

Δεσμευμένη Πιθανότητα

0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	2 to 1
	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	2 to 1
	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	2 to 1
	1st 12			2nd 12			3rd 12						
	1 to 18		EVEN	RED	BLACK	ODD	19 to 36						

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

γενικός
τύπος

Ενδεχόμενο A:

Η πιθανότητα να έρθει **MAYPO**

$$\rightarrow P(A) = 18/37 = 48,64\%$$

Ενδεχόμενο B:

Η πιθανότητα να έρθει **νούμερο > 30**

$$\rightarrow P(B) = 6/37 = 16,21\%$$

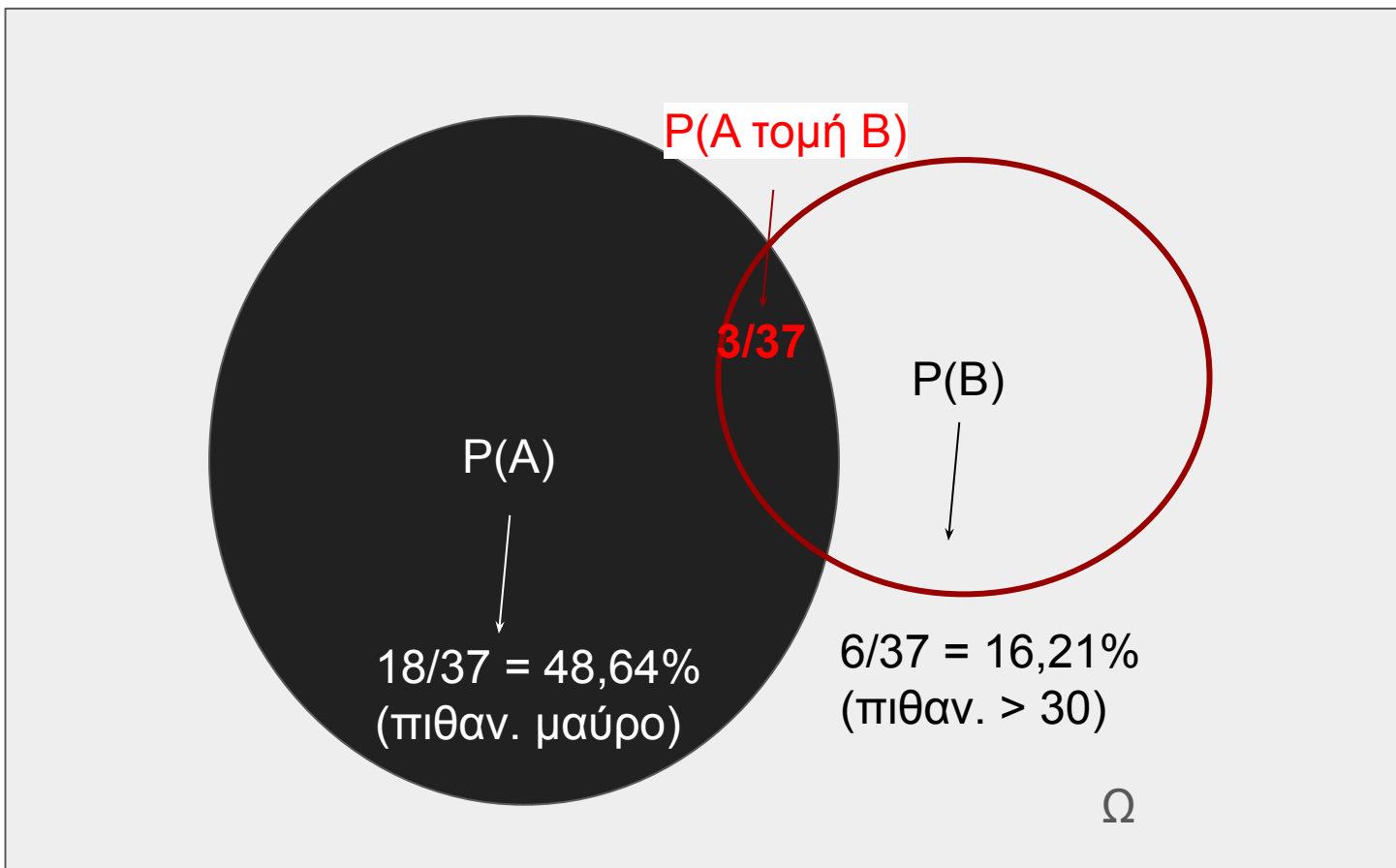
$P(B/A) = ;$

Η πιθανότητα να έρθει **νούμερο > 30**
με δεδομένο
πως το χρώμα είναι μαύρο

$$\rightarrow 8,10\%/48,64\% = 16,65\%$$

$$P(B / A) = P(A \text{ τομή } B) / P(A) = 0,0810 / 0,4864 = 16,65\%$$

σελ.3



0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	2 to 1
00	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	2 to 1
	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	2 to 1
	1st 12			2nd 12			3rd 12						
	1 to 18			EVEN			RED			BLACK			ODD
													19 to 36

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

γενικός
τύπος

Ενδεχόμενο A:

Η πιθανότητα να έρθει **MAYPO**

$$\rightarrow P(A) = 18/37 = 48,64\%$$

Ενδεχόμενο B:

Η πιθανότητα να έρθει **νούμερο > 30**

$$\rightarrow P(B) = 6/37 = 16,21\%$$

$P(A/B) = ;$

Η πιθανότητα να έρθει **MAYPO**
με δεδομένο
πως το νούμερο > 30

$$\rightarrow 8,10\% / 16,21\% = 49,96\%$$

$$P(B)=P(\text{άνδρας}) = 51\% \quad \rightarrow P(\text{γυναίκα}) = 1 - 51\% = 49\%$$

$$P(A)=P(\text{αχρωματοψία}) = 4,2\% \quad \rightarrow P(\text{όχι_αχρωματοψία}) = 1 - 4\% = 96\%$$

$$P(\text{αχρωματοψία } \underline{\text{ΚΑΙ}} \text{ άνδρας}) = 4\%$$

τομή

Να βρεθεί η πιθανότητα ένα άτομο να πάσχει από αχρωματοψία με δεδομένο πως είναι άνδρας

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

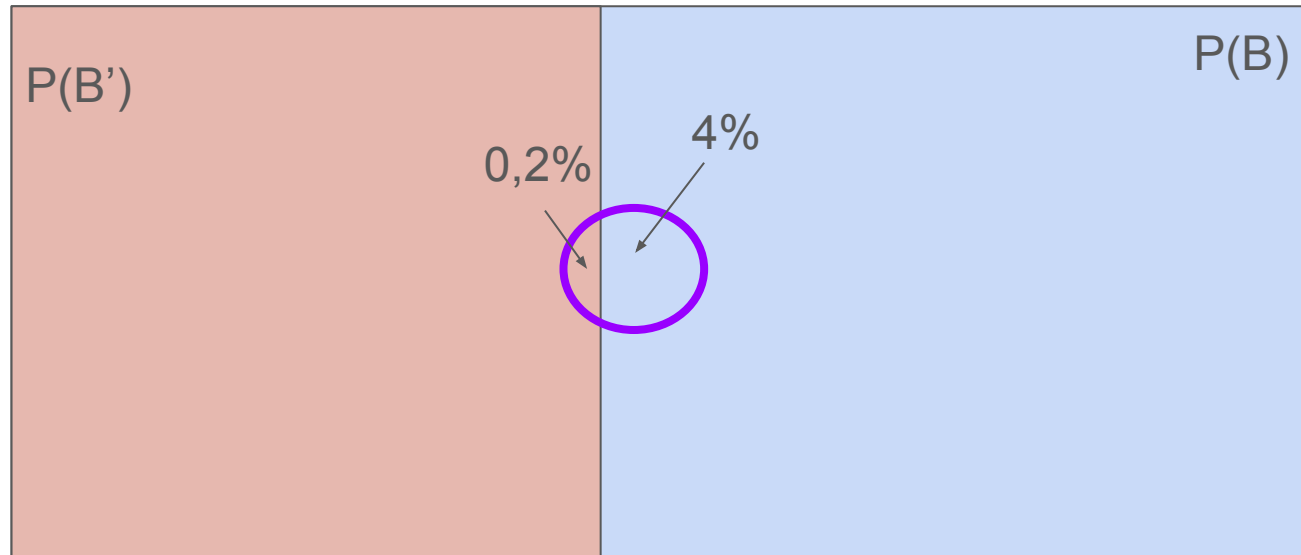
$$4\% / 51\% = 0,078 \text{ ή } 7,8\%$$

$$P(B)=P(\text{άνδρας}) = 51\% \quad \rightarrow P(\text{γυναίκα}) = 1 - 51\% = 49\%$$

$$P(A)=P(\text{αχρωματοψία}) = 4,2\% \quad \rightarrow P(\text{όχι_αχρωματοψία}) = 1 - 4\% = 96\%$$

Να βρεθεί η πιθανότητα ένα άτομο να ΜΗΝ πάσχει από αχρωματοψία με δεδομένο πως είναι γυναίκα

$$P(A'/B') = (49\% - 0,2\%) / 49\% = 99,59\%$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Ρίχνεις το ζάρι 2 φορές ... Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρεις άθροισμα μικρότερο από το 8

1	2	3	4	5	6
1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

δειγματικός χώρος

$\Omega = \{1,1 \ 1,2 \ 1,3 \ \dots \ 6,4 \ 6,5 \ 6,6\} \rightarrow 36$

ενδεχόμενο

$A = \{1,1 \ 1,2 \ 1,3 \ \dots , 5,1 \ 5,2 \ 6,1\} \rightarrow 21$

$P(A) = 21/36 = 0,5833 \ (58,33\%)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Ρίχνεις το ζάρι 2 φορές ... Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρεις άθροισμα μεγαλύτερο από το 10

1	2	3	4	5	6
1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

δειγματικός χώρος

$$\Omega = \{1,1 \ 1,2 \ 1,3 \ \dots \ 6,4 \ 6,5 \ 6,6\} \rightarrow 36$$

ενδεχόμενο

$$B = \{5,6 \ 6,5 \ 6,6\} \rightarrow 3$$

$$P(B) = 3/36 = 0,083 \ (8,33\%)$$

$P(A)=58,33\%$ → να φέρω άθροισμα μικρότερο από το 8

$1-P(A) = 1-0,5833 = 0,4167$ (41,67%) → να φέρω άθροισμα μεγαλύτερο από το 8

$P(B)=8,33\%$ → να φέρω άθροισμα πάνω από το 10

$1-P(B)=1-0,0833= 0,916$ (91,6%)

Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρω άθροισμα πάνω από 10 με δεδομένο πως στην πρώτη ρίψη έφερα 5

$(1/36) / (6/36) = 0,027/0,166=0,16$ (16,2%)

Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρω άθροισμα πάνω από 10 με δεδομένο πως στην πρώτη ρίψη έφερα 6

$(2/36) / (6/36) = 0,055/0,166=0,33$ (33,1%)

Τι θα μπορούσε να ζητηθεί στην εξέταση ;;;

- Να διαμορφώσετε τον **δειγματικό χώρο Ω** που περιλαμβάνει όλα τα πιθανά στοιχεία (βλ. αποτελέσματα) ενός πειράματος τύχης
- Να σχεδιάσετε σε **δέντρα** τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης
- Να εντοπίσετε **αν δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα** (βλ. A, B, Γ, ...) είναι μεταξύ τους **ξένα** (βλ. ανεξάρτητα) ή όχι
- Να κάνετε **βασικές πράξεις ενδεχομένων** (π.χ ένωση, τομή, αφαίρεση)
- Να υπολογίσετε **δεσμευμένες πιθανότητες**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Ζάρι: Άθροισμα δύο ρίψεων ...

$\Omega = \{1,1 \ 1,2 \ 1,3 \ 1,4 \ 1,5 \ 1,6 \ 2,1 \ 2,2 \ 2,3 \ 2,4 \ 2,5 \ 2,6 \ 3,1 \ 3,2 \ 3,3 \ 3,4 \ 3,5 \ 3,6$
 $4,1 \ 4,2 \ 4,3 \ 4,4 \ 4,5 \ 4,6 \ 5,1 \ 5,2 \ 5,3 \ 5,4 \ 5,5 \ 5,6 \ 6,1 \ 6,2 \ 6,3 \ 6,4 \ 6,5 \ 6,6\}$

Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα πάνω από 7 !!!

$\Omega = \{1,1 \ 1,2 \ 1,3 \ 1,4 \ 1,5 \ 1,6 \ 2,1 \ 2,2 \ 2,3 \ 2,4 \ 2,5 \ 2,6 \ 3,1 \ 3,2 \ 3,3 \ 3,4 \ 3,5 \ 3,6$
 $4,1 \ 4,2 \ 4,3 \ 4,4 \ 4,5 \ 4,6 \ 5,1 \ 5,2 \ 5,3 \ 5,4 \ 5,5 \ 5,6 \ 6,1 \ 6,2 \ 6,3 \ 6,4 \ 6,5 \ 6,6\}$

$$P(A) = 15 / 36 = 0,41 \ (41,6\%)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Ζάρι: Άθροισμα δύο ρίψεων ...

$\Omega = \{1,1 \ 1,2 \ 1,3 \ 1,4 \ 1,5 \ 1,6 \ 2,1 \ 2,2 \ 2,3 \ 2,4 \ 2,5 \ 2,6 \ 3,1 \ 3,2 \ 3,3 \ 3,4 \ 3,5 \ 3,6$
 $4,1 \ 4,2 \ 4,3 \ 4,4 \ 4,5 \ 4,6 \ 5,1 \ 5,2 \ 5,3 \ 5,4 \ 5,5 \ 5,6 \ 6,1 \ 6,2 \ 6,3 \ 6,4 \ 6,5 \ 6,6\}$

Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε τουλάχιστον μια φορά το 3 !!!

$\Omega = \{1,1 \ 1,2 \ 1,3 \ 1,4 \ 1,5 \ 1,6 \ 2,1 \ 2,2 \ 2,3 \ 2,4 \ 2,5 \ 2,6 \ 3,1 \ 3,2 \ 3,3 \ 3,4 \ 3,5 \ 3,6$
 $4,1 \ 4,2 \ 4,3 \ 4,4 \ 4,5 \ 4,6 \ 5,1 \ 5,2 \ 5,3 \ 5,4 \ 5,5 \ 5,6 \ 6,1 \ 6,2 \ 6,3 \ 6,4 \ 6,5 \ 6,6\}$

$$P(B) = 11 / 36 = 0,30 \ (30,5\%)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Ζάρι: Άθροισμα δύο ρίψεων ...

$\Omega = \{1,1 \ 1,2 \ 1,3 \ 1,4 \ 1,5 \ 1,6 \ 2,1 \ 2,2 \ 2,3 \ 2,4 \ 2,5 \ 2,6 \ 3,1 \ 3,2 \ 3,3 \ 3,4 \ 3,5 \ 3,6$
 $4,1 \ 4,2 \ 4,3 \ 4,4 \ 4,5 \ 4,6 \ 5,1 \ 5,2 \ 5,3 \ 5,4 \ 5,5 \ 5,6 \ 6,1 \ 6,2 \ 6,3 \ 6,4 \ 6,5 \ 6,6\}$

Να βρεθεί η πιθανότητα να ΜΗΝ φέρω ούτε μια φορά το 4! ! !

$\Omega = \{1,1 \ 1,2 \ 1,3 \ 1,4 \ 1,5 \ 1,6 \ 2,1 \ 2,2 \ 2,3 \ 2,4 \ 2,5 \ 2,6 \ 3,1 \ 3,2 \ 3,3 \ 3,4 \ 3,5 \ 3,6$
 $4,1 \ 4,2 \ 4,3 \ 4,4 \ 4,5 \ 4,6 \ 5,1 \ 5,2 \ 5,3 \ 5,4 \ 5,5 \ 5,6 \ 6,1 \ 6,2 \ 6,3 \ 6,4 \ 6,5 \ 6,6\}$

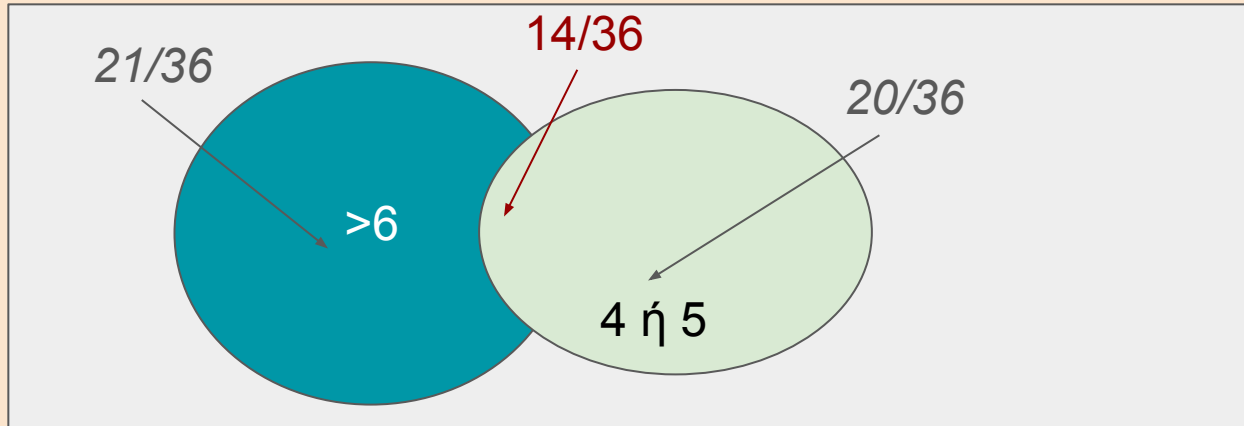
$$P(\Gamma) = P(\Omega) - (11 / 36) = 69,44\%$$

$\Omega = \{1,1 \ 1,2 \ 1,3 \ 1,4 \ 1,5 \ 1,6 \ 2,1 \ 2,2 \ 2,3 \ 2,4 \ 2,5 \ 2,6 \ 3,1 \ 3,2 \ 3,3 \ 3,4 \ 3,5 \ 3,6 \ 4,1 \ 4,2 \ 4,3 \ 4,4 \ 4,5 \ 4,6 \ 5,1 \ 5,2 \ 5,3 \ 5,4 \ 5,5 \ 5,6 \ 6,1 \ 6,2 \ 6,3 \ 6,4 \ 6,5 \ 6,6\}$

Να βρεθεί η πιθανότητα της ένωσης των ενδεχομένων

α) να φέρω άθροισμα μεγαλύτερο από το 6

β) να φέρω τουλάχιστον 1 φορά το 4 ή το 5 !!!



$$\begin{aligned} &0,5833 \\ &+ \ 0,5555 \\ &- \ 0,3888 \\ &= 0,75 \\ &(75\%) \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Ζάρι: Άθροισμα δύο ρίψεων ...

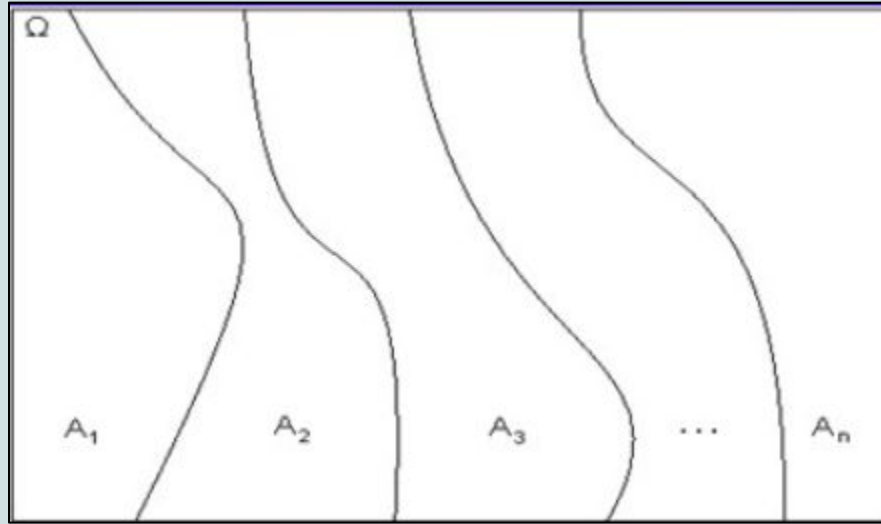
$\Omega = \{1,1 \ 1,2 \ 1,3 \ 1,4 \ 1,5 \ 1,6 \ 2,1 \ 2,2 \ 2,3 \ 2,4 \ 2,5 \ 2,6 \ 3,1 \ 3,2 \ 3,3 \ 3,4 \ 3,5 \ 3,6 \ 4,1 \ 4,2 \ 4,3 \ 4,4 \ 4,5 \ 4,6 \ 5,1 \ 5,2 \ 5,3 \ 5,4 \ 5,5 \ 5,6 \ 6,1 \ 6,2 \ 6,3 \ 6,4 \ 6,5 \ 6,6\}$

Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα πάνω από 5
με δεδομένο πως η πρώτη ρίψη ήταν το 3 !!!

$$P(A / B) = P(A \text{ τομή } B) / P(B) = 66,6\%$$

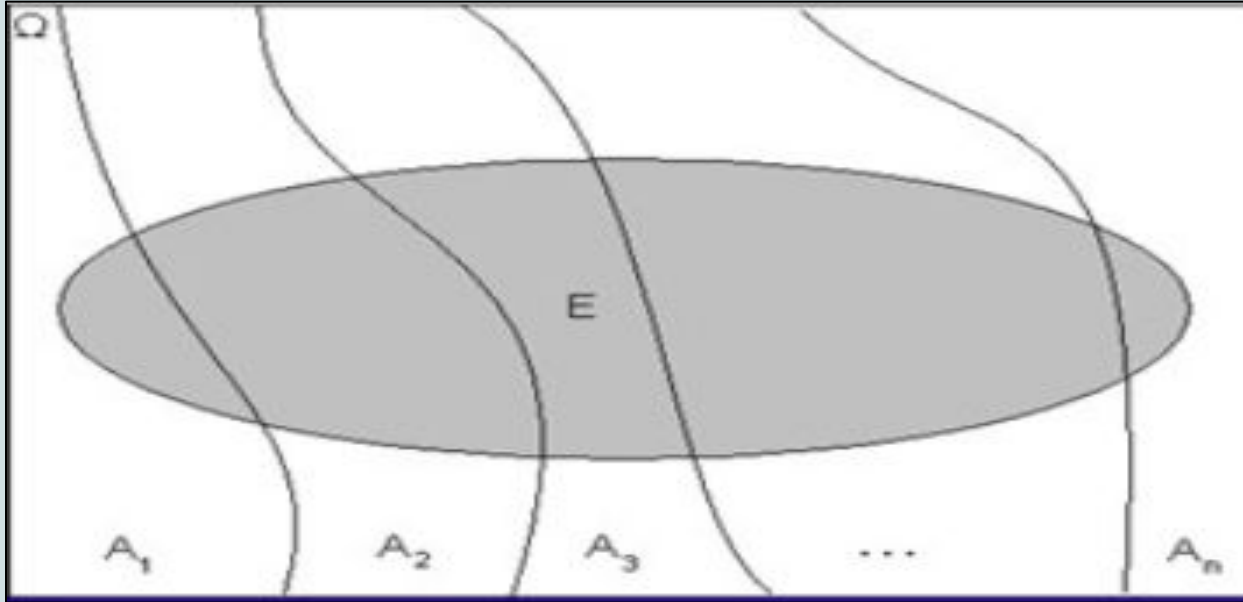
4/36

6/36

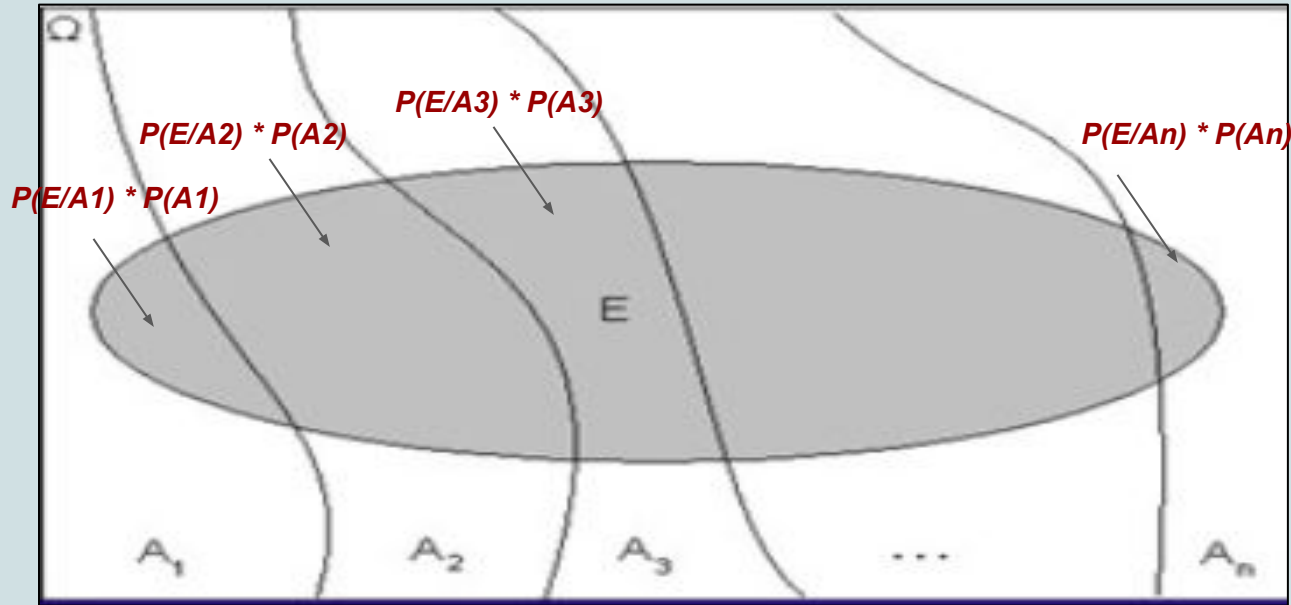


Εδώ βλέπουμε **ΞΕΝΑ** ενδεχόμενα !!! Αυτό σημαίνει πως η **τομή** τους είναι **μηδέν**.

Το $P(\Omega) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$

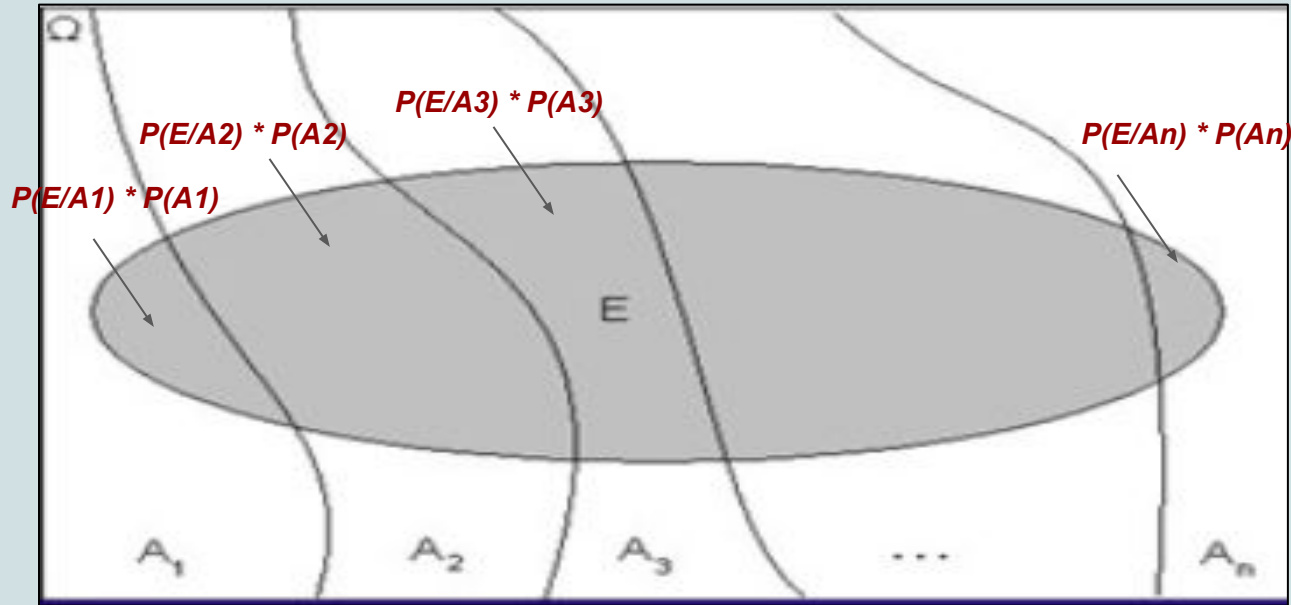


*Τι γίνεται αν μέσα από τα $\Xi E N A$ ενδεχόμενα A
περνάει ένα ενδεχόμενο E
που έχει τομές με όλα τα ενδεχόμενα A ; ; ;*



Προσπάθησε να υπολογίσεις το **$P(E)$**
με τη βοήθεια του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας ...

$$\begin{aligned} P(E/A_i) &= P(E \text{ τομή } A_i) / P(A_i) \\ \rightarrow P(E \text{ τομή } A_i) &= P(E/A_i) * P(A_i) \end{aligned}$$



$$P(E) = \sum P(E/A_i) * P(A_i)$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Έστω πως παράγουμε σε ένα εργοστάσιο με μόνο **δύο κεντρικές μηχανές** στη διάθεσή μας (βλ. **μηχανή A** και **μηχανή B**).

Γνωρίζουμε πως η μηχανή A δίνει το **90%** της ετήσιας παραγωγής μας, ενώ υπάρχει μια πιθανότητα της τάξεως του **0,01** να δώσει ελαττωματικά προϊόντα.

Η μηχανή B έχει **πενταπλάσια πιθανότητα** να δώσει ελαττωματικό προϊόν σε σχέση με το αντίστοιχο ποσοστό της μηχανής A.

Ποια η πιθανότητα να παραχθεί ένα ελαττωματικό αγαθό ; ; ;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Έστω πως παράγουμε σε ένα εργοστάσιο με μόνο **δύο κεντρικές μηχανές** στη διάθεσή μας (βλ. **μηχανή A** και **μηχανή B**).

Γνωρίζουμε πως η μηχανή A δίνει το **90%** της ετήσιας παραγωγής μας, ενώ υπάρχει μια πιθανότητα της τάξεως του **0,01** να δώσει ελαττωματικά προϊόντα.

$$P(A)=0,9$$

$$P(E/A)=0,01$$

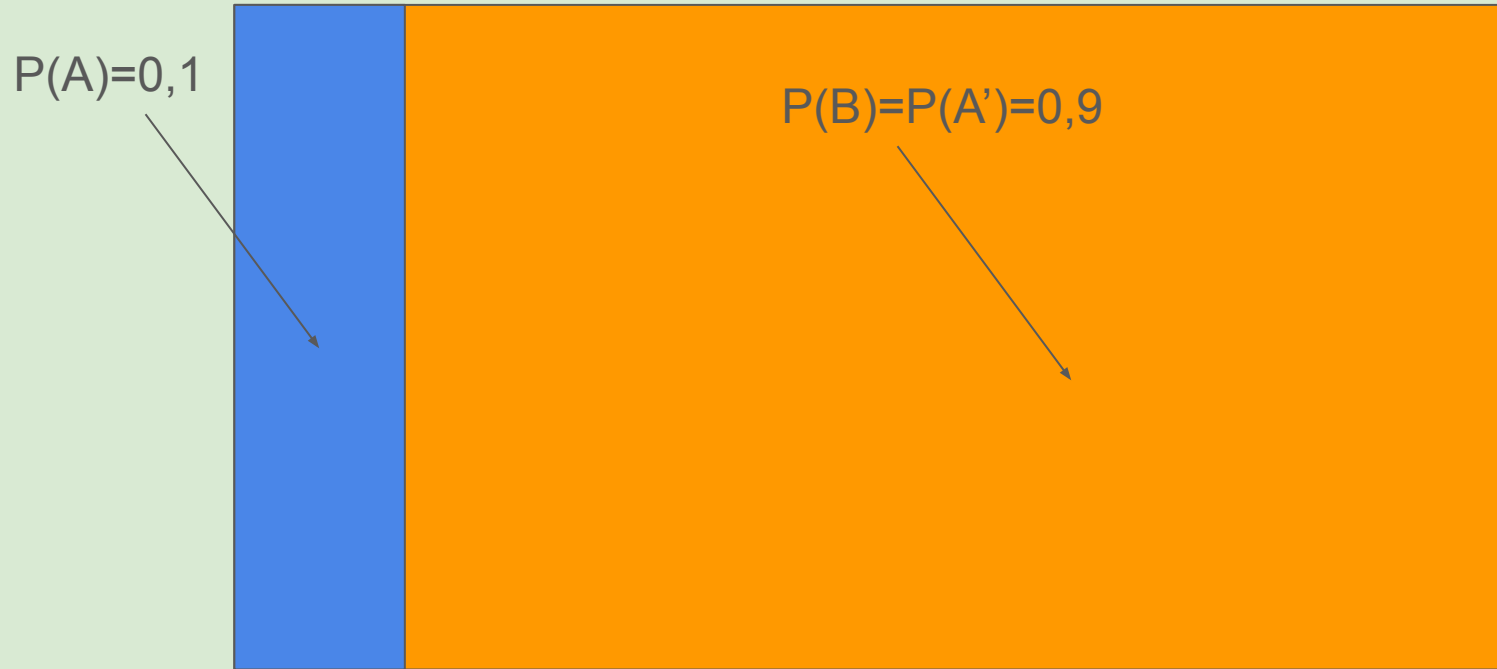
Η μηχανή B έχει **πενταπλάσια πιθανότητα** να δώσει ελαττωματικό προϊόν σε σχέση με το αντίστοιχο ποσοστό της μηχανής A.

$$P(B)=P(A')=0,1 \quad P(E/B)=0,05$$

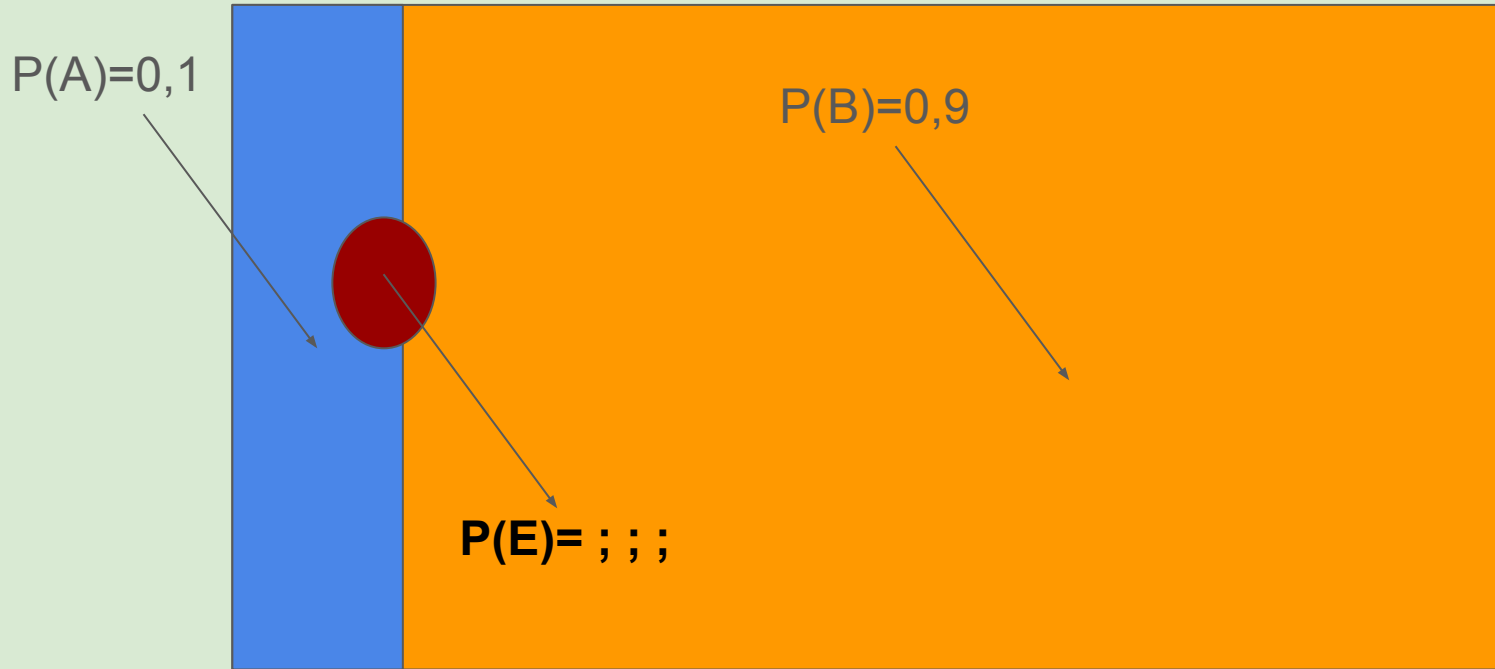
Ποια η πιθανότητα να παραχθεί ένα ελαττωματικό αγαθό ; ; ;

$$P(E)= ; ; ;$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5



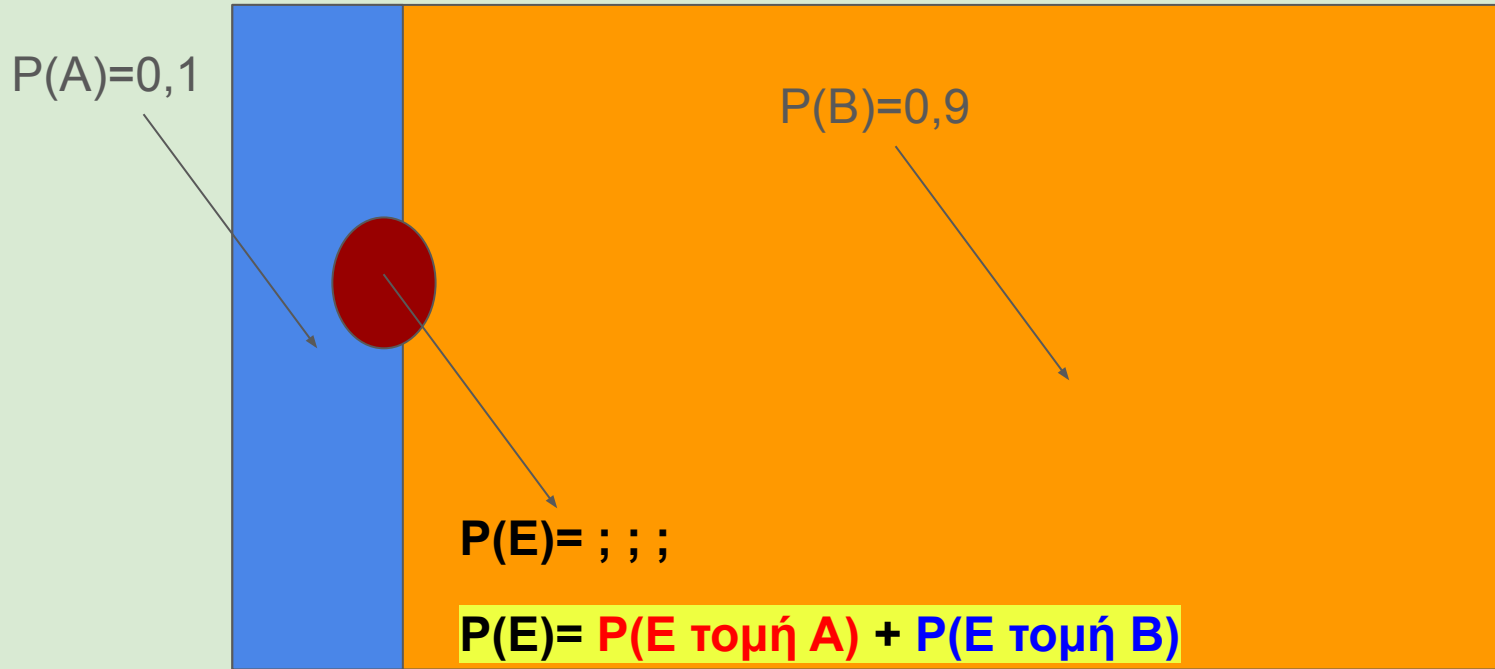
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5



$$P(E) = P(E \text{ τομή } A) + P(E \text{ τομή } B)$$

γενικά ισχύει: $P(A/B) = P(A \text{ τομή } B) / P(B)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5



$$P(E) = P(E/A)*P(A) + P(E/B)*P(B) = 0,01*0,9+0,05*0,1 = 1,4\%$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Για όλα τα δείγματα συγκεκριμένου μεγέθους από οποιοδήποτε κατανομή πληθυσμού ***η κατανομή των δειγματικών μέσων*** είναι κατά προσέγγιση η ***κανονική κατανομή***.

Αυτή η προσέγγιση βελτιώνεται όσο το μέγεθος του δείγματος αυξάνει.

ΤΟ ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΟΡΙΑΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

- Ο μέσος της κατανομής των δειγματικών μέσων είναι ο μέσος του πληθυσμού:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

- η τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$

- Μπορούμε να τυποποιήσουμε την μεταβλητή του δειγματικού μέσου

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

•

Διάστημα Εμπιστοσύνης (μ : πραγματικός μέσος)

$$P\left(\bar{X} - 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

δειγματικός
μέσος

η τυπική απόκλιση
των δειγματικών
μέσων (δες σελ. 25)

σ : τυπική απόκλιση
του πληθυσμού (αν
είναι γνωστή)

η τιμή Z
για $\alpha/2 =$
0,05/2=0,025

Ο τύπος αυτός θα σου δώσει με
μεγάλη βεβαιότητα το διάστημα μέσα
στο οποίο βρίσκεται το άγνωστο μ ...

Δ.Ε: 95%
 $\alpha=5\%$