Άσκηση 1. 8,7

(α) Έστω x_A, x_B, x_C ο χρόνος που αφιερώνει ο πωλητής στις εταιρείες A, B, C αντίστοιχα. Τότε έχουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{array}{ll} \max & S_A + S_B + S_C \\ \text{υ.π.} & x_A + x_B + x_C = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \max\ r_a \log(x_A+1) + r_B \log(x_B+2) + r_C \log(x_C+2) \\ x_A + x_B + x_C = 5 \end{array}$$

όπου $r_A = 20 \cdot 10^3$, $r_B = 40 \cdot 10^3$, $r_C = 50 \cdot 10^3$

Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος, σχηματίζουμε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση:

$$L(x_A, x_B, x_C, \lambda) = r_a \log(x_A+1) + r_B \log(x_B+2) + r_C \log(x_C+2) - \lambda(x_A + x_B + x_C - 5)$$

Αναγκαία συνθήκη για να είναι μια λύση βέλτιστη είναι

$$\frac{\partial L}{\partial x_A} = \frac{\partial L}{\partial x_B} = \frac{\partial L}{\partial x_C} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x_A} = \dfrac{r_A}{(x_A+1)} - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_B} = \dfrac{r_B}{x_B+2} - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_C} = \dfrac{r_C}{x_C+2} - \lambda = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{r_A}{x_A+1} = \dfrac{r_B}{x_B+2} = \dfrac{r_C}{x_C+2} = \lambda \\ x_A + x_B + x_C = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x_A = \frac{r_A}{\lambda} - 1, \quad x_B = \frac{r_B}{\lambda} - 2, \quad x_C = \frac{r_C}{\lambda} - 2$$

$$x_A + x_B + x_C = \frac{r_A + r_B + r_C}{\lambda} - 5 = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{r_A + r_B + r_C}{10}$$

$$\Rightarrow \quad x_A = 10\frac{r_A}{r_A + r_B + r_C} - 1, \quad x_B = 10\frac{r_B}{r_A + r_B + r_C} - 2, \quad x_C = 10\frac{r_C}{r_A + r_B + r_C} - 2$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των r_A, r_B, r_C βρίσκουμε

$$\frac{r_A}{r_A + r_B + r_C} = \frac{2}{11}, \quad \frac{r_B}{r_A + r_B + r_C} = \frac{4}{11}, \quad \frac{r_C}{r_A + r_B + r_C} = \frac{5}{11}$$

$$\Rightarrow \quad x_A = \frac{9}{11} = 0{,}82, \quad x_B = \frac{18}{11} = 1{,}64, \quad x_C = \frac{28}{11} = 2.55$$ και επομένως

$$S_A = 11957, \quad S_B = 51639, \quad S_C = 75706$$

και συνολικά $S_A + S_B + S_C = 139303$.

(b) Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία και αλλάζοντας το δεξιό μέρος του περιορισμού από 5 σε 4 ή 6, παίρνουμε αντίστοιχα τα εξής αποτελέσματα:

	4 μέρη	5 μέρη	6 μέρη
x_A	0.64	0,82	1
x_B	1.27	1,64	2
x_C	2,09	2,55	3
S_A	9850	11957	13863
S_B	47425	51639	55452
S_C	70438	75706	80472
$S_A + S_B + S_C$	127712	139303	149787

(c) Εξετάζουμε τους 3 δυνατούς συνδυασμούς (3)

Συνδυασμός	Ημέρες Plains	Ημέρες Grand Rapids	Πωλήσεις Plains	Πωλήσεις Grand Rapids	Σύνολο
1	4	6	127712	149000	276712
2	5	5	139303	140000	279303
3	6	4	149787.	131000	280787 *

Επομένως τον συμφέρει να πάει 6 μέρες στο Plains κ' 4 στο GrandRapids.

(d) Αφήνεται ως άσκηση (υποθέτουμε, ελλείψει άλλης πληροφορίας, ότι στο Grand Rapids θα πάει και πάλι 4, 5 ή 6 μέρες)

(e) Αφήνεται ως άσκηση

(δείτε αρχείο ex8.7.xls)

ΑΣΚΗΣΗ 2 (κεφ 10)

(a) Να βρεθεί ο βέλτιστος αριθμός πωλητών στο μοντέλο Lucas, Weinberg and Clowes, αν

$$f(P, W) = a P^{1/3} W^{1/3}$$

(b) Τι συμβαίνει στη λύση του παραπάνω μοντέλου όταν

$$f(P,W) = a P^{b_1} W^{b_2} \quad \text{με} \quad b_1 + b_2 \to 1 \ ;$$

Απάντηση

(a) $b_1 = b_2 = 1/3 \Rightarrow b_1 + b_2 = 2/3$, $X^* = \left[\dfrac{ma(PW)^{1/3}(1/3)}{C}\right]^{3/2}$

$$= \left(\frac{ma}{3C}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{PW}$$

(b) Όταν $b_1 + b_2 \approx 1$, τότε $X \approx 0$. Αυτό συμβαίνει γιατί τότε η αντικειμενική συνάρτηση είναι

$$Z = mX f\left(\frac{P}{X}, \frac{W}{X}\right) - CX = mX a \frac{P^{b_1} W^{b_2}}{X^{b_1 + b_2}} - CX$$

και για $b_1 + b_2 \approx 1$ έχουμε $Z \approx m a P^{b_1} W^{b_2} - CX$

δηλαδή τα έσοδα γίνονται ανεξάρτητα από τον αριθμό των πωλητών.

Ασκηση 3 (10.1)

(a) Εστω $X(t)$ το μέγεθος του πληθυσμού τη χρονική στιγμή t

Τοτε εχουμε
$$\frac{dX(t)}{dt} = \alpha X(t) \qquad (0<\alpha<1)$$
$$X(0) = N$$

(b) Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι

$$X(t) = Ne^{\alpha t}, \quad t \geq 0$$

(c) Τώρα η διαφορική εξίσωση για το $X(t)$ γίνεται:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \alpha X(t) - b\,\frac{X(t)(X(t)-1)}{2} = X(t)\left[\alpha + \frac{b}{2} - \frac{b}{2}X(t)\right]$$

ή ισοδύναμα
$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t)\left[\gamma - \delta X(t)\right], \quad \text{όπου } \gamma = \alpha + \frac{b}{2}, \ \delta = b/2$$

(d) Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής δίνεται από τη γενική λύση της ομογενούς $\frac{dX}{dt} = 0$ δηλαδή $X(t) = C$, σύν μια λύση της μη ομογενούς. Για να βρούμε την τελευταία, γράφουμε

$$\frac{dX}{X(\gamma - \delta X)} = dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x(\gamma-\delta x)} = \int dt = t.$$

Επειδή $\dfrac{1}{x(\gamma-\delta x)} = \dfrac{1/\gamma}{x} + \dfrac{\delta/\gamma}{\gamma-\delta x}$,

$$\int \frac{dx}{x(\gamma-\delta x)} = \frac{1}{\gamma}\int\frac{dx}{x} + \frac{\delta}{\gamma}\int\frac{dx}{\gamma-\delta x} = \frac{1}{\gamma}\log x - \frac{1}{\gamma}\log(\gamma - \delta x)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \log \frac{x}{\gamma - \delta x} \, .$$

Επομένως

$$\frac{1}{\gamma} \log \frac{x}{\gamma - \delta x} = t \Rightarrow \frac{x}{\gamma - \delta x} = e^{\gamma t} \Rightarrow x = \frac{\gamma e^{\gamma t}}{1 + \delta e^{\gamma t}}$$

Η γενική λύση είναι επομένως $x(t) = C + \dfrac{\gamma e^{\gamma t}}{1 + \delta e^{\gamma t}}$,

και από την αρχική συνθήκη $x(0) = N$ βρίσκουμε $C + \gamma = N \Rightarrow C = N - \gamma$

Τελικά

$$\boxed{x(t) = N - \gamma + \frac{\gamma e^{\gamma t}}{1 + \delta e^{\gamma t}}}$$

(e) Αφήνεται για άσκηση

Άσκηση 4 (10.3)

Έστω $S(t)$ οι πωλήσεις την ημέρα t, $t=0,1,2,\ldots$

Τότε $S(t) = 100+4t$

Έστω $R(N)$ οι συνολικές πωλήσεις κατά την περίοδο $\{0,1,\ldots,N\}$

δηλαδή $R(N) = \sum_{t=0}^{N}(100+4t) = 100\cdot(N+1) + 4\sum_{t=0}^{N} t =$

$$= 100(N+1) + 4\,\frac{N(N+1)}{2} = 100N + 2N^2 + 2N + 100 = 2N^2 + 102N + 100$$

Η ημέρα που θα πωληθεί το 10,000-οστό κομμάτι είναι η ελάχιστη τιμή του N για την οποία ισχύει $R(N) \geq 10{,}000$
δηλαδή $R(N) - 10000 \geq 0$

Λύνουμε την εξίσωση $R(N) - 10000 = 0 \Rightarrow 2N^2 + 102N - 9900 = 0$

Η μοναδική θετική λύση είναι η $N = 49.33$

Επομένως $R(49) < 0$ και $R(50) > 0$ άρα η 10000-οστή μονάδα θα πουληθεί την 50-οστή ημέρα

Άσκηση 5

Για το μοντέλο του Bass με $p=0.1$, $r=0.4$, $\bar{Q}=10000$

να βρεθούν οι πωλήσεις $Q(t)$ για $t=1,..,20$ και
να γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση

Απάντηση

αρχείο bass.xls

Δείτε πώς αλλάζουν τα αποτελέσματα
όταν αλλάζουν οι τιμές των παραμέτρων