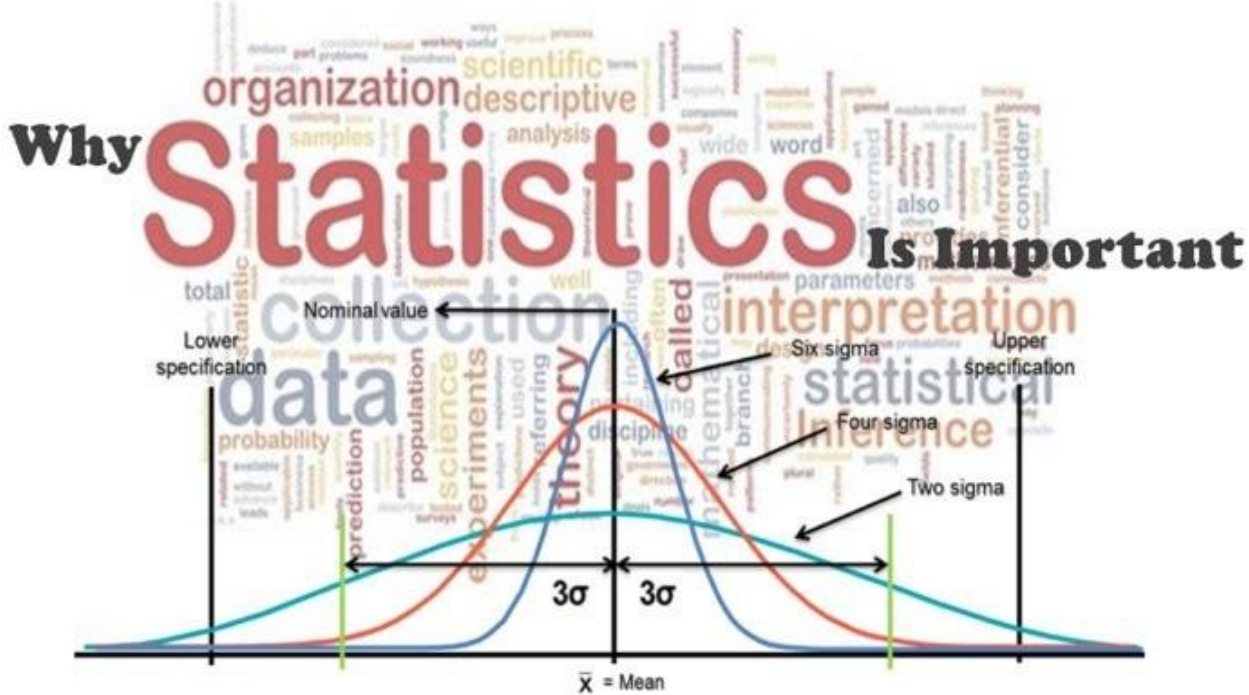
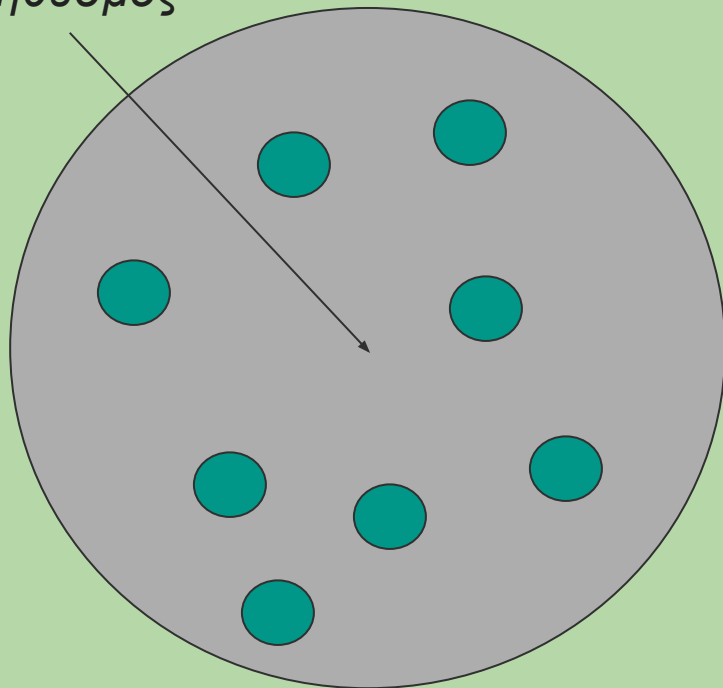




Πληθυσμός και Δείγμα

Πληθυσμός



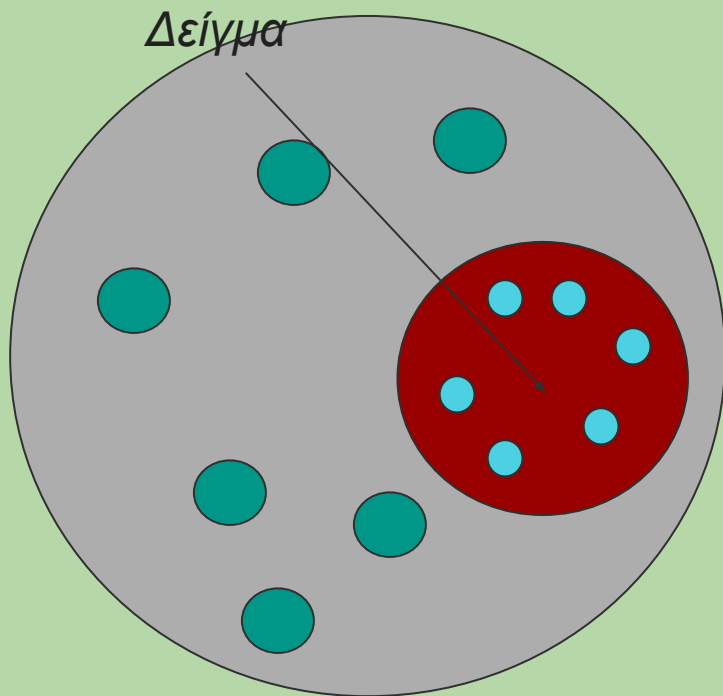
Πληθυσμός

Αριθμός Παρατηρήσεων: **N**

Μέση Τιμή: **μ**

Τυπική Απόκλιση: **σ**

Πληθυσμός και Δείγμα



Δείγμα

Αριθμός Παρατηρήσεων: **n**

Μέση Τιμή: **$\bar{X}$**

Τυπική Απόκλιση: **S**

Πληθυσμός και Δείγμα

Population Mean	Sample Mean
$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$	$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$
N = number of items in the population	n = number of items in the sample

Πληθυσμός και Δείγμα

Population Standard Deviation

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \mu)^2}{N}}$$

σ = population standard deviation

N = the size of the population

X_i = each value from the population

μ = the population mean

Sample Standard Deviation

$$s = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

s = sample standard deviation

n = the size of the sample

X_i = each value from the sample

$\bar{x}$ = the sample mean

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Για όλα τα δείγματα συγκεκριμένου μεγέθους από οποιοδήποτε κατανομή πληθυσμού **η κατανομή των δειγματικών μέσων** είναι κατά προσέγγιση η **κανονική κατανομή**.

Αυτή η προσέγγιση βελτιώνεται όσο το μέγεθος του δείγματος αυξάνει.

ΤΟ ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΟΡΙΑΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

- Ο μέσος της κατανομής των δειγματικών μέσων είναι ο μέσος του πληθυσμού:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

- η τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$

- Μπορούμε να τυποποιήσουμε την μεταβλητή του δειγματικού μέσου

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

•

Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ)

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις
τον (άγνωστο) **μέσο του πληθυσμού (μ)**
των ρυθμών οικονομικής ανάπτυξης
για όλες τις χώρες και γεωγραφικές περιοχές του πλανήτη
κατά το έτος 2020 !!!

Δες τα πραγματικά δεδομένα εδώ:

<https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.MKTP.KD.ZG?view=chart>

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)** των ρυθμών οικονομικής ανάπτυξης για όλες τις χώρες και γεωγραφικές περιοχές του πλανήτη κατά το έτος 2020 !!!

Έχω **$N = 257$** (**αριθμός παρατηρήσεων πληθυσμού**, δηλ. όλες οι χώρες του πλανήτη)

Κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς βρίσκω και τον **πραγματικό μέσο (μ) του πληθυσμού** $\rightarrow \mu = -4,70$

Ακόμη, μπορώ να υπολογίσω την **τυπική απόκλιση του πληθυσμού** $\rightarrow \sigma = 7,82$

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)** των ρυθμών οικονομικής ανάπτυξης για όλες τις χώρες και γεωγραφικές περιοχές του πλανήτη κατά το έτος 2020 !!!

Step by step calculation

1. Add up all the numbers:

$$\text{Sum} = \sum x_i = -26 + -3 + \dots + -3 + -8 = -1208$$

2. Count how many numbers there are:

$$n = 257 \quad \mathbf{N}$$

3. Divide the sum by the count:

$$\text{Average} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-1208}{257} = -4.7004$$

Αν όλες οι παρατηρήσεις του πληθυσμού είναι γνωστές τότε μπορώ να υπολογίσω τα μ και σ

$$\text{Sums of squares} = \sum (x_i - \bar{x})^2 = (-26 - -4.7)^2 + (-3 - -4.7)^2 + \dots + (-3 - -4.7)^2 + (-8 - -4.7)^2 = 15747.93$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{15747.93}{257}} = \sqrt{61.276} = 7.8279$$

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)** των ρυθμών οικονομικής ανάπτυξης για όλες τις χώρες και γεωγραφικές περιοχές του πλανήτη κατά το έτος 2020 !!!

Τι θα συμβεί όμως αν ΔΕΝ είναι γνωστός ο πραγματικός μέσος (μ) του πληθυσμού ; ; ;

Αυτό μπορεί να συμβεί πολύ απλά επειδή δεν έχετε διαθέσιμες όλες τις πραγματικές παρατηρήσεις του πληθυσμού . . .

Τότε, η καλύτερη εκτίμηση που μπορείτε να έχετε για τον άγνωστο πραγματικό μέσο (μ) του πληθυσμού είναι ο δειγματικός μέσος.

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)** των ρυθμών οικονομικής ανάπτυξης για όλες τις χώρες και γεωγραφικές περιοχές του πλανήτη κατά το έτος 2020 !!!

Τι θα συμβεί όμως αν ΔΕΝ είναι γνωστός ο πραγματικός μέσος (μ) του πληθυσμού ; ; ;

Πάρε ένα δείγμα $n = 20$ παρατηρήσεων

Υπολόγισε τον δειγματικό μέσο:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Step by step calculation

1. Add up all the numbers:

$$\text{Sum} = \sum x_i = -5 + 4 + \dots + -2 + -3 = -27$$

2. Count how many numbers there are:

$$n = 20$$

δείγμα $n=20$

3. Divide the sum by the count:

$$\text{Average} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-27}{20} = -1.35$$

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)** των ρυθμών οικονομικής ανάπτυξης για όλες τις χώρες και γεωγραφικές περιοχές του πλανήτη κατά το έτος 2020 !!!

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

$$P (X_{\text{δειγμ.μέσος}} - Z_{\alpha/2} * \text{τυπ.απόκλ.δειγμ.μέσ.} < \mu < X_{\text{δειγμ.μέσος}} + Z_{\alpha/2} * \text{τυπ.απόκλ.δειγμ.μέσ.}) = 95\%$$

Έστω πως η σ είναι γνωστή ($\sigma=7,82$)

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)** των ρυθμών οικονομικής ανάπτυξης για όλες τις χώρες και γεωγραφικές περιοχές του πλανήτη κατά το έτος 2020 !!!

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

The diagram shows the formula for a confidence interval with arrows pointing to specific values: $\bar{x}$ is 7,82, σ is 7,82, $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ is 1,96, and n is 20. The interval is centered around μ , with the lower bound marked as -1,35 and the upper bound marked as -1,35.

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

Annotations: $\bar{x} = 7,82$, $\sigma = 7,82$, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$, $n = 20$. The interval is centered around μ , with the lower bound marked as -1,35 and the upper bound marked as -1,35.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143

$$\alpha/2 = 0,05/2 = 0,025 \rightarrow Z = \pm 1,96$$

-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)** των ρυθμών οικονομικής ανάπτυξης για όλες τις χώρες και γεωγραφικές περιοχές του πλανήτη κατά το έτος 2020 !!!

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

$$P (-1,35 - 1,96 * 1,749 < \mu < -1,35 + 1,96 * 1,749)$$

το διάστημα μέσα στο
οποίο θα βρίσκεται
το μ για $\alpha=5\%$

$$= 95\%$$

το μ (αν είχα τέλεια
πληροφόρηση)

$$P (-4,77 < \mu < +2,07) = 95\%$$

$$\mu = -4,70$$

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)** των ρυθμών οικονομικής ανάπτυξης για όλες τις χώρες και γεωγραφικές περιοχές του πλανήτη κατά το έτος 2020 !!!

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

Ακριβώς το ίδιο θα βγάλει και ο υπολογιστής αν δοκιμάσουμε την εφαρμογή:

<https://www.statskingdom.com/confidence-interval-calculator.html>

Confidence Interval Calculator

The confidence interval calculator computes either the confidence interval of the **mean** or the confidence interval of the **standard deviation**, with calculation steps."

Mean confidence interval: [-4.7772 , 2.0772].

Confidence interval type:

Data is:

Mean confidence interval

Average, SD, n

Average ($\bar{x}$):

Sample size (n):

-1.35

20

Do you know the population SD (σ)?

Population standard deviation (σ):

Yes (use normal distribution)

7.82

Confidence Level (CL):

Rounding:

0.95

4

Περίπτωση 2η: Άγνωστη σ του πληθυσμού
αλλά **μεγάλα δείγματα ($n > 25$)**

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

Ο τύπος μένει ίδιος απλά αντί για την σ χρησιμοποιείς την s του δείγματος

$$\bar{x} - \frac{\cancel{\sigma}}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\cancel{\sigma}}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

Περίπτωση 2η: Άγνωστη σ του πληθυσμού
αλλά **μεγάλα δείγματα ($n > 25$)**

***Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο
Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):***

Έστω πως παίρνεις ένα μεγάλο δείγμα $n = 30$ παρατηρήσεων.

***Μπορείς να υπολογίσεις την δειγματική μέση τιμή
και την δειγματική τυπική απόκλιση !!!***

Περίπτωση 2η: Άγνωστη σ του πληθυσμού
αλλά **μεγάλα δείγματα ($n > 25$)**

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

Step by step calculation

1. Add up all the numbers:

$$\text{Sum} = \Sigma x_i = -15 + 1 + \dots + -1 + -3 = -122$$

2. Count how many numbers there are:

$$n = 30$$

3. Divide the sum by the count:

$$\text{Average} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{-122}{30} = -4.0667$$

$$\text{Mean} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{-122}{30} = -4.0667$$

$$\text{Sums of squares} = \Sigma (x_i - \bar{x})^2 = (-15 - -4.067)^2 + (1 - -4.067)^2 + \dots + (-1 - -4.067)^2 + (-3 - -4.067)^2 = 673.8667$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{673.8667}{30-1}} = \sqrt{23.2368} = 4.8205$$

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)** των ρυθμών οικονομικής ανάπτυξης για όλες τις χώρες και γεωγραφικές περιοχές του πλανήτη κατά το έτος 2020 !!!

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

Annotations for the left side of the formula:

- $\bar{x}$: 4,82
- s : (crossed out, replaced by σ)
- n : 30
- $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: 1,96

Annotations for the right side of the formula:

- $\bar{x}$: 4,82
- s : (crossed out, replaced by σ)
- n : 30
- $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: 1,96

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)** των ρυθμών οικονομικής ανάπτυξης για όλες τις χώρες και γεωγραφικές περιοχές του πλανήτη κατά το έτος 2020 !!!

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

$$P (-4,06 - 1,96 * 0,88 < \mu < -4,06 + 1,96 * 0,88)$$

το διάστημα μέσα στο
οποίο θα βρίσκεται
το μ για $\alpha=5\%$

$$= 95\%$$

το μ (αν είχα τέλεια
πληροφόρηση)

$$P (-5,78 < \mu < -3,21) = 95\%$$

$$\mu = -4,70$$

Περίπτωση 3η: Άγνωστη σ του πληθυσμού
αλλά μικρά δείγματα ($n < 25$)

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

Ο τύπος μένει ίδιος απλά αντί για την σ χρησιμοποιείς την s του δείγματος και αντί για Z την t . . .

$$\bar{x} - \frac{\cancel{\sigma}^s}{\sqrt{n}} \cancel{Z}^t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\cancel{\sigma}^s}{\sqrt{n}} \cancel{Z}^t_{\frac{\alpha}{2}}$$

Περίπτωση 3η: Άγνωστη σ του πληθυσμού
αλλά **μεγάλα δείγματα ($n > 25$)**

***Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο
Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):***

Έστω πως παίρνεις ένα μικρό δείγμα $n = 15$ παρατηρήσεων.

***Μπορείς να υπολογίσεις την δειγματική μέση τιμή
και την δειγματική τυπική απόκλιση !!!***

Περίπτωση 3η: Άγνωστη σ του πληθυσμού
αλλά μικρά δείγματα ($n < 25$)

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

Step by step calculation

1. Add up all the numbers:

$$\text{Sum} = \sum x_i = 3 + -12 + \dots + -3 + -3 = -72$$

2. Count how many numbers there are:

$$n = 15$$

3. Divide the sum by the count:

$$\text{Average} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-72}{15} = -4.8$$

$$\text{Mean} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{-72}{15} = -4.8$$

$$\text{Sums of squares} = \sum (x_i - \bar{x})^2 = (3 - -4.8)^2 + (-12 - -4.8)^2 + \dots + (-3 - -4.8)^2 + (-3 - -4.8)^2 = 284.4$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{284.4}{15-1}} = \sqrt{20.3143} = 4.5071$$

Περίπτωση 3η: Άγνωστη σ του πληθυσμού
αλλά **μικρά δείγματα ($n < 25$)**

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

Ο τύπος μένει ίδιος απλά αντί για την σ χρησιμοποιείς την s του δείγματος και αντί για Z την t . . .

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

Annotations for the left formula:
- $\bar{x} = -4,8$
- $\sigma = 4,5$
- $n = 15$
- $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,145$

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}$$

Annotations for the right formula:
- $\bar{x} = -4,8$
- $s = 4,5$
- $n = 15$
- $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2,145$

δικατάληκτο
(δίπλευρο)

t-test table

$\alpha=5\%$

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)** των ρυθμών οικονομικής ανάπτυξης για όλες τις χώρες και γεωγραφικές περιοχές του πλανήτη κατά το έτος 2020 !!!

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

$$P (-4,8 - 2,145 * 1,16 < \mu < -4,8 + 2,145 * 1,16)$$

το διάστημα μέσα στο
οποίο θα βρίσκεται
το μ για $\alpha=5\%$

$$= 95\%$$

το μ (αν είχα τέλεια
πληροφόρηση)

$$P (-7,28 < \mu < -2,31) = 95\%$$

$$\mu = -4,70$$

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)** των ρυθμών οικονομικής ανάπτυξης για όλες τις χώρες και γεωγραφικές περιοχές του πλανήτη κατά το έτος 2020 !!!

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

Ακριβώς το ίδιο θα βγάλει και ο υπολογιστής αν δοκιμάσουμε την εφαρμογή:

<https://www.statskingdom.com/confidence-interval-calculator.html>

Confidence Interval Calculator

The confidence interval calculator computes either the confidence interval of the **mean** or the confidence interval of the **standard deviation**, with calculation steps."

Mean confidence interval: [-7.292 , -2.308].

Confidence interval type:

Mean confidence interval

Data is:

Average, SD, n

Average ($\bar{x}$):

-4.8

Sample size (n):

15

Do you know the population SD (σ)?

No (use t-distribution)

Sample standard deviation (S):

4.5

Confidence Level (CL):

0.95

Rounding:

4

Για να δούμε τι κάναμε ...

διάστημα
εμπιστοσύνης
για τον μ

	μ	σ	$\bar{X}$	S	i	[...]	...]
πληθυσμός	-4,70	7,82	-	-	N=257	-	-
δείγμα Α	άγνωστο	7,82	-1,35	-	n=20	[-4,77	+2,07]
δείγμα Β	άγνωστο	-	-4,06	4,82	n=30	[-5,78	-3,21]
δείγμα Γ	άγνωστο	-	-4,8	4,50	n=15	[-7,28	-2,31]

Και τα 3 δείγματα κατάφεραν να πέσουν μέσα ...
(το πραγματικό μ βρίσκεται μέσα στα Δ.Ε)

μέσα εδώ θα βρίσκεται κατά 95%
ο πραγματικός μέσος ρυθμός ανάπτυξης για
όλες τις χώρες του κόσμου το 2020

Εφαρμογές για εξάσκηση στην εκτίμηση ενός διαστήματος εμπιστοσύνης για τον άγνωστο πραγματικό μέσο του πληθυσμού (μ)

Country Name	2022
Albania	9,9
Austria	4,8
Bulgaria	15,9
Belarus	14,9
Czechia	8,7
Germany	6,1
Spain	4,7
Finland	5,4
Greece	6,5
Ireland	6,8
Iceland	8,9
Netherlands	6,2
Norway	28,2
Poland	10,7
Romania	12,1
Serbia	10,5
Ukraine	34,9

Παράδειγμα (πραγματικά δεδομένα)

Να κατασκευαστεί ένα 95% και ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για τον πραγματικό μέσο του πληθυσμού για τον ρυθμό πληθωρισμού το έτος 2022 στην Ευρώπη.

Έχω ένα δείγμα $n = 17$ παρατηρήσεων (μικρό δείγμα).

Μπορώ να υπολογίσω τον δειγματικό μέσο και την δειγματική τυπική απόκλιση.

Είμαι στην 3η περίπτωση (βλ. άγνωστη σ και μικρό δείγμα).

Country Name	2022
Albania	9,9
Austria	4,8
Bulgaria	15,9
Belarus	14,9
Czechia	8,7
Germany	6,1
Spain	4,7
Finland	5,4
Greece	6,5
Ireland	6,8
Iceland	8,9
Netherlands	6,2
Norway	28,2
Poland	10,7
Romania	12,1
Serbia	10,5
Ukraine	34,9

Step by step calculation

1. Add up all the numbers:

$$\text{Sum} = \Sigma x_i = 9.9 + 4.8 + \dots + 10.5 + 34.9 = 195.2$$

2. Count how many numbers there are:

$$n = 17$$

3. Divide the sum by the count:

$$\text{Average} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{195.20000000000002}{17} = 11.4824$$

δειγματικός
μέσος

$$\text{Mean} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{195.2}{17} = 11.4824$$

$$\text{Sums of squares} = \Sigma (x_i - \bar{x})^2 = (9.9 - 11.482)^2 + (4.8 - 11.482)^2 + \dots + (10.5 - 11.482)^2 + (34.9 - 11.482)^2 = 1109.2047$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{1109.2047}{17-1}} = \sqrt{69.3253} = 8.3262$$

δειγματική
τυπ. απόκλιση

Περίπτωση 3η: Άγνωστη σ του πληθυσμού
αλλά **μικρά δείγματα ($n < 25$)**

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

Ο τύπος μένει ίδιος απλά αντί για την σ χρησιμοποιείς την s του δείγματος και αντί για Z την t . . .

$$\begin{array}{ccccccc} & 8,32 & & 2,12 & & 8,32 & & 2,12 \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\ 11,48 & \overline{\chi} & - & \frac{\cancel{\sigma}}{\sqrt{\cancel{n}}} & \cancel{Z}_{\frac{\alpha}{2}} & \leq \mu \leq & \overline{\chi} & + & \frac{\cancel{\sigma}}{\sqrt{\cancel{n}}} & \cancel{Z}_{\frac{\alpha}{2}} \\ \nwarrow & & & \nearrow & & \nwarrow & & \nearrow & & \nwarrow \\ & & & 17 & & & & 17 & & \end{array}$$

δικατάληκτο

t-test table

$\alpha=5\%$

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)** του ρυθμού πληθωρισμού για όλες τις χώρες της ευρώπης κατά το έτος 2022 !!!

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

$$P (11,48 - 2,01 * 2,12 < \mu < 11,48 + 2,01 * 2,12)$$

το διάστημα μέσα στο
οποίο θα βρίσκεται
το μ για $\alpha=5\%$

$$= 95\%$$

$$P (7,21 < \mu < 15,74) = 95\%$$

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)**
του ρυθμού πληθωρισμού για όλες τις χώρες της ευρώπης κατά το έτος
2022 !!!

**Κατασκεύασε ένα 90% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο
Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):**

$$P (11,48 - 2,01 * 1,746 < \mu < 11,48 + 2,01 * 1,746)$$

το διάστημα μέσα στο
οποίο θα βρίσκεται
το μ για $\alpha=5\%$

$$= 90\%$$

↘ $P (7,97 < \mu < 14,98) = 90\%$

δικατάληκτο

t-test table $\alpha=10\%$

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819

Τι θα γίνει αν μεγαλώσω το πλήθος των παρατηρήσεων ; ; ;

Να κατασκευαστεί ένα 95% και ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για τον πραγματικό μέσο του πληθυσμού για τον ρυθμό πληθωρισμού το έτος 2022 στην Ευρώπη.

Έχω ένα δείγμα $n = 30$ παρατηρήσεων (μεγάλο δείγμα).

Μπορώ να υπολογίσω τον δειγματικό μέσο και την δειγματική τυπική απόκλιση.

Είμαι στην 2η περίπτωση (βλ. άγνωστη σ και μεγάλο δείγμα).

Country Name	2022
Bulgaria	16
Switzerland	2
Cyprus	7
Czechia	9
Germany	6
Denmark	9
Spain	5
Estonia	16
Finland	5
France	3
United Kingdom	5
Greece	6
Croatia	8
Hungary	14
Ireland	7
Iceland	9
Italy	4
Lithuania	16
Luxembourg	6
Latvia	10
North Macedonia	9
Malta	5
Netherlands	6
Norway	28
Poland	11
Portugal	5
Romania	12
Slovak Republic	7
Slovenia	7
Sweden	6

n = 30

*Δείγμα με 30 παρατηρήσεις για τον
ρυθμό πληθωρισμού στην
Ευρώπη το έτος 2022 ...*

Step by step calculation

1. Add up all the numbers:

$$\text{Sum} = \sum x_i = 16+2+ \dots +7+6 = 259$$

2. Count how many numbers there are:

$$n = 30$$

3. Divide the sum by the count:

$$\text{Average} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{259}{30} = 8.6333$$

δειγματικός μέσος

$$\text{Mean} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{259}{30} = 8.6333$$

$$\text{Sums of squares} = \sum (x_i - \bar{x})^2 = (16 - 8.633)^2 + (2 - 8.633)^2 + \dots + (7 - 8.633)^2 + (6 - 8.633)^2 = 794.9667$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{794.9667}{30-1}} = \sqrt{27.4126} = 5.2357$$

δειγματική
τυπ. απόκλιση

Περίπτωση 2η: Άγνωστη σ του πληθυσμού
αλλά **μεγάλα δείγματα ($n > 25$)**

Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):

Ο τύπος μένει ίδιος απλά αντί για την σ χρησιμοποιείς την s του δείγματος

$$\bar{x} - \frac{\cancel{\sigma}}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\cancel{\sigma}}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)**
του ρυθμού πληθωρισμού για όλες τις χώρες της ευρώπης κατά το έτος
2022 !!!

**Κατασκεύασε ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο
Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):**

$$P (8,63 - 0,95 * 1,96 < \mu < 8,63 + 0,95 * 1,96)$$

το διάστημα μέσα στο
οποίο θα βρίσκεται
το μ για $\alpha=5\%$

$$= 95\%$$

$$P (6,768 < \mu < 10,50) = 95\%$$

Έστω πως σε ενδιαφέρει να προσδιορίσεις τον **μέσο του πληθυσμού (μ)**
του ρυθμού πληθωρισμού για όλες τις χώρες της ευρώπης κατά το έτος
2022 !!!

**Κατασκεύασε ένα 90% Διάστημα Εμπιστοσύνης για τον Άγνωστο
Πραγματικό Μέσο του Πληθυσμού (μ):**

$$P (8,63 - 0,95 * 1,64 < \mu < 8,63 + 0,95 * 1,64)$$

το διάστημα μέσα στο
οποίο θα βρίσκεται
το μ για $\alpha=5\%$

$$= 90\%$$

$$P (7,072 < \mu < 10,18) = 90\%$$

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143

$$\alpha/2 = 0,1/2 = 0,05 \rightarrow Z = \pm 1,64$$

-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681

Για να δούμε τι κάναμε ...

διάστημα
εμπιστοσύνης
για τον μ

	μ	σ	$\bar{X}$	S	i	[...	...]
πληθυσμός	-	-	-	-	-	-	-
δείγμα A	άγνωστο	-	11,48	8,32	n=17	[7,21	15,74]
δείγμα B	άγνωστο	-	8,63	5,23	n=30	[6,76	10,5]

Για $\alpha = 5\%$

μέσα εδώ θα βρίσκεται κατά 95%
ο πραγματικός μέσος ρυθμός πληθωρισμού
για τις χώρες της Ευρώπης το 2022

Για να δούμε τι κάναμε ...

διάστημα
εμπιστοσύνης
για τον μ

	μ	σ	$\bar{X}$	S	i	[...	...]
πληθυσμός	-	-	-	-	-	-	-
δείγμα A	άγνωστο	-	11,48	8,32	n=17	[7,97	14,98]
δείγμα B	άγνωστο	-	8,63	5,23	n=30	[7,07	10,18]

Για $\alpha = 10\%$

μέσα εδώ θα βρίσκεται κατά 90%
ο πραγματικός μέσος ρυθμός πληθωρισμού
για τις χώρες της Ευρώπης το 2022