

Στατιστική για Οικονομολόγους -- 8^ο Σύνολο Ασκήσεων
εβδομάδα 15-04-2019

ΔΕΟΣ, Β' εξάμηνο – καθ Γιάννης Μπίλιας (bilias@aueb.gr)

Άσκηση 1

Έστω τυχαίο δείγμα μεγέθους $n=64$ από πληθυσμό που κατανέμεται σύμφωνα με την κανονική κατανομή με μέση τιμή 20 και τυπική απόκλιση 16. Σχετικά με το δειγματικό μέσο, να βρεθούν οι πιθανότητες: α) $\bar{X}$ να έχει τιμή μικρότερη από 16, β) $\bar{X}$ να έχει τιμή μεγαλύτερη από 23, γ) $\bar{X}$ να έχει τιμή μεγαλύτερη από 25, δ) $\bar{X}$ έχει τιμή μεταξύ 16 και 22, ε) $\bar{X}$ να έχει τιμή μικρότερη από 14.

Άσκηση 2

Ένας κατασκευαστής μπαταριών αυτοκινήτων ισχυρίζεται ότι η κατανομή της διάρκειας ζωής ενός συγκεκριμένου τύπου μπαταριών του είναι κανονική με μέσο όρο ζωής 54 μήνες και τυπική απόκλιση 6 μήνες. Έστω ότι μια ένωση καταναλωτών θέλει να ελέγξει την αλήθεια του ισχυρισμού του κατασκευαστή. Προς τούτο, αγοράζει ένα δείγμα 50 μπαταριών και το υποβάλλει σε έλεγχο.

A) Με την υπόθεση ότι ο ισχυρισμός του κατασκευαστή είναι σωστός, περιγράψετε την κατανομή δειγματοληψίας της μέσης διάρκειας ζωής σε δείγμα 50 μπαταριών.

B) Με την υπόθεση ότι ο ισχυρισμός του κατασκευαστή είναι σωστός, ποια είναι η πιθανότητα το δείγμα που εξέτασε η ένωση καταναλωτών να έχει μέση διάρκεια ζωής λιγότερο από 52 μήνες;

Γ) Με βάση την απάντηση στο ερώτημα B, σε τι συμπέρασμα μπορεί να οδηγηθεί η ένωση καταναλωτών για τον ισχυρισμό του κατασκευαστή;

Άσκηση 3

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή $T \sim t_{(20)}$. Να βρεθούν αριθμοί b, c, d τέτοιοι ώστε $P(T \geq b) = 0,05$, $P(T \leq c) = 0,05$ $P(|T| \geq d) = 0,05$.

Άσκηση 4

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή $T \sim t_{(135)}$. Να βρεθούν αριθμοί b, c, d τέτοιοι ώστε $P(T \geq b) = 0,05$, $P(T \leq c) = 0,05$ $P(|T| \geq d) = 0,05$. Να επαληθευτεί ότι οι αριθμοί b, c, d είναι ίδιοι εάν αντί $T \sim t_{(135)}$ θεωρήσουμε ότι $T \sim N(0,1)$.

Άσκηση 5 (άσκηση 5.13 βιβλίου)

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή $T \sim t_{(10)}$. Να υπολογιστεί η $P(|T| \geq 2,228)$.

Άσκηση 6

Τυχαίο δείγμα μεγέθους $n = 100$ παρατηρήσεων επιλέγεται από πληθυσμό με $\mu = 30$ και $\sigma = 16$. Να προσεγγιστούν οι ακόλουθες πιθανότητες

$$A) P(\bar{X} \geq 28), \quad B) P(22.1 \leq \bar{X} \leq 26.8), \quad \Gamma) P(\bar{X} \leq 28.2), \quad \Delta) P(\bar{X} \geq 27)$$

(Υπόδειξη: η κατανομή του πληθυσμού είναι άγνωστη. Ποια είναι η κατανομή δειγματοληψίας του δειγματικού μέσου; Βάσει ποιού θεωρήματος;)

B) Θα αλλάξουν οι παραπάνω πιθανότητες αν η τυπική απόκλιση του πληθυσμού σ είναι άγνωστη και δίνεται η δειγματική τυπική απόκλιση? Εξηγείστε.

Άσκηση 7

Έστω τυχαίο δείγμα (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) μεγέθους $n=4$, από πληθυσμό με μέσο μ και διακύμανση σ^2 . $\bar{Y} = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) / 4$ δηλώνει τον δειγματικό μέσο του τυχαίου δείγματος.

(α) Ποιος είναι ο μέσος και η διακύμανση του $\bar{Y}$ ως συνάρτηση των παραμέτρων του πληθυσμού;

(β) Θεωρήστε ένα διαφορετικό εκτιμητή του μ :

$$W = \frac{1}{8}Y_1 + \frac{1}{8}Y_2 + \frac{1}{4}Y_3 + \frac{1}{2}Y_4.$$

Δείξτε ότι ο W είναι αμερόληπτος εκτιμητής του μ . Βρείτε την διακύμανση του W ως συνάρτηση των παραμέτρων του πληθυσμού.

(γ) Με βάση τα αποτελέσματα ποιον εκτιμητή του μ θα προτιμήσετε, $\bar{Y}$ ή W , και γιατί;