t+\beta & 1-a_t-\beta \\ B_{t-1} & a_t & 1-a_t \end{array}$$

(Θεωρείτε εύλογο το ότι το β είναι σταθερό;) Προφανώς η εταιρεία A επιδιώκει την αύξηση του a_t.

Οι διαφημιστικές δαπάνες $X_t, X_{t-1}, \dots$ και η σχετική τιμή R_t (που είναι εξωγενώς μεταβλητές) επηρεάζουν το a_t ως εξής:

$$a_t = a_0 + \gamma(X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \dots) + \delta R_t + \varepsilon_t$$

όπου $\gamma, \lambda, \delta, a_0$ παράμετροι προς εκτίμηση
ε_t : σφάλμα με ανεξαρτησία για t

Οι μετρήσιμες ποσότητες είναι τα μερίδια αγοράς και έστω m_t το μερίδιο του A τον χρόνο t.
Είναι

$$m_{t+1} = m_t(a_t+\beta) + (1-m_t)a_t = a_t + \beta m_t$$

εισάγοντας το a_t στην δυναμική του m_t έχουμε:

$$m_{t+1} = \beta m_t + a_0 + \gamma(X_t + \lambda X_{t-1} + \dots) + \delta R_t + \varepsilon_t$$

Για να απαλλαγούμε από τους όρους $\lambda^k X_{t-k}$ υπολογίζουμε το $m_{t+1} - \lambda m_t$ οπότε έχουμε

$$m_{t+1} - \lambda m_t = \beta m_t - \lambda\beta m_{t-1} + a_0(1-\lambda) + \gamma X_t + \delta R_t - \lambda\delta R_{t-1} + (\varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1})$$

Η σχέση αυτή μπορεί να εκτιμηθεί από δεδομένα γιά τα π, R, X. Βέβαια η συσχέτιση μεταξύ των σφαλμάτων $\varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}$, οδηγεί σε δυσκολίες εκτίμησης. Μετά από δύσκολες εκτιμήσεις, προκύπτει ότι τα γ, δ, λ είναι μεν θετικά, αλλά η τιμή του λ είναι μικρή. Αυτό σημαίνει ότι η επίδραση της διαφήμισης είναι παροδική τουλάχιστον για το προϊόν που εξέτασαν οι μελετητές.

Εξατομικευμένα Υποδείγματα Επιλογής
(Process Oriented Models)

Για σημαντικά αγαθά είναι απαραίτητο νά εξηγηθεί καλύτερα η προτίμηση του κάθε καταναλωτή σαν συνάρτηση των χαρακτηριστικών των προϊόντων. Με βάση τα χαρακτηριστικά των προϊόντων εκτιμώνται όπως θα δούμε στα παραδείγματα "Αντικειμενικές" ωφελιμότητες γιά κάθε προϊόν / κατηγορία προϊόντων.

Έστω ο καταναλωτής i εξετάζει την αγορά ενός αγαθού κάποιας κατηγορίας (π.χ. κάποιος μεσαίας κατηγορίας αυτοκίνητο), και θεωρεί ότι η ωφελιμότητα από την αγορά είναι V_{Bi}. Αν δεν αγορασθεί (και αγορασθεί κάποιο από άλλη κατηγορία, π.χ. ψυγείο) η ωφελιμότητα είναι έστω V_{Ni}. Η ωφελιμότητα αυτή προσδιορίζεται με βάση τα χαρακτηριστικά των αγαθών, με τρόπους που θα δούμε αργότερα. Η τελική απόφαση της αγοράς ή όχι εξαρτάται και από τυχαία γεγονότα που επηρεάζουν την κρίση του καταναλωτή και που παριστάνονται με τυχαίες μεταβλητές σφάλματος ε_{iB} και ε_{iN} αντίστοιχα, ανεξάρτητα μεταξύ των

Έτσι η τελική απόφαση λαμβάνεται εξετάζοντας τις "τελικές" ωφελιμότητες U_{B_i} και U_{N_i} όπου $U_{B_i} = V_{B_i} + \tilde{\varepsilon}_{B_i}$, $U_{N_i} = V_{N_i} + \tilde{\varepsilon}_{N_i}$. Έτσι το αγαθό θα αγορασθεί με πιθανότητα

$$P(\text{Αγορά}) = P(U_{B_i} > U_{N_i})$$
$$= P(V_{B_i} - V_{N_i} > \tilde{\varepsilon}_{N_i} - \tilde{\varepsilon}_{B_i})$$

Οι εμπειρικές μετρήσεις γίνονται παραμετρικά (βάσει ερωτηματολογίων σε δείγμα καταναλωτών) (α) το πώς αποτιμώνται τα χαρακτηριστικά των διαφόρων αγαθών (β) τις αγοραστικές συνήθειες. Γίνονται παραδοχές για την μορφή της συνάρτησης ωφελιμότητας σε σχέση με τα χαρακτηριστικά και φυσικά για τα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά των σφαλμάτων $\tilde{\varepsilon}_{B_i}, \tilde{\varepsilon}_{N_i}$.

Οι βασικές παραδοχές για τα σφάλματα είναι

(α) Η διαφορά $\tilde{\varepsilon}_{N_i} - \tilde{\varepsilon}_{B_i}$ είναι Κανονική με μηδενικό μέσο ; $\tilde{\varepsilon}_{B_i} \sim \tilde{\varepsilon}_{N_i} \sim N(0, \sigma^2)$

Το υπόδειγμα αυτό ονομάζεται <u>Probit</u>

(β) Η διαφορά $\tilde{\varepsilon}_i = \tilde{\varepsilon}_{N_i} - \tilde{\varepsilon}_{B_i}$ έχει κατανομή

$F(x) = Pr(\tilde{\varepsilon}_i < x) = (1 + \exp(-\mu x))^{-1}$

(Προφανώς $F(\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$)

Το υπόδειγμα ονομάζεται <u>Logit</u> και έχει ευρεία χρησιμότητα λόγω της παρακάτω σχέσης: Ένα προϊόν αγοράζεται με πιθ/τα

$$P(V_{B_i} - V_{N_i} > \tilde{\varepsilon}_{N_i} - \tilde{\varepsilon}_{B_i}) = F(V_{B_i} - V_{N_i})$$
$$= \frac{1}{1 + \exp(-\mu V_{B_i}) / \exp(-\mu V_{N_i})}$$
$$= \frac{\exp(\mu V_{B_i})}{\exp(\mu V_{N_i}) + \exp(\mu V_B)}$$

που συνδέει άμεσα την πιθ/τα αγοράς με τις ωφελιμότητες

Εφαρμογή

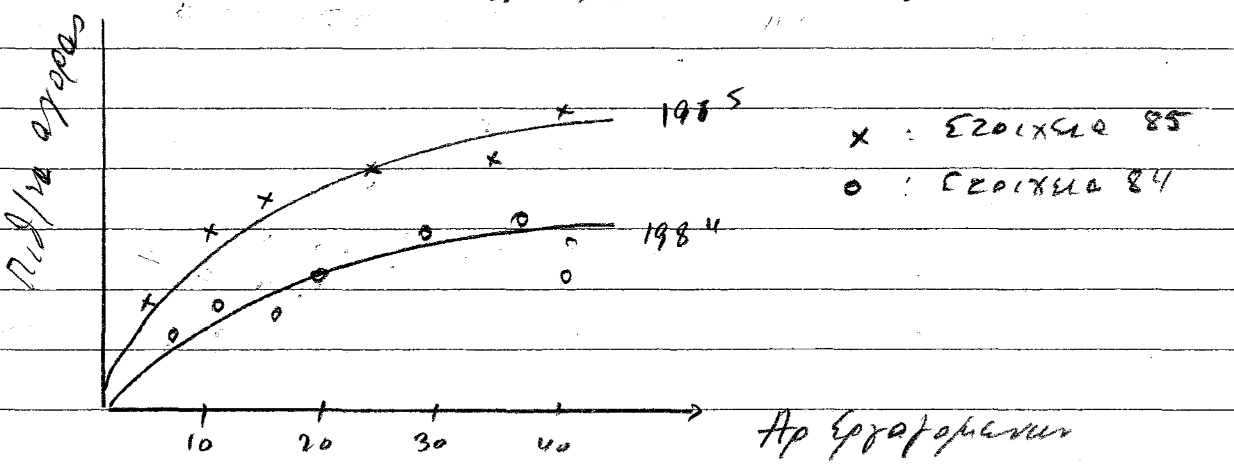
Στην ενδιαφέρουσα εργασία του Nooteboom μελετάται η εισαγωγή της πληροφορικής σε εταιρείες στην Ολλανδία το 1979. Γίνονται οι παραδοχές ότι

$V_{N_i} = 0$ ενώ $V_{B_i} = \log a_t + \beta \log S_i$ όπου

το S_i είναι το μέγεθος της επιχείρησης, μετρημένο από το εργατικό δυναμικό. Το β είναι παράμετρος οικονομιών κλίμακος που δεν εξαρτάται από την επιχείρηση ενώ το a_t είναι παράμετρος "κινδύνου" της νέας τεχνολογίας.

Συλλέχτηκαν στην εργασία στοιχεία αναφορικά με το αριθμό των εταιρειών που εισήγαγαν την πληροφορική ανά έτος και έγινε προσαρμογή των στοιχείων κάθε έτους ώστε να προσδιορίσουν το μ, β και το a_t.

Τα στοιχεία επιβεβαίωσαν τις παραδοχές (δηλ. σταθερά μ, β διαχρονικά) ενώ τα a_t μειώνονται διαχρονικά. Βλέπε το διάγραμμα της σελ. 63 *



Αντίστοιχο υπόδειγμα εφαρμόζεται για να αναλυθούν οι προτιμήσεις των καταναλωτών ανάμεσα σε μάρκες ενός προϊόντος. Έστω ότι υπάρχουν j μάρκες και ο καταναλωτής i έχει εκτίμηση ωφελιμότητας V_{ij}, που όμως την στιγμή αγοράς μεταβάλλεται σε $U_{ij} = V_{ij} + \tilde{\varepsilon}_{ij}$. Θα επιλέξει η μάρκα k με πιθ/τα

$$Pr(U_{ik} > U_{ij}, j \neq k) =$$

(*) και το υπολογιστικό παράδειγμα / φύλλο λογισμικού στο τέλος των σημειώσεων.

$Pr(V_{i1} - V_{ij} \geq \tilde{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon_{i1} ;\ \forall j)$

Αν δεχθούμε ότι τα $\tilde{\varepsilon}_{ij_1} - \tilde{\varepsilon}_{ij_2}$ έχουν κατανομή logit και τα σφάλματα είναι ανεξάρτητα μπορεί να αποδειχθεί ότι η πιθ/τα αγοράς της πρώτης π.χ. μάρκας είναι

$$P_{i1} = \frac{\exp(\mu V_{i1})}{\sum_{j=1}^{J} \exp(\mu V_{ij})}$$

όπου μ η παράμετρος της logit.

Αν η ωφελιμότητα μπορεί να εκφρασθεί σαν σταθμισμένο άθροισμα $V_{ij} = \sum_k w_k b_{ijk}$

με b_{ijk} την βαθμολογία του j προϊόντος ως προς το κριτήριο k, w_k την στάθμιση τους μπορούμε να γράψουμε τον παραπάνω τύπο ως:

$$P_{i1} = \frac{\exp(\sum_k w_k \beta_{i1k})}{\sum_j \exp(\sum_k w_k \beta_{ijk})}$$

όπου οι συντελεστές έχουν ενσωματώσει το μ, και είναι π.χ. $w_k = \mu w_k'$.

Ένα ενδιαφέρον παράδειγμα δίνεται στην σελ. 101 του LKM. Έστω ότι δίνεται ερωτηματολόγιο σε Panel σχετικά με υπάρχοντα Κέντρα Καταστημάτων. Καταγράφονται για τα μέλη του Panel

(α) Η βαθμολόγηση των Κέντρων ως προς κριτήρια Variety, Quality, Parking, Value for Money (β) Προτίμηση.

Με βάση αυτά τα στοιχεία προσδιορίζεται η σημασία w_k των κριτηρίων — και κατά πόσο το υπόδειγμα εξηγεί ικανοποιητικά τις παρατηρήσεις. Έτσι προκύπτει ο πίνακας 2.23 στο LKM, που περιλαμβάνει 3 υφιστάμενα Κέντρα και ένα νέο

Μέση Βαθμολογία στο Panel

Store	Variety	Quality	Parking	Value/Money
1	0,7	0,5	0,7	0,7
2	0,3	0,4	0,2	0,8
3	0,6	0,8	0,7	0,4
4 (New)	0,6	0,4	0,8	0,5
Σημασία w	2	1,7	1,3	2,2

Το σημαντικότερο κριτήριο εδώ είναι το Value for Money. Τα μερίδια αγοράς με βάση το υπόδειγμα υπολογίζονται στον πίνακα 2.24:

Store	$\Sigma w_k \beta_{jk}$	Κατανομή στα 1,2,3 %	Κατανομή σε 1-4 %
1	4,70	51,2	40,7
2	3,30	12,6	10,0
3	4,35	36,2	28,7
4	4,02	—	20,6

Η κατανομή που προβλέπει το υπόδειγμα στα υπάρχοντα καταστήματα πρέπει να συμβαδίζει με τα παρατηρούμενα. Σημασία έχει η κατανομή στα 1-4 όπου γίνεται εκτίμηση της ελκυστικότητας του 4ου κέντρου.