

Πειράματα Τύχης: π.χ το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού, το φύλλο που θα τραβήξεις από την τράπουλα ...

Δειγματικός Χώρος (Ω): το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ...

π.χ ρίψη ενός νομίσματος $\rightarrow \Omega = \{ \text{Κ} , \text{Γ} \}$ $\longrightarrow$ δειγματικοί χώροι

ρίψη ενός ζαριού $\rightarrow \Omega = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$

Ενδεχόμενο: κάθε υποσύνολο ενός δειγματικού χώρου $A = \{ \text{Κ} \}$ $B = \{ 1, 4, 5 \}$ $\Gamma = \{ 4 \}$

Βέβαιο Ενδεχόμενο: πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση του πειράματος $P(\Omega) = 1$

Αδύνατο Ενδεχόμενο: δε μπορεί να πραγματοποιηθεί όσες φορές και να εκτελέσουμε το πείραμα $P(\Omega') = 0$

Π.Χ Έστω πως ρίχνω ένα κέρμα 2 φορές ...

Δειγματικός Χώρος: $\Omega = \{ \text{ΚΚ}, \text{ΚΓ}, \text{ΓΚ}, \text{ΓΓ} \}$ $P(\text{ΚΚ})+P(\text{ΚΓ})+P(\text{ΓΚ})+P(\text{ΓΓ})=1$

Ενδεχόμενα: $A = \{ \text{ΚΚ}, \text{ΓΓ} \}$ να φέρω και τις δύο φορές το ίδιο αποτέλεσμα ...

$$P(A)=2/4$$

$B = \{ \text{ΚΚ} \}$ να μη φέρω καμία φορά γράμματα ...

$$P(B)=1/4$$

$\Gamma = \{ \text{ΚΓ}, \text{ΓΚ} \}$ να φέρω διαφορετικό αποτέλεσμα σε κάθε ρίψη ...

$$P(\Gamma)=2/4$$

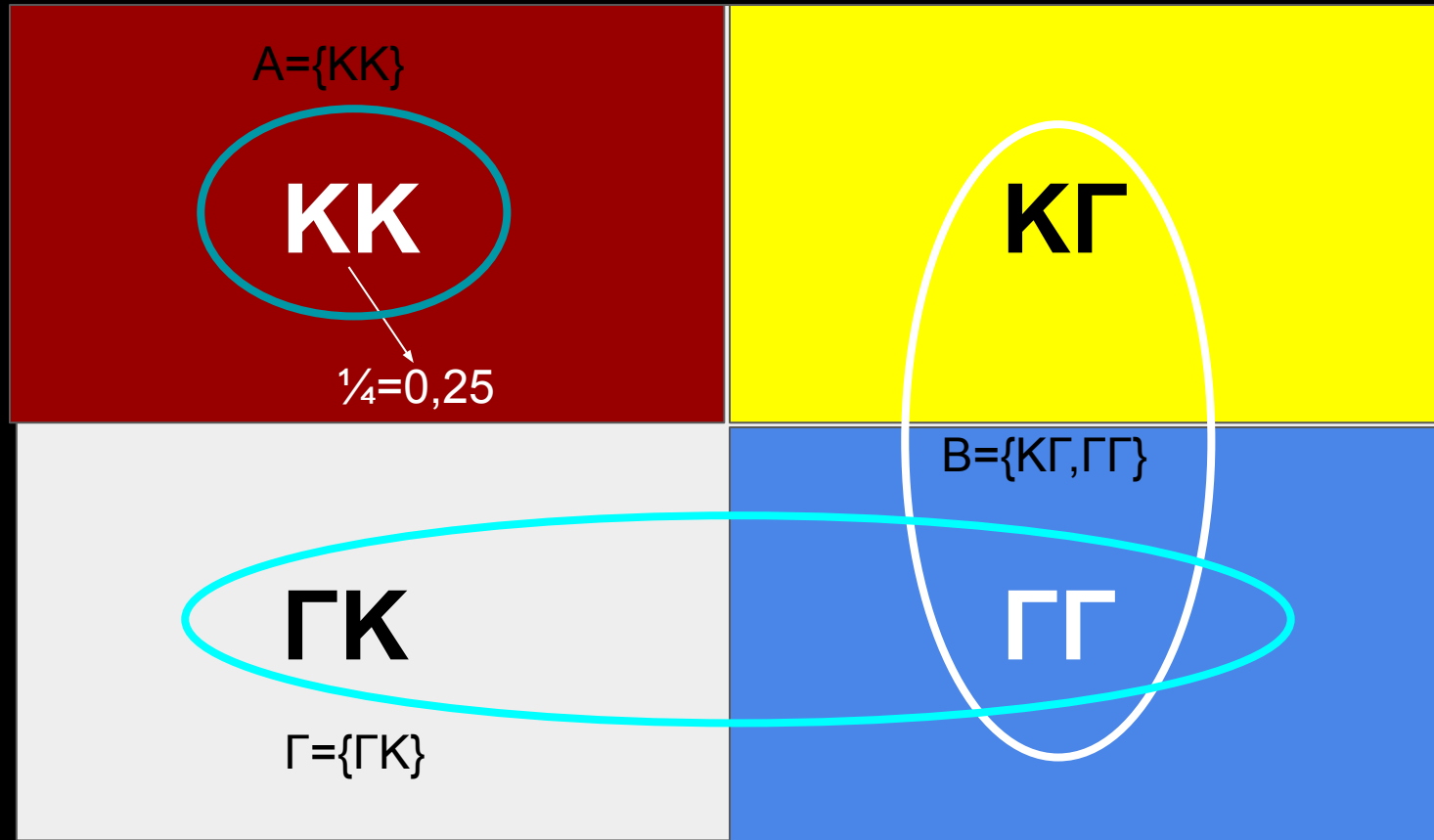
Π.Χ Έστω πως ρίχνω ένα ζάρι 1 φορά ...

Δειγματικός Χώρος: $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ $P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1$

Ενδεχόμενα: $A = \{ 5, 6 \}$ να φέρω αποτέλεσμα μεγαλύτερο από το 4 $P(A)=2/6$

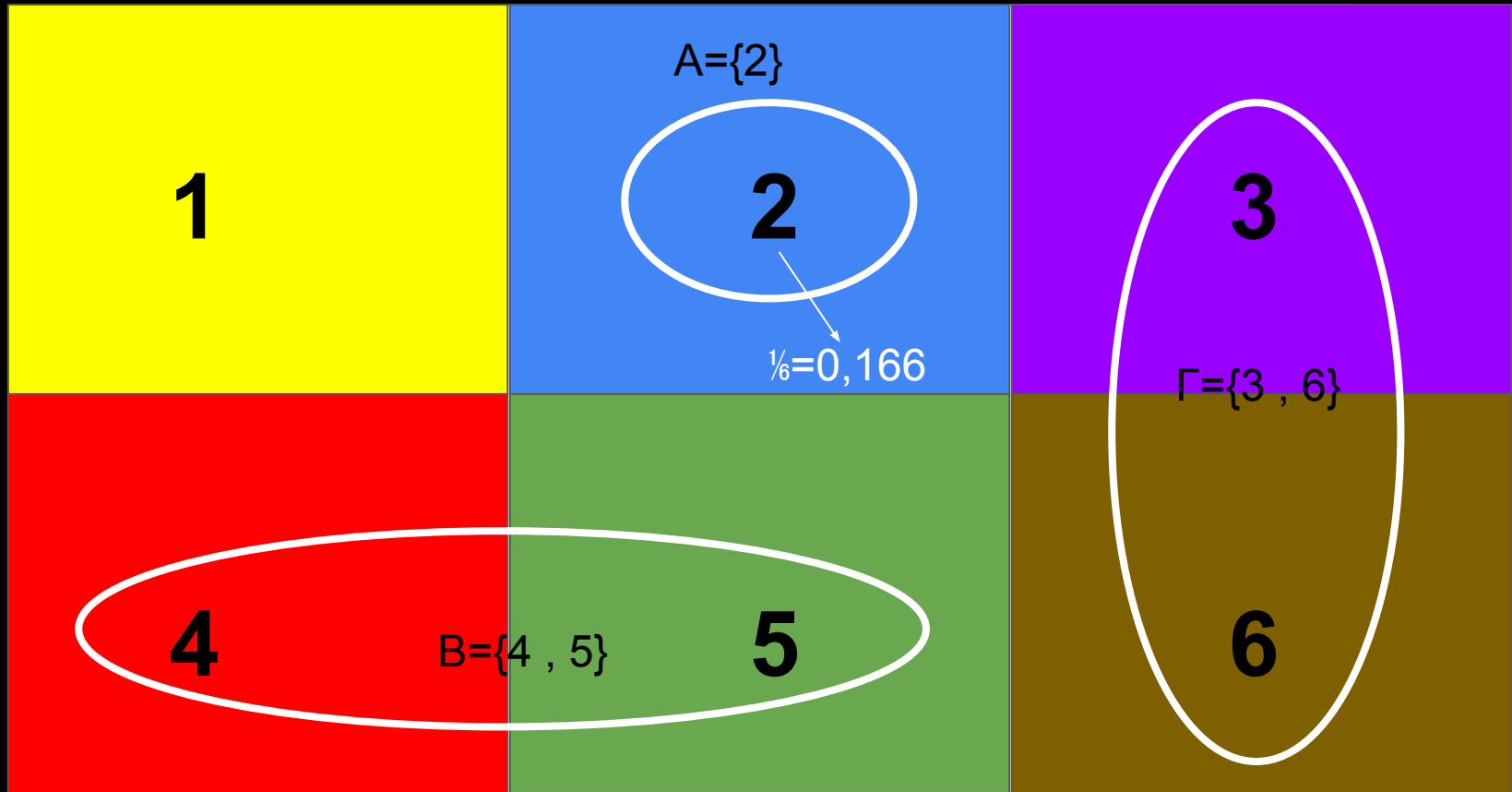
$B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ να φέρω αποτέλεσμα μικρότερο από το 5 $P(B)=4/6$

π.χ Έστω πως ρίχνω ένα κέρμα 2 φορές ...



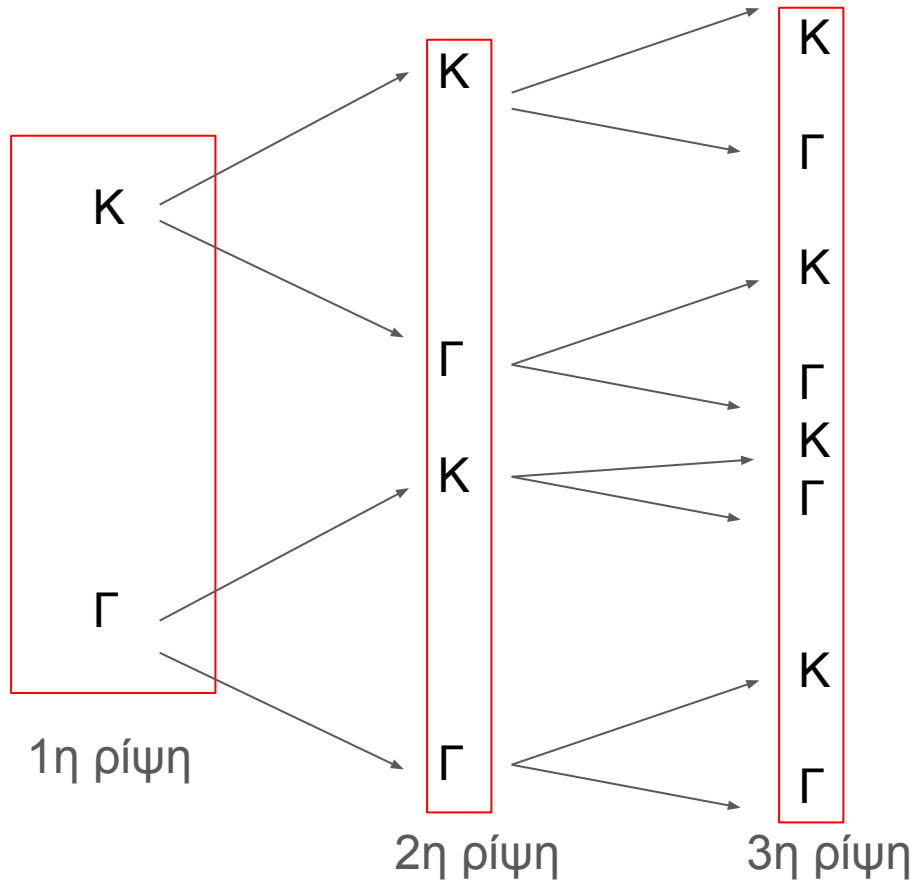
Δειγματικός Χώρος και Ενδεχόμενα

π.χ Έστω πως ρίχνω ένα ζάρι 1 φορά ...



Δειγματικός Χώρος και Ενδεχόμενα

π.χ Έστω πως ρίχνω ένα κέρμα 3 φορές ...



$\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\} \rightarrow$ δειγματικός χώρος

$A = \{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ\} \rightarrow$ ενδεχόμενο
(να φέρουμε δύο φορές γράμματα)

$$\frac{3}{8}=0,375$$

$B = \{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\} \rightarrow$ ενδεχόμενο (να φέρουμε
ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ δύο φορές γράμματα)

$$\frac{4}{8}=0,5$$

$\Gamma = \{ΚΚΚ, ΓΓΓ\} \rightarrow$ ενδεχόμενο
(να φέρουμε και στις 3 ρίψεις το ίδιο
αποτέλεσμα)

$$\frac{1}{4}=0,25$$

ρίψη ενός ζαριού $\rightarrow \Omega = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$

$$A = \{ 4 , 5 \} \quad A' = \{ 1 , 2 , 3 , 6 \}$$

$$f_i = 2 / 6 = 1 / 3 = 0,33 \text{ (33\%)}$$

διπλή ρίψη κέρματος $\rightarrow$ Δειγματικός Χώρος: $\Omega = \{ ΚΚ , ΚΓ , ΓΚ , ΓΓ \}$

Ενδεχόμενα: $A = \{ ΚΚ , ΓΓ \} \rightarrow f_i = 2 / 4 = 0,5 \text{ (50\%)}$ $A' = \{ ΚΓ , ΓΚ \}$

$B = \{ ΚΚ \} \rightarrow f_i = 1 / 4 = 0,25 \text{ (25\%)}$ $B' = \{ ΚΓ , ΓΚ , ΓΓ \}$

$\Gamma = \{ ΚΓ , ΓΚ \} \rightarrow f_i = 2 / 4 = 0,5 \text{ (50\%)}$ $\Gamma' = \{ ΚΚ , ΓΓ \}$

π.χ είναι αργά το βράδυ και κάθεσαι στη στάση απ' όπου περνάνε 7 λεωφορεία.
Μπαίνεις στο πρώτο που περνά χωρίς να δεις τον αριθμό του. **Ποια η πιθανότητα να είναι το λεωφορείο που περνάει από το σπίτι σου ;;;**

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A = \{4\}$$

$$f_i = 1 / 7 = 0,142 \text{ (14,2\%)} \quad \rightarrow P(A') = 1 - 0,142 = 0,858 \text{ (85,8\%)}$$

π.χ είναι αργά το βράδυ και κάθεσαι στη στάση απ' όπου περνάνε 5 λεωφορεία.
Μπαίνεις στο πρώτο που περνά χωρίς να δεις τον αριθμό του. **Ποια η πιθανότητα να είναι ένα από τα λεωφορεία που περνάει από το σπίτι σου ;;;**

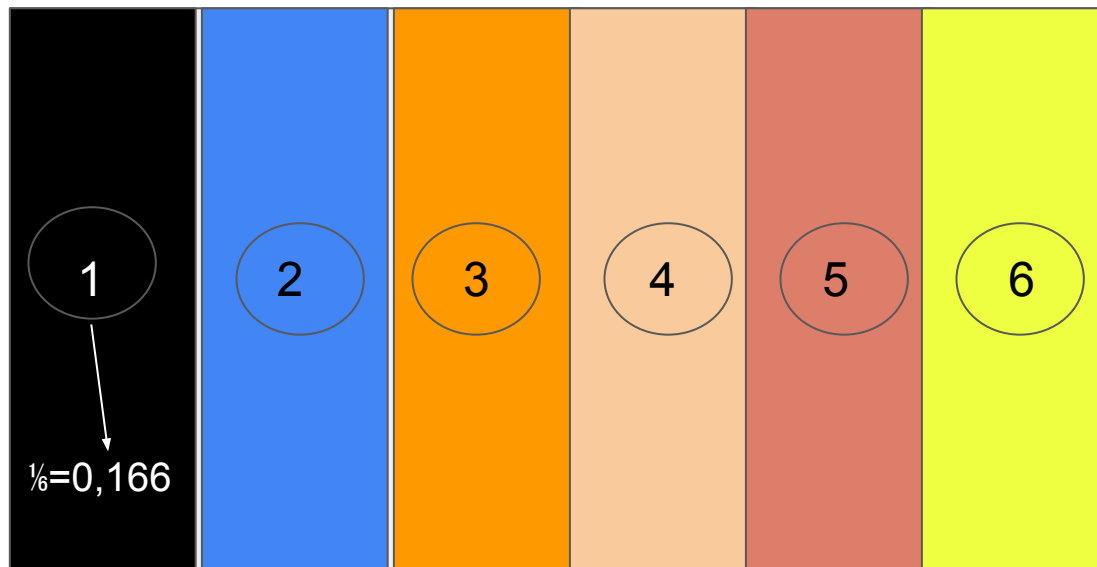
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{2, 4\}$$

$$f_i = 2 / 5 = 0,4 \text{ (40\%)} \quad \rightarrow P(A') = 1 - 0,4 = 0,6 \text{ (60\%)}$$



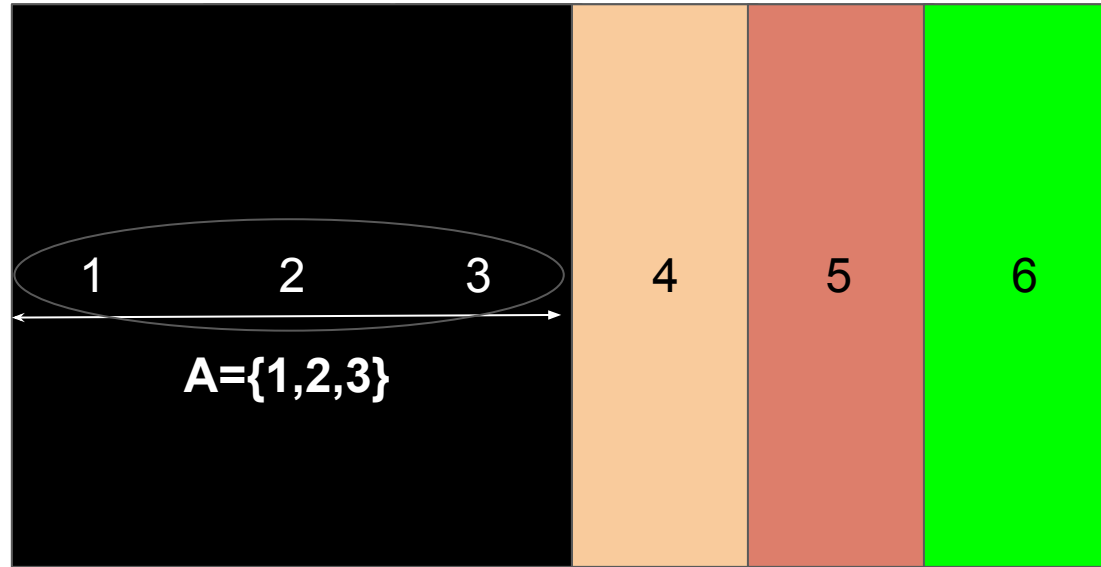
ισοπίθανα ενδεχόμενα



πχ ρίψη ζαριού ...

$$f1 = 0,166 \rightarrow P(A')=0,834$$

ισοπίθανα ενδεχόμενα

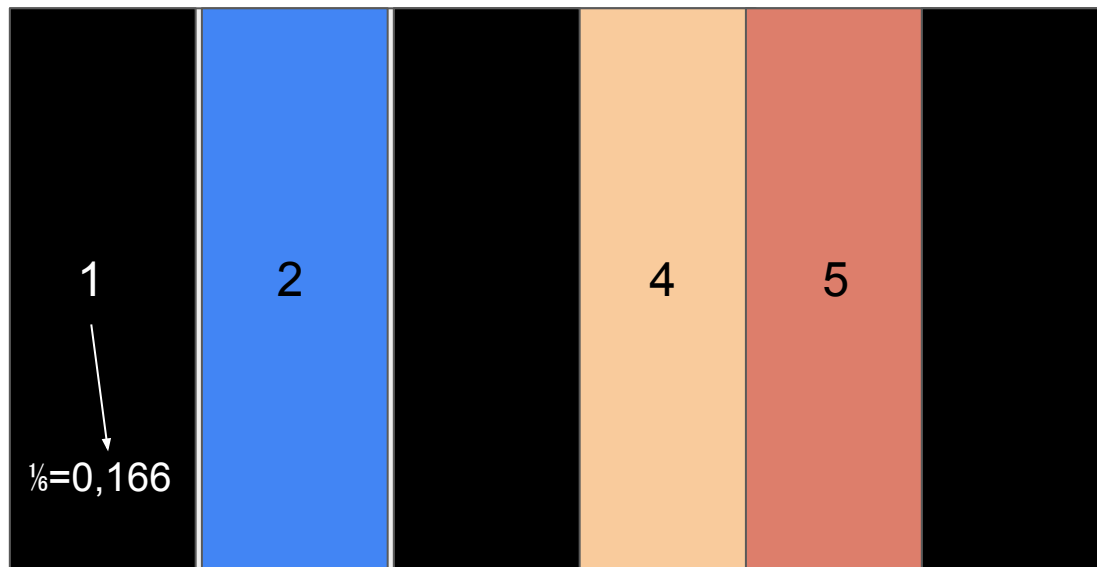


πχ ρίψη ζαριού ...

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0,5 \rightarrow P(A') = 1 - 0,5 = 0,5$$
$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 1 = P(\Omega)$$



ισοπίθανα ενδεχόμενα



$A = \{1, 3, 6\}$

πχ ρίψη ζαριού ...

$$f_1 + f_3 + f_6 = 0,5 \rightarrow P(A') = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$P(\Omega) = 1$$

αποτέλεσμα	n=10	n=100	n=1.000	n=100.000	n=άπειρο
1	2/10= 0,2	13/100= 0,13	160/1000	18.690/100.000	16,66%
2	1/10= 0,1	10/100= 0,1	148/1000	13.790/100.000	16,66%
3	3/10= 0,3	22/100= 0,22	102/1000	17.896/100.000	16,66%
4	1/10= 0,1	20/100= 0,2	180/1000	16.476/100.000	16,66%
5	2/10= 0,2	21/100= 0,21	120/1000	15.567/100.000	16,66%
6	1/10= 0,1	14/100= 0,14	290/1000	17.581/100.000	16,66%

πχ ρίψη ζαριού ...

f1 = 0,166

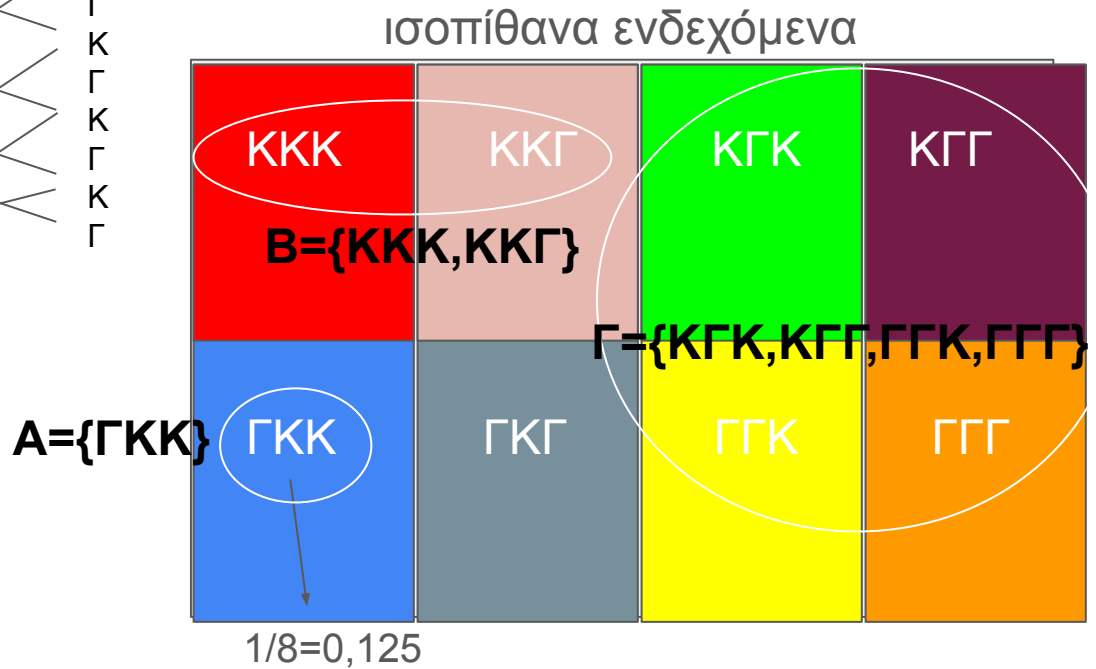
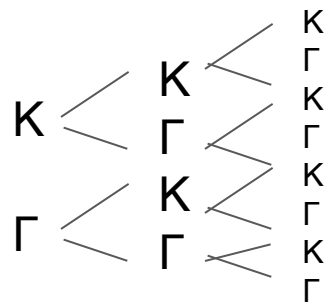
<https://alextrade.me/apps/dice/index.html> (δοκίμασε εδώ)

αποτέλεσμα	συχνότητα (σχετική συχνότητα)
1	II $\rightarrow P(1)=0,2$ 20%
2	I $\rightarrow P(2) = 0,1$ 10%
3	III $\rightarrow P(3)=0,3$ 30%
4	I $\rightarrow P(4)=0,1$ 10%
5	$P(5)=0$ 0%
6	III $\rightarrow P(6)=0,3$ 30%

πχ ρίψη ζαριού (10 φορές)...

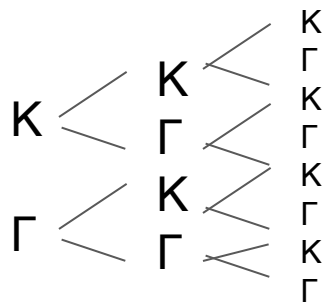
f1 = 0,166 (16,6%)

<https://alextade.me/apps/dice/index.html> (δοκίμασε εδώ)



πχ ρίψη κέρματος (3 φορές)...

f5 = 0,125



ισοπίθανα ενδεχόμενα

ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ
ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ

$A = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΓΚΓ\}$

$1/8 = 0,125$

πχ ρίψη κέρματος ...

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_5 + f_6 = 0,625$$

$$f_4 + f_7 + f_8 = 0,375 \rightarrow (1 - 0,625)$$

(δοκίμασε εδώ)

αποτέλεσμα	σχετική συχνότητα (%)
Κ	$P(\Gamma)=\mathbf{60\%}$
Γ	$P(\Gamma) =\mathbf{40\%}$

$n=10$

αποτέλεσμα	σχετική συχνότητα (%)
Κ	$P(\Gamma)=\mathbf{55\%}$
Γ	$P(\Gamma) =\mathbf{45\%}$

$n=60$

αποτέλεσμα	σχετική συχνότητα (%)
Κ	$P(\Gamma)=\mathbf{52\%}$
Γ	$P(\Gamma) =\mathbf{48\%}$

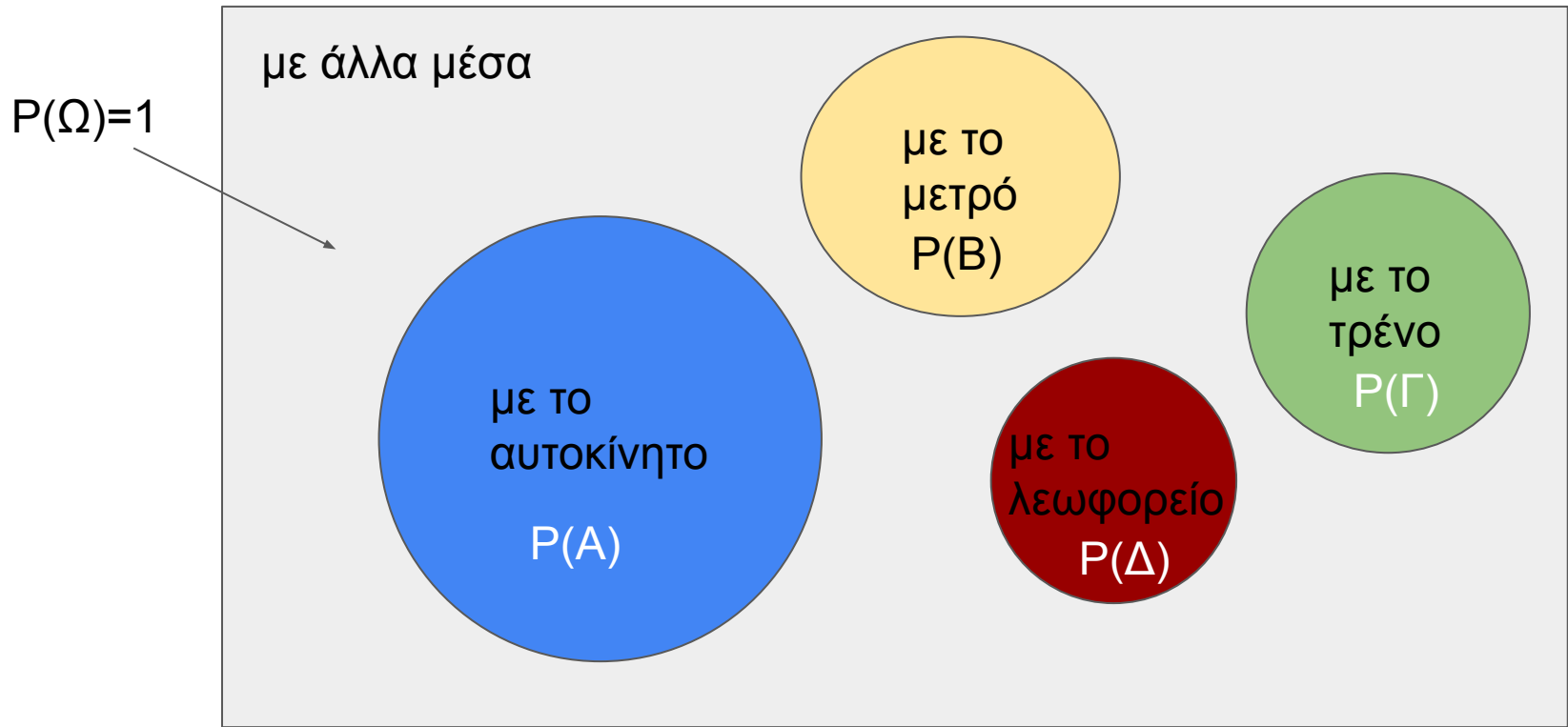
$n=100$

αποτέλεσμα	n=10	n=100	n=1.000	n=100.000	n=άπειρο
ΚΚΚ	12,5%	11,5%	10%	12,2%	12,5%
ΚΚΓ	13,1%	14,1%	14,1%	13%	12,5%
ΚΓΚ	12,8%	11,8%	13%	11,9%	12,5%
ΚΓΓ	14,2%	15,2%	15%	13%	12,5%
ΓΚΚ	11,2%	12,2%	13%	13,1%	12,5%
ΓΚΓ	11,5%	12,5%	12%	11,8%	12,5%
ΓΓΚ	12%	11%	12%	11%	12,5%
ΓΓΓ	12,7%	11,7%	10,9%	14	12,5%

πχ ρίψη κέρματος (3 φορές) ...

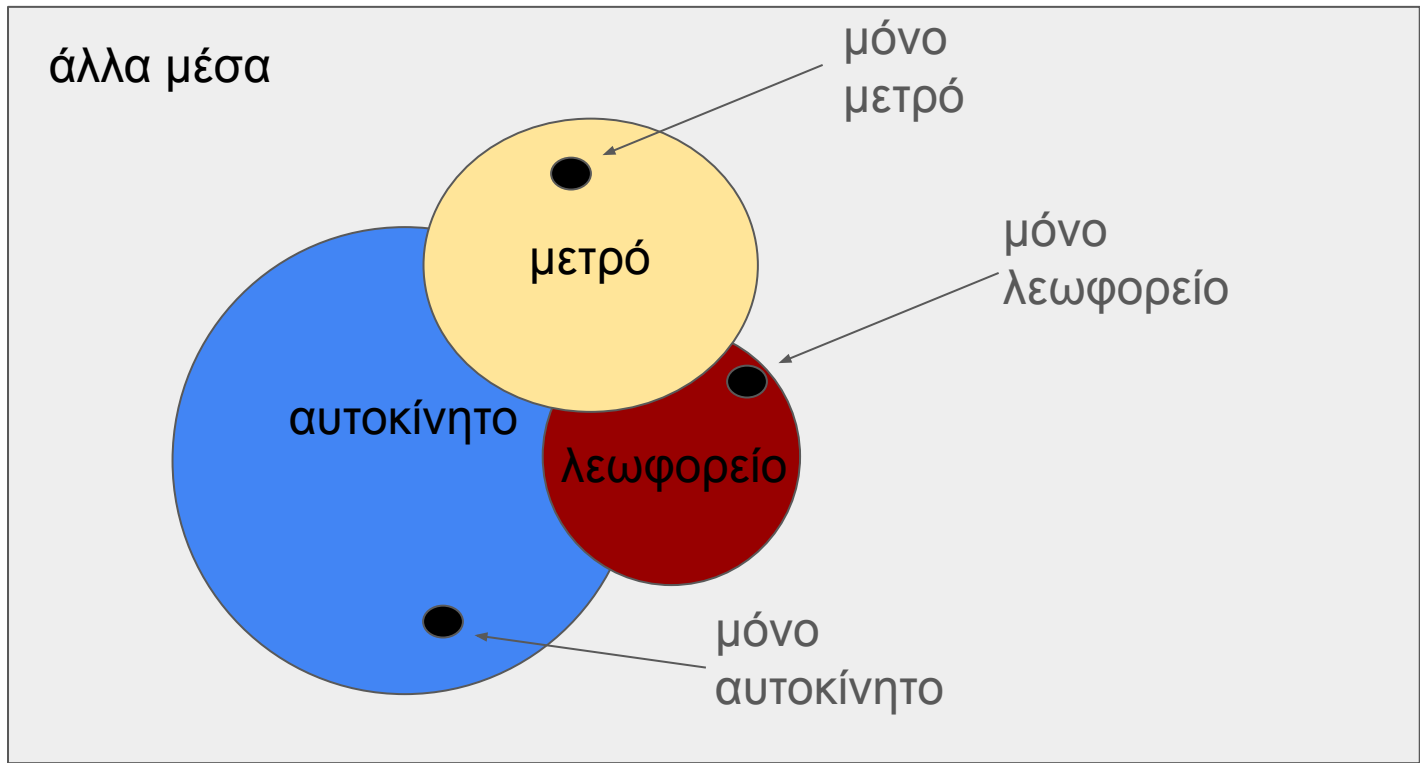
f1 = 12,5%

Με ποιο μέσο προτιμάς να ταξιδεύεις ;;;



Ασυμβίβαστα (ξένα) Ενδεχόμενα

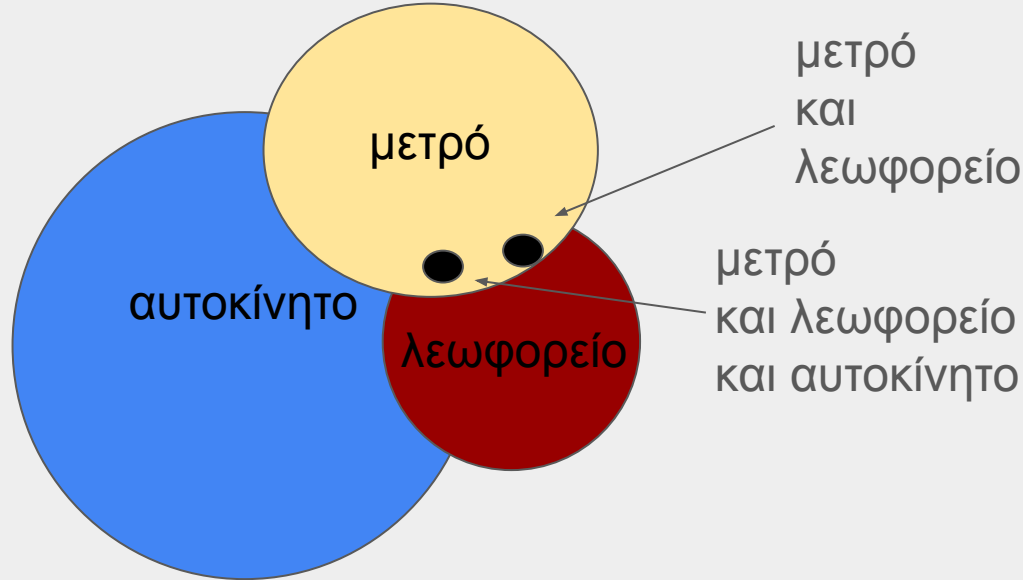
Ποιο από τα παρακάτω μέσα
έχεις χρησιμοποιήσει τουλάχιστον 1 φορά τον τελευταίο μήνα ;;;



Ενδεχόμενα με Σημεία Τομής

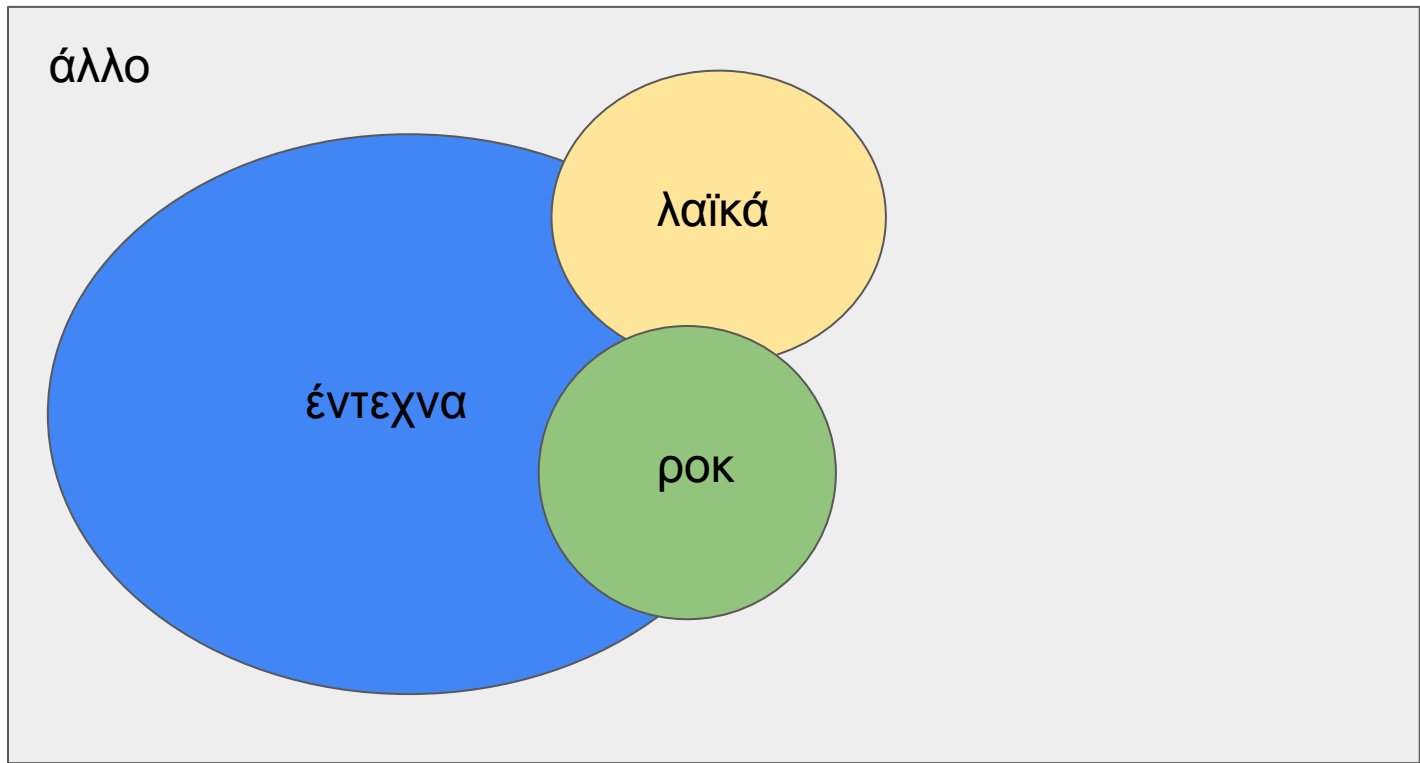
Ποιο από τα παρακάτω μέσα
έχεις χρησιμοποιήσει τουλάχιστον 1 φορά τον τελευταίο μήνα ;;;

άλλα μέσα



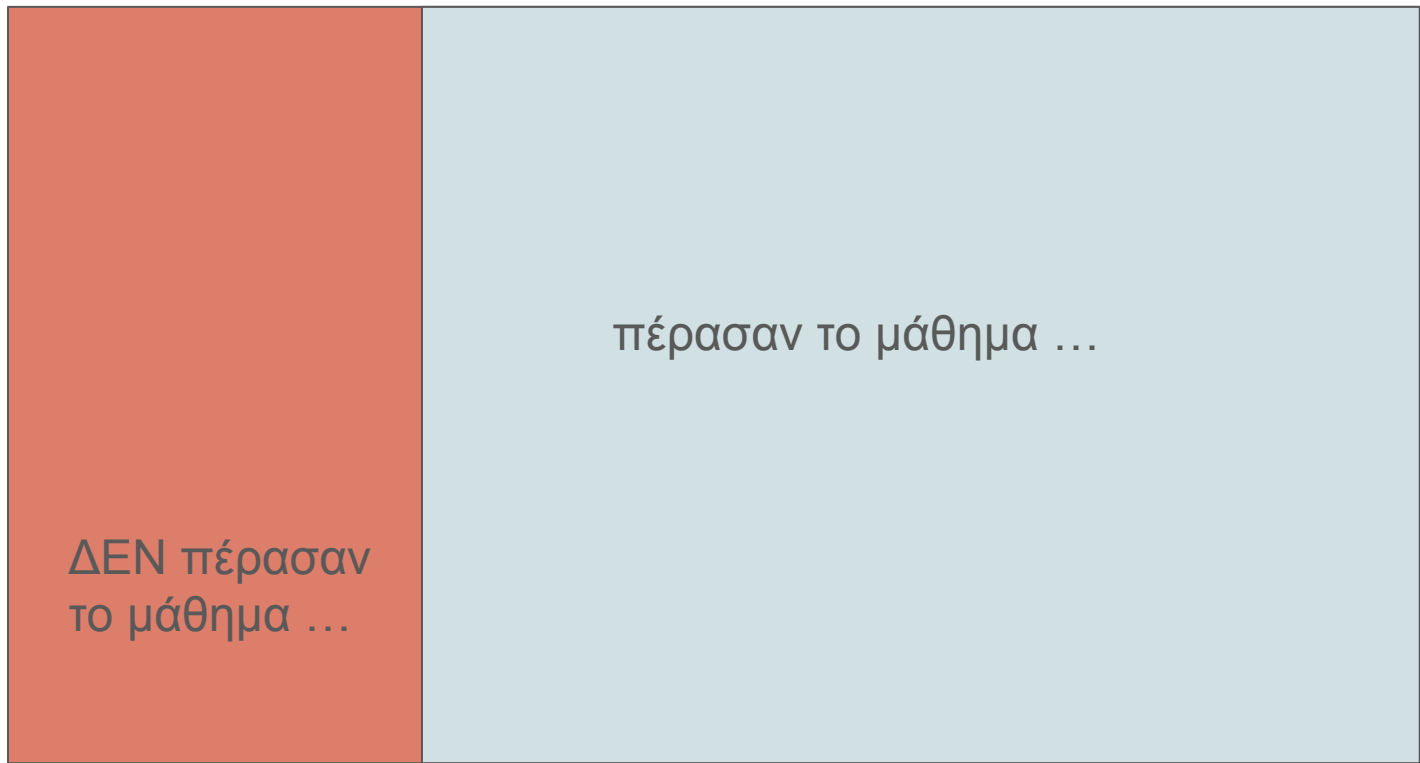
Ενδεχόμενα με Σημεία Τομής

Τι μουσική ακούς ;;;



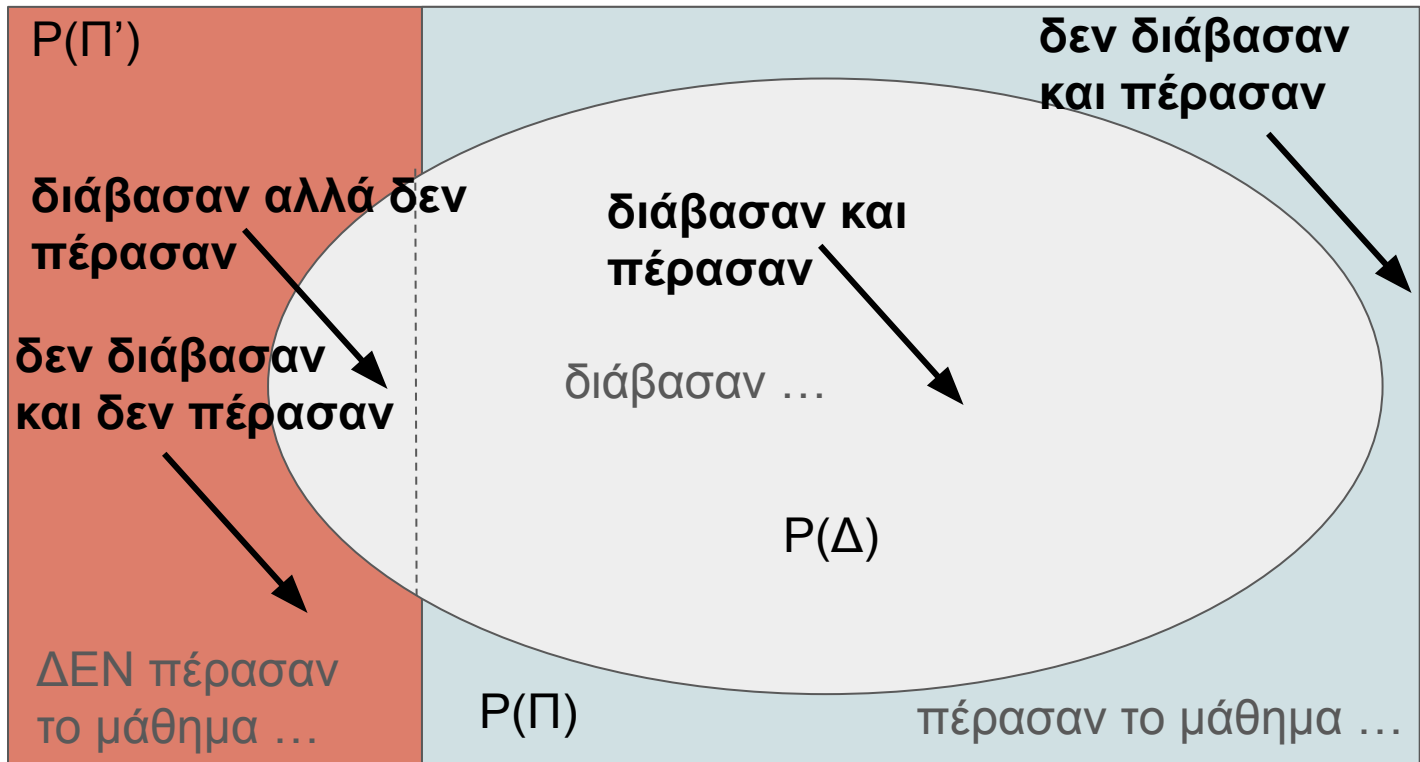
Ενδεχόμενα με Σημεία Τομής

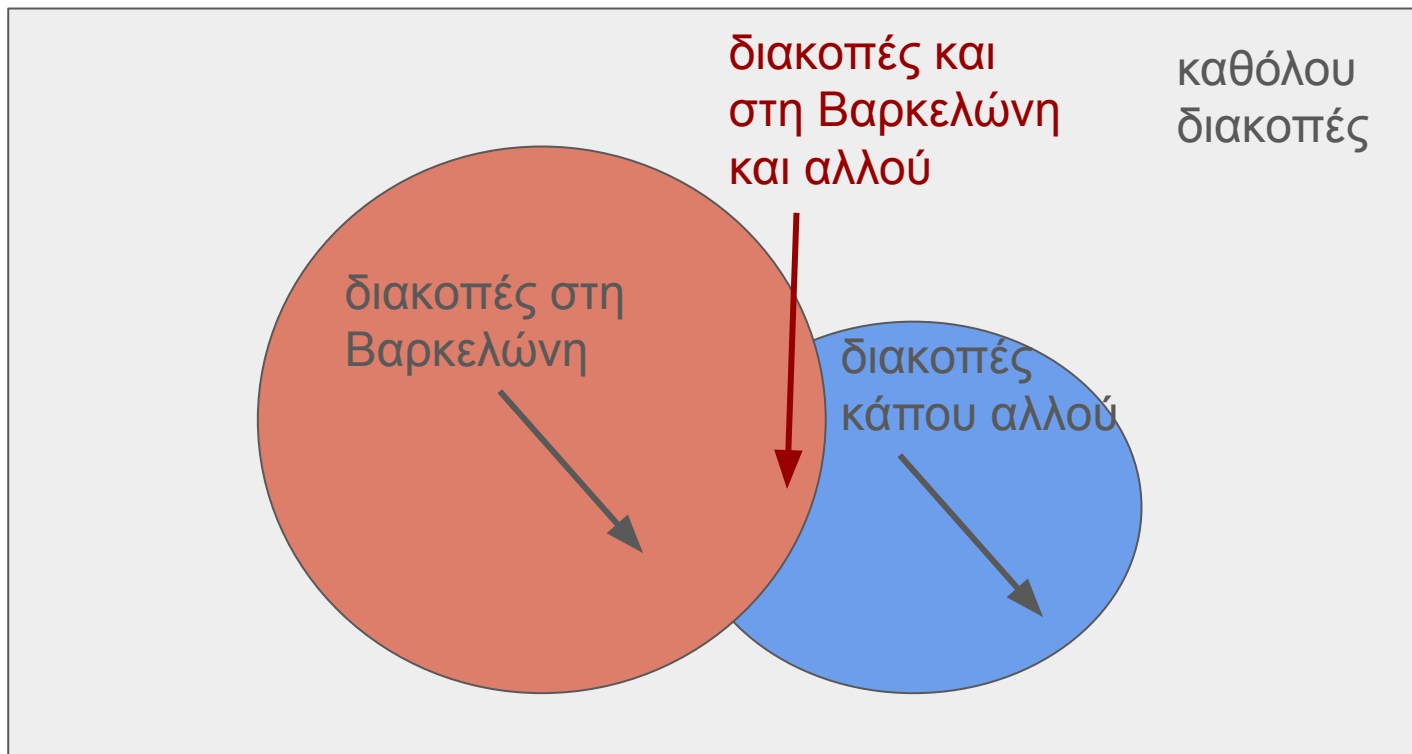
Δειγματικός Χώρος (Ω)



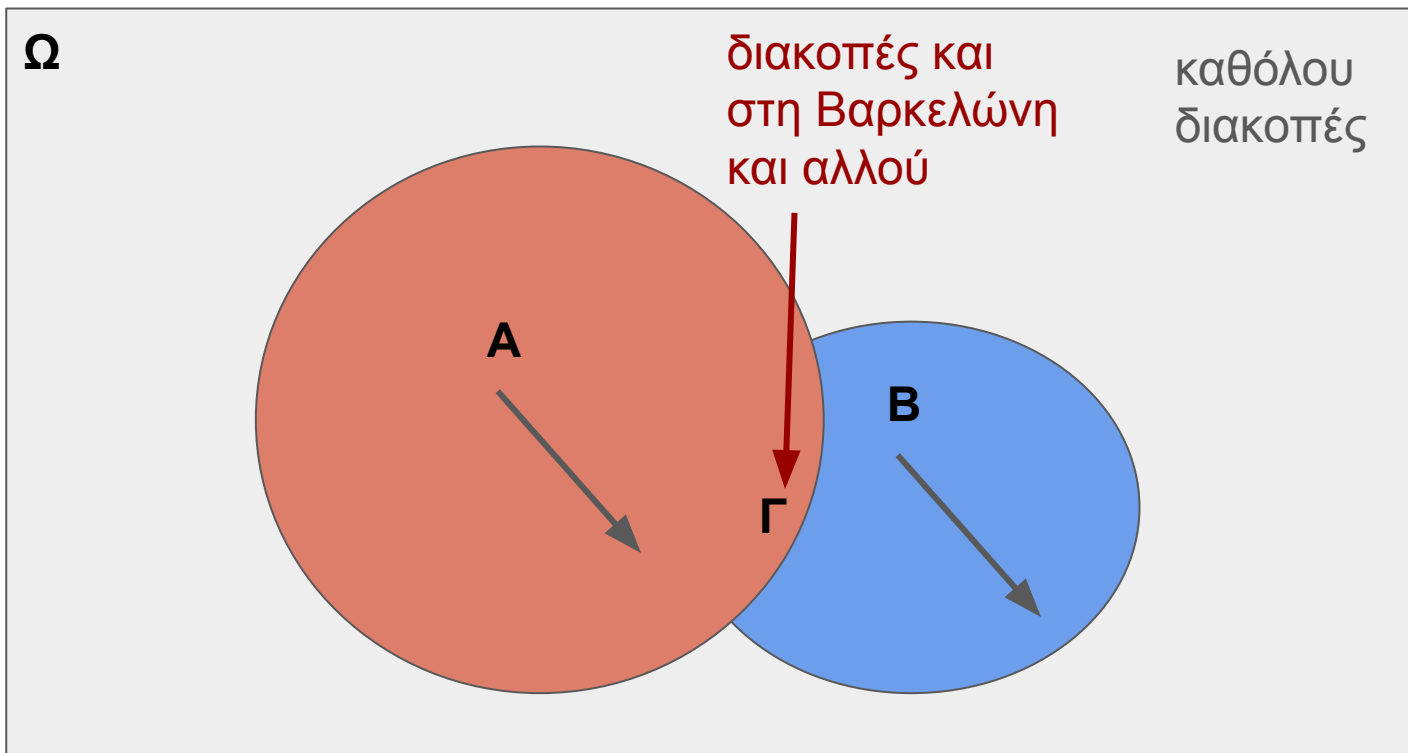
Ασυμβίβαστα (ξένα) Ενδεχόμενα

Δειγματικός Χώρος (Ω)

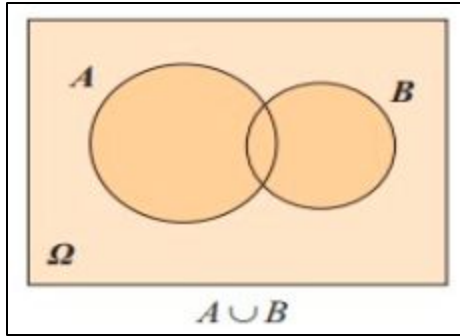




Ενδεχόμενα με Σημεία Τομής

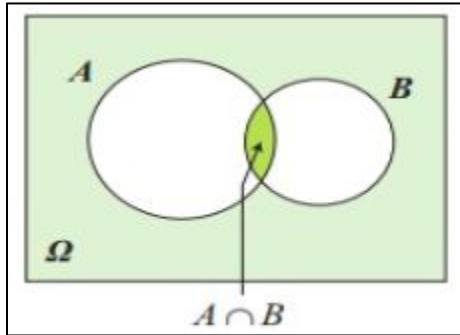


Ενδεχόμενα με Σημεία Τομής



Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται “ A ένωση B ” ή “ A ή B ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A , B .

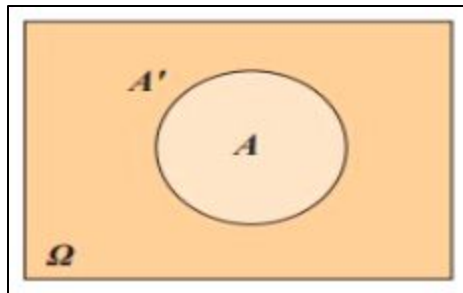
η πιθανότητα να πάω διακοπές (ή θα πάω Βαρκελώνη ή θα πάω κάπου αλλού ή θα πάω Βαρκελώνη αλλά και κάπου αλλού)



Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται “ A τομή B ” ή “ A και B ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B .

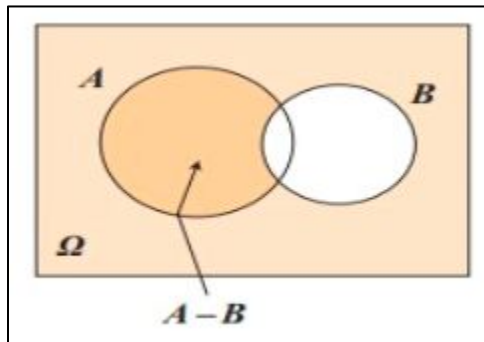
η πιθανότητα να πάω διακοπές και στη Βαρκελώνη αλλά και κάπου αλλού

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Το ενδεχόμενο A' , που διαβάζεται “όχι A ” ή “συμπληρωματικό του A ” και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το A . Το A' λέγεται και “αντίθετο του A ”.

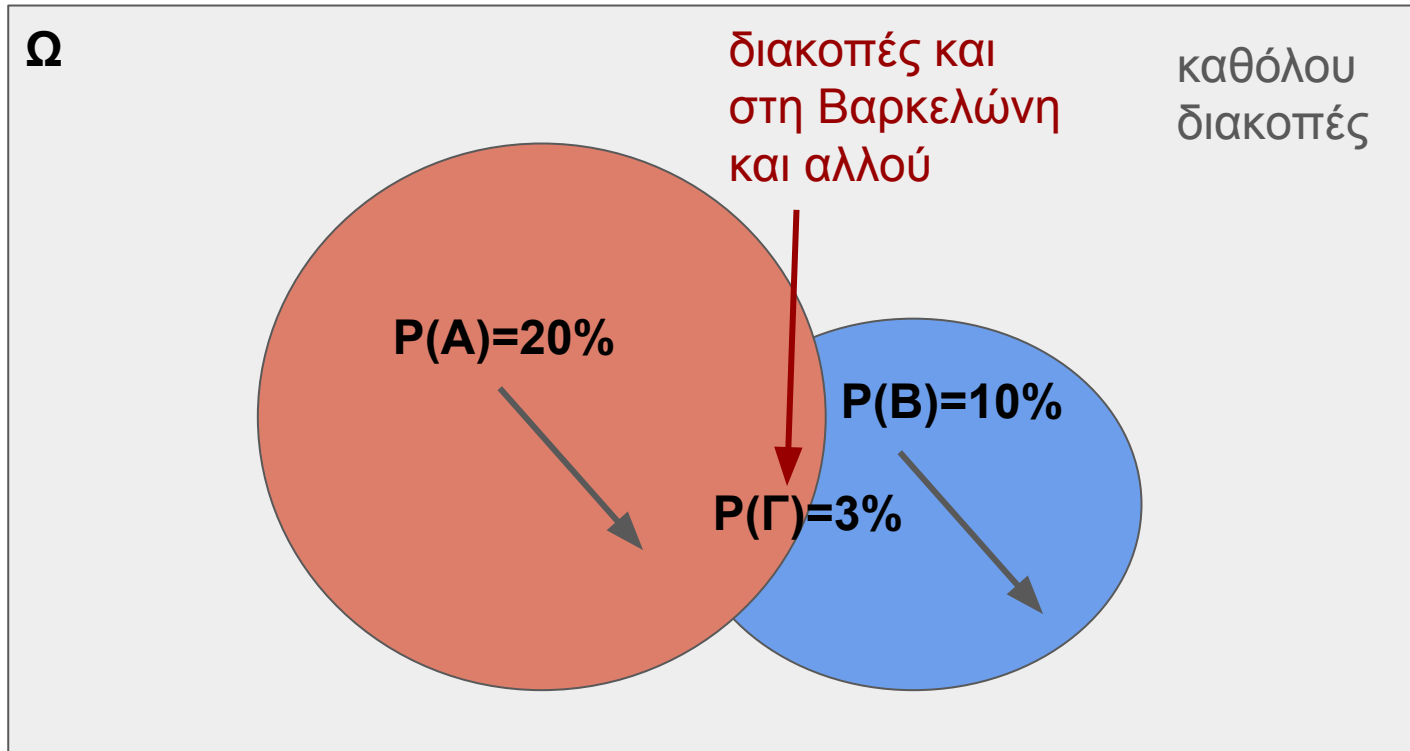
η πιθανότητα να ΜΗΝ πάω
διακοπές Βαρκελώνη (μπορεί να πάω κάπου
αλλού ή μπορεί να μην πάω καθόλου
διακοπές)



Το ενδεχόμενο $A - B$, που διαβάζεται “διαφορά του B από το A ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B . Είναι εύκολο να δούμε ότι $A - B = A \cap B'$.

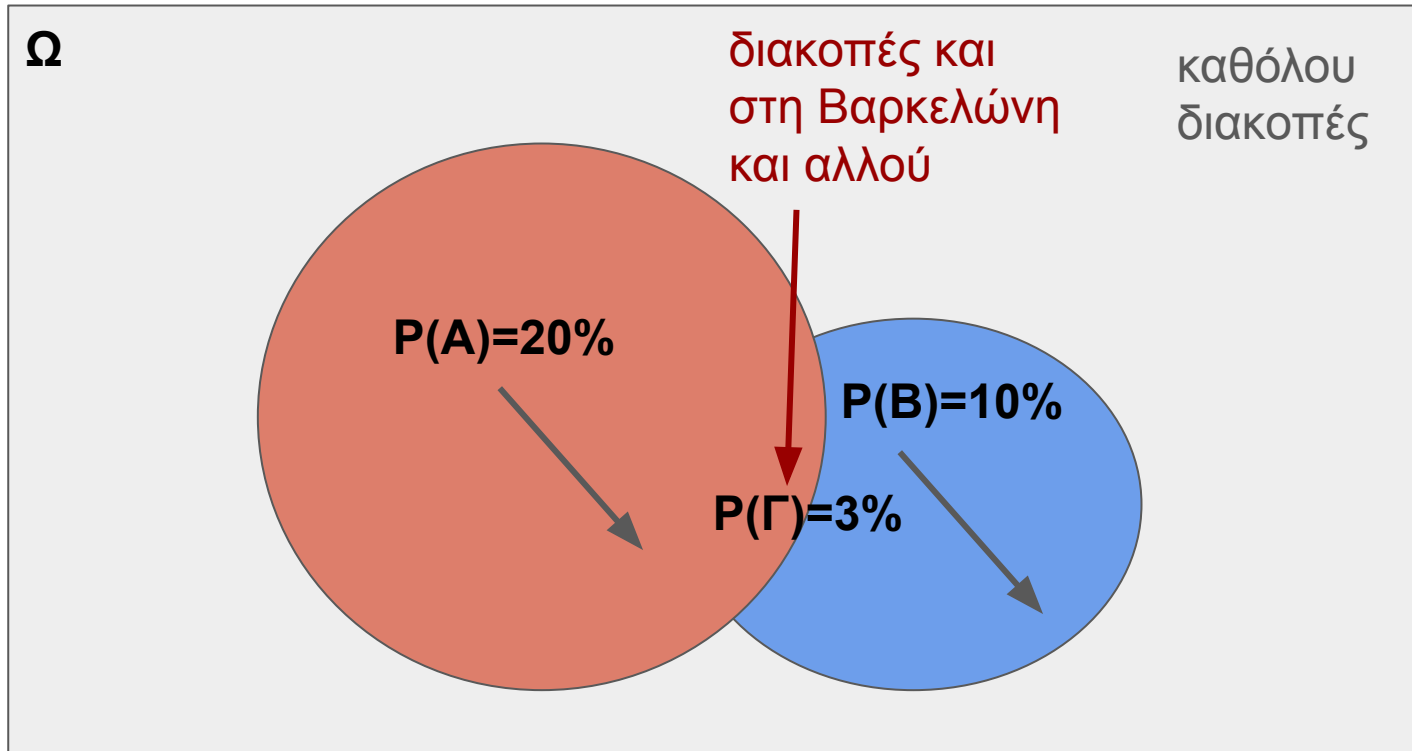
η πιθανότητα να πάω ΜΟΝΟ
στη Βαρκελώνη

Να βρεθεί η πιθανότητα να πάω σε τουλάχιστον 1 μέρος διακοπές



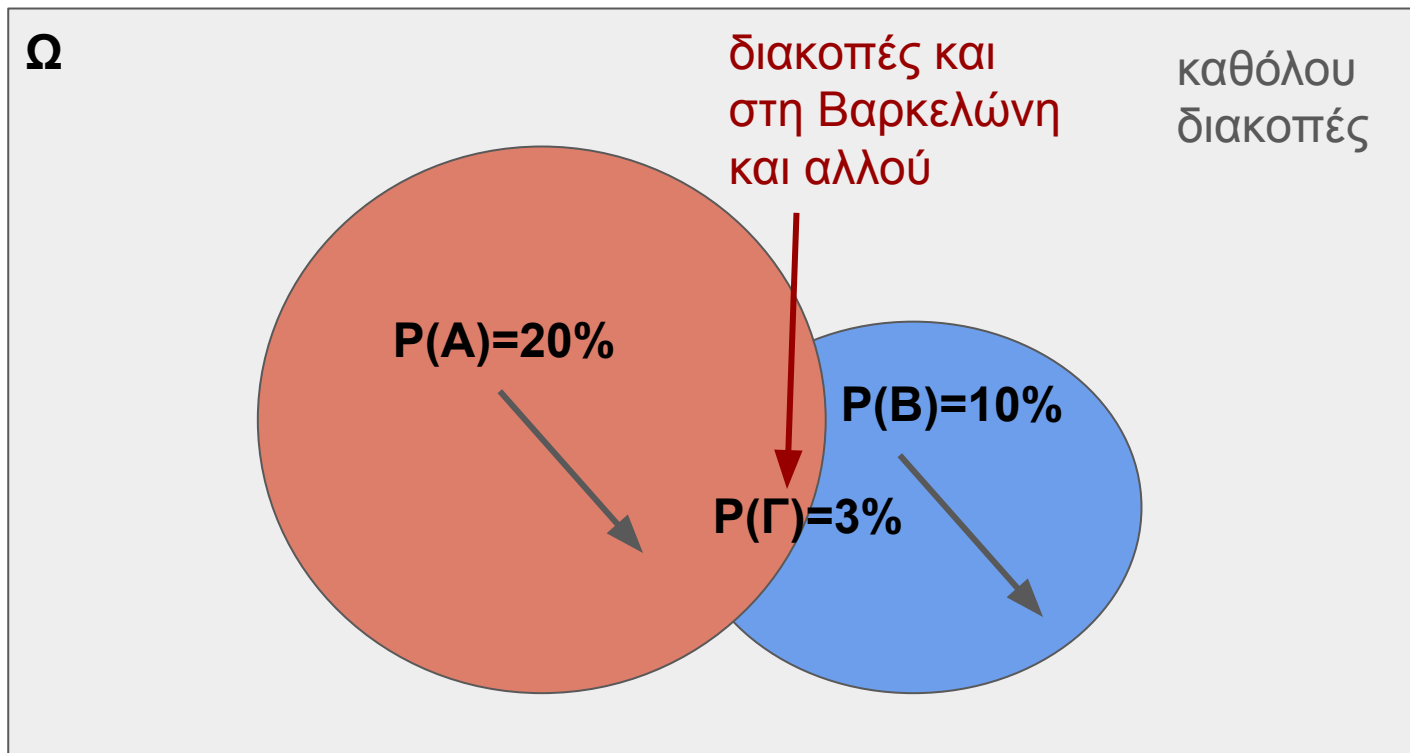
$$(0,20) + (0,10) - (0,03) = 0,27 \text{ (ή } 27\%)$$

Να βρεθεί η πιθανότητα να πάω διακοπές ΜΟΝΟ στη Βαρκελώνη



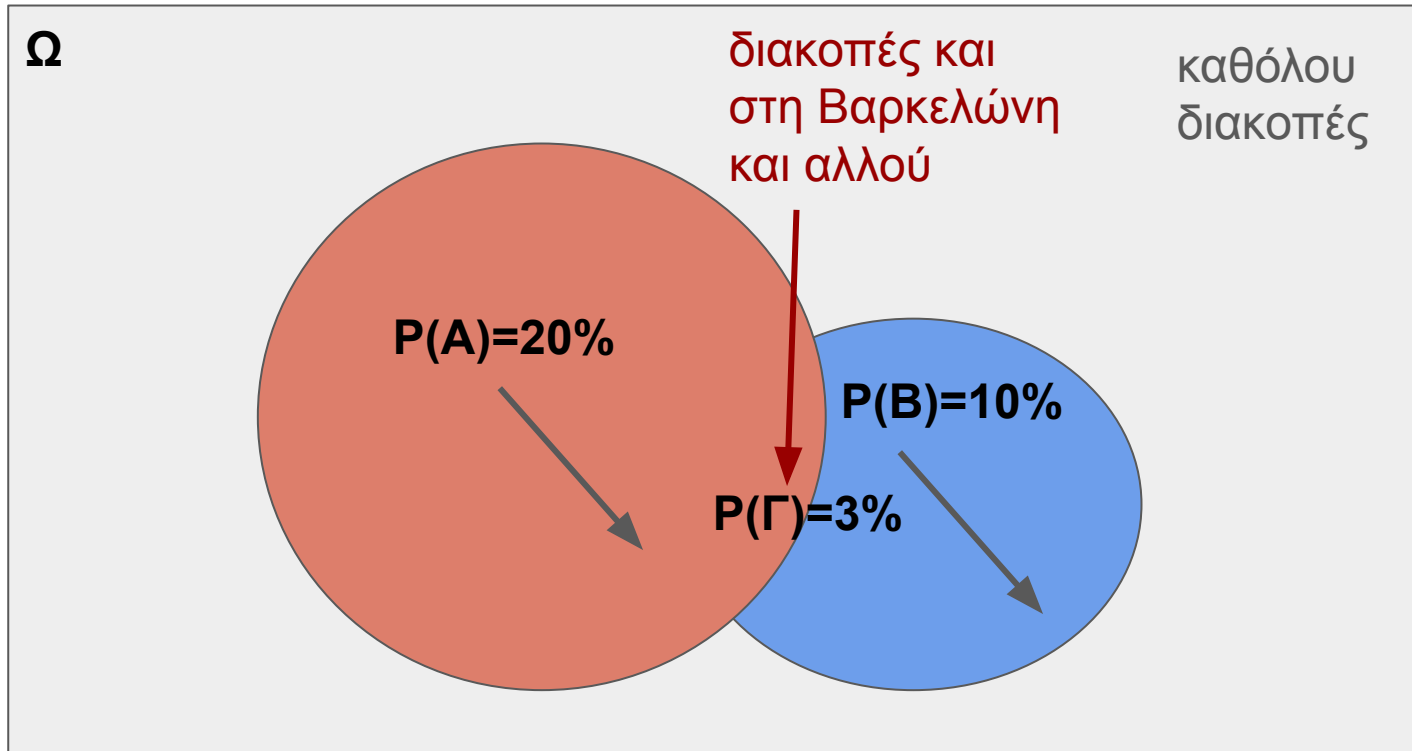
$$(0,20) - (0,03) = 0,17 \text{ (ή } 17\%)$$

Να βρεθεί η πιθανότητα να πάω κάπου διακοπές
(αλλά όχι στη Βαρκελώνη)



$$(0,10) - (0,03) = 0,07 \text{ (ή 7\%)}$$

Να βρεθεί η πιθανότητα να ΜΗΝ πάω καθόλου διακοπές



$$1 - (0,27) = 0,73 \text{ (ή } 73\%)$$

Έστω πως ρίχνω ένα κέρμα 3 φορές:

$\Omega = \{\text{ΚΚΚ}, \text{ΚΚΓ}, \text{ΚΓΚ}, \text{ΚΓΓ}, \text{ΓΚΚ}, \text{ΓΚΓ}, \text{ΓΓΚ}, \text{ΓΓΓ}\} \rightarrow$ δειγματικός χώρος

$P(\Omega)=1 \rightarrow$ βέβαιο ενδεχόμενο

$P(\text{ΚΚ})=0 \rightarrow$ δε μπορεί να συμβεί

$A=\{\text{ΚΚΚ}, \text{ΚΚΓ}, \text{ΚΓΚ}, \text{ΓΚΚ}\} \rightarrow$ τουλάχιστον 2 φορές κορώνα

$B=\{\text{ΚΓΓ}, \text{ΓΚΓ}, \text{ΓΓΚ}, \text{ΓΓΓ}\} \rightarrow$ τουλάχιστον 2 φορές γράμματα

$\Gamma=\{\text{ΚΚΚ}, \text{ΚΚΓ}, \text{ΚΓΓ}, \text{ΓΚΚ}, \text{ΓΓΚ}, \text{ΓΓΓ}\} \rightarrow$ τουλάχιστον 2 συνεχόμενες φορές κορώνα
ή γράμματα

$\Delta=\{\text{ΚΚΚ}, \text{ΚΚΓ}, \text{ΓΓΚ}, \text{ΓΓΓ}\} \rightarrow$ τουλάχιστον τις 2 πρώτες φορές κορώνα ή γράμματα

Έστω πως ρίχνω ένα κέρμα 3 φορές:

$A = \{\mathbf{ΚΚΚ}, \mathbf{ΚΚΓ}, \mathbf{ΚΓΚ}, \mathbf{ΓΚΚ}\} \rightarrow$ τουλάχιστον 2 φορές κορώνα $P(A)=0,5$

$B = \{\mathbf{ΚΓΓ}, \mathbf{ΓΚΓ}, \mathbf{ΓΓΚ}, \mathbf{ΓΓΓ}\} \rightarrow$ τουλάχιστον 2 φορές γράμματα $P(B)=0,5$

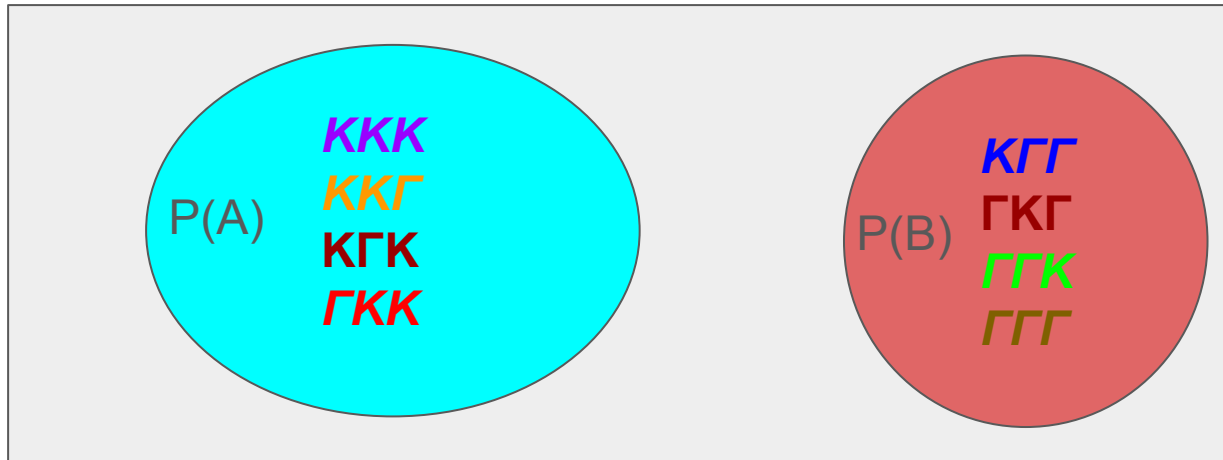
$\Gamma = \{\mathbf{ΚΚΚ}, \mathbf{ΚΚΓ}, \mathbf{ΚΓΓ}, \mathbf{ΓΚΚ}, \mathbf{ΓΓΚ}, \mathbf{ΓΓΓ}\} \rightarrow$ τουλάχιστον 2 συνεχόμενες φορές κορώνα
ή γράμματα
 $P(\Gamma)=0,75$

$\Delta = \{\mathbf{ΚΚΚ}, \mathbf{ΚΚΓ}, \mathbf{ΓΓΚ}, \mathbf{ΓΓΓ}\} \rightarrow$ τουλάχιστον τις 2 πρώτες φορές κορώνα ή γράμματα
 $P(\Delta)=0,5$

Έστω πως ρίχνω ένα κέρμα 3 φορές:

$A = \{\text{KKK}, \text{KKG}, \text{K GK}, \text{GKK}\}$ → τουλάχιστον 2 φορές κορώνα $P(A) = 0,5$

$B = \{\text{KGG}, \text{GKG}, \text{GGK}, \text{GGG}\}$ → τουλάχιστον 2 φορές γράμματα $P(B) = 0,5$



ξένα
ενδεχόμενα:
δεν έχουν
κανένα κοινό
σημείο (δεν
υπάρχει
τομή)

Έστω πως ρίχνω ένα κέρμα 3 φορές:

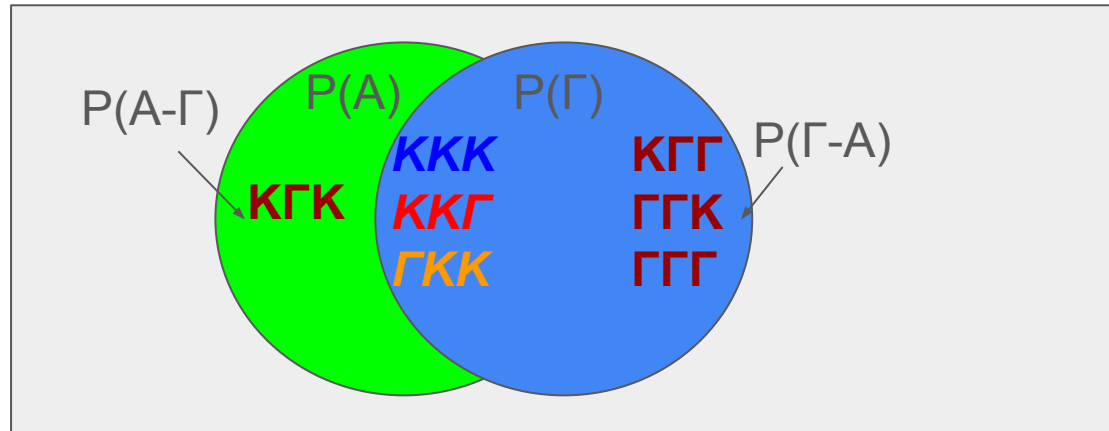
$A = \{\text{KKK}, \text{KK}\Gamma, \text{K}\Gamma\text{K}, \text{GKK}\} \rightarrow$ τουλάχιστον 2 φορές κορώνα $P(A) = 0,5$

$\Gamma = \{\text{KKK}, \text{KK}\Gamma, \text{K}\Gamma\Gamma, \text{GKK}, \text{G}\Gamma\text{K}, \text{G}\Gamma\Gamma\} \rightarrow$ τουλάχιστον 2 συνεχόμενες φορές κορώνα ή γράμματα
 $P(\Gamma) = 0,75$

$$P(A) = 0,5$$

$$\begin{aligned} P(A - \Gamma) &= \\ &= 0,5 - 0,375 \\ &= 0,125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\Gamma - A) &= \\ &= 0,375 \end{aligned}$$



ενδεχόμενα
με σημείο
τομής (έχουν
κοινά
στοιχεία)

Έστω πως ρίχνω ένα κέρμα 3 φορές:

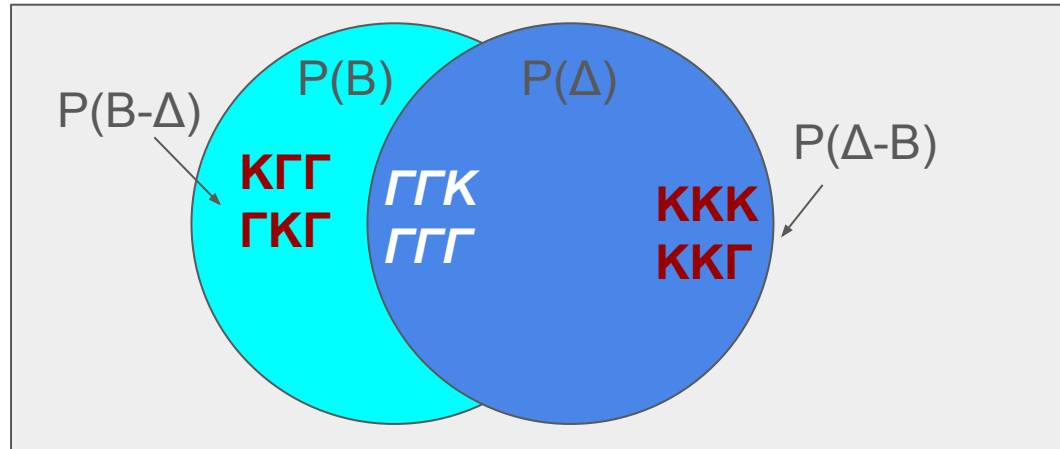
$B = \{\text{ΚΓΓ}, \text{ΓΚΓ}, \text{ΓΓΚ}, \text{ΓΓΓ}\}$ → τουλάχιστον 2 φορές γράμματα $P(B) = 0,5$

$\Delta = \{\text{ΚΚΚ}, \text{ΚΚΓ}, \text{ΓΓΚ}, \text{ΓΓΓ}\}$ → τουλάχιστον τις 2 πρώτες φορές κορώνα ή γράμματα $P(\Delta) = 0,5$

$$P(B - \Delta) = 0,5 - 0,25 = 0,25$$

$$P(\Delta - B) = 0,25$$

$$P(B, \Delta \text{ (ένωση)}) = 0,5 + 0,5 - 0,25 = 0,75$$



ενδεχόμενα
με σημείο
τομής (έχουν
κοινά
στοιχεία)

O					
1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
2 to 1	2 to 1	2 to 1	2 to 1	2 to 1	2 to 1
1st 12		2nd 12		3rd 12	
1 to 18	EVEN	RED	BLACK	ODD	19 to 36

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 34, 35, 36\}$

$\downarrow$
n=37

MAYPA: $M = \{2, 4, 6, \dots, 31, 35\}$

$\downarrow$
v=18

KOKKINA: $K = \{1, 3, 5, \dots, 36\}$

$\downarrow$
v=18

0		3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	2 to 1
00		2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	2 to 1
		1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	2 to 1
		1st 12			2nd 12			3rd 12						
		1 to 18	EVEN	RED	BLACK	ODD	19 to 36							

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Η πιθανότητα να έρθει **MAYPO**

$$\rightarrow 18/37 = 48,64\%$$

Η πιθανότητα να έρθει **νούμερο > 30**

$$\rightarrow 6/37 = 16,21\%$$

Η πιθανότητα να έρθει **νούμερο > 30**
με δεδομένο
πως το χρώμα είναι μαύρο

$$\rightarrow 8,10\%/48,64\% = 16,65\%$$

0		3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	2 to 1
		2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	2 to 1
		1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	2 to 1
		1st 12			2nd 12			3rd 12						
		1 to 18	EVEN	RED	BLACK	ODD	19 to 36							

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Η πιθανότητα να έρθει **MAYPO**

$$\rightarrow 18/37 = 48,64\%$$

Η πιθανότητα να έρθει **νούμερο > 30**

$$\rightarrow 6/37 = 16,21\%$$

Η πιθανότητα να έρθει **MAYPO**
με δεδομένο
πως το νούμερο > 30

$$\rightarrow 8,10\%/16,21\% = 49,96\%$$

0											
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35
1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34
1st 12				2nd 12				3rd 12			
1 to 18		EVEN		RED		BLACK		ODD		19 to 36	

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Η πιθανότητα να έρθει
MAYPO KAI >20

$$\rightarrow 8/37 = 21,62\%$$

Η πιθανότητα να έρθει **νούμερο από 10 έως και 30**

$$\rightarrow 19/37 = 51,35\%$$

Η πιθανότητα να έρθει
MAYPO KAI >20
με δεδομένο

πως το νούμερο θα είναι από 10 έως και 30

$$\rightarrow 27,02\%/51,35\% = 52,63\%$$