Πρώτη έκδοση, Φεβρουάριος 2021

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Θεωρία Παιγνίων

1. Στοιχεία Θεωρίας Παιγνίων

1.1 Γιατί παίγνια;

Τα μικροοικονομικά εργαλεία που έχουμε δει ως τώρα μας έχουν επιτρέψει να αναλύσουμε αρκετά ενδιαφέρουσες οικονομικές συμπεριφορές. Είδαμε πώς επιλέγει ένας καταναλωτής σε περιβάλλον βεβαιότητας και πώς υπολογίζουμε τη ζήτησή του καθώς και τη ζήτηση της οικονομίας, πώς δρα ένας παραγωγός σε συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού ή μονοπωλίου καθώς και υπό ποιες συνθήκες οι αγορές κατά κάποιο τρόπο «συντονίζονται» ώστε να ισορροπήσουν, καθώς και σε τί συνίστανται και πώς εκφράζονται τέτοιου είδους ισορροπίες.

Σε όλα τα παραπάνω υποδείγματα έχουμε κάνει αρκετές ρητές (και ορισμένες φορές άρρητες) υποθέσεις. Έχουμε για παράδειγμα υποθέσει ότι όλοι οι δρώντες (με μοναδική εξαίρεση την περίπτωση του μονοπωλίου) είναι μικροί. Αυτό σημαίνει ότι η επιλογή καθενός τους μεμονομένα δεν επηρεάζει τις τιμές της αγοράς, κάτι που οι ίδιοι γνωρίζουν καλά και αναλόγως προσαρμόζουν τη δράση τους.

Ας πούμε στην περίπτωση του καταναλωτή, είδαμε ότι αυτός μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά του, θεωρώντας τις τιμές και το εισόδημά του δεδομένα. Λύνει δηλαδή ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης του τύπου:

$$
\begin{array}{rl}
\max\limits_{x} & U(x) \\
\text{υ.τ.π.} & px \leq I
\end{array}
$$

όπου x είναι ένα διάνυσμα τάξης n των ζητήσεών του για τα n αγαθά, p ένα n-διάστατο επίσης διάνυσμα των τιμών των αγαθών και I το εισόδημά του. Είναι σαφές ότι η δράση του ενός καταναλωτή δεν επηρεάζει τη χρησιμότητα του άλλου παρά μόνο κατά το ποσοστό που η δράση όλων των καταναλωτών μαζί επηρεάζει τις τιμές που με τη σειρά τους επηρεάζουν τη χρησιμότητα όλων των καταναλωτών.

Υπάρχουν όμως πολλές καταστάσεις που μπορούμε να σκεφτούμε ή να παρατηρήσουμε κατά τις οποίες η παραπάνω υπόθεση δεν είναι ικανοποιητική. Σκεφτείτε τα παρακάτω παραδείγματα:

Παράδειγμα 1.1 Το τρέξιμο του Γαστρονόμου.

Εδώ και κάποια χρόνια η Καθημερινή της Κυριακής άπαξ μηνιαίως διανέμει το περιοδικό «Γαστρονόμος». Η διανομή αυτή συνέπεσε με μια κατακόρυφη εκτίναξη στα ύψη της γαστρονομικής δεινότητας του ελληνικού λαού (σκεφτείτε ό,τι συζητήσαμε για αλλαγή στα fundamentals, του καταναλωτή, στην συγκεκριμένη περίπτωση στις προτιμήσεις). Αποτέλεσμα είναι οι αναγνώστες του Κυριακάτικου φύλλου της Καθημερινής να μη μπορούν να βρουν στο περίπτερο της γειτονιάς τους το Κυριακάτικο φύλλο μετά τις 11:30 π.χ. της Κυριακής.

Ο παραδοσιακός (και μη) αναγνώστης που έχει αποφασίσει να καταναλώσει την Καθημερινή κάθε Κυριακή, είναι αναγκασμένος να λάβει υπ' όψιν όχι μόνο τις προτιμήσεις του, αλλά και τις προτιμήσεις του γείτονά του, και κυρίως τη Δράση του γείτονα, καθότι αν και οι δέκα ενδιαφερόμενοι γείτονες ξυπνήσουν νωρίς και πάνε στο περίπτερο, ο παραδοσιακός αναγνώστης δε θα βρει την εφημερίδα του.

Παράδειγμα 1.2 Ο πόλεμος των ηχείων.

Ο γείτονας Α αγαπάει τον Bach. Ο γείτονας Β είναι λάτρης του Καζαντζίδη. Ο γείτονας Α ακούει μουσική σε συνθήκες ηρεμίας σε χαμηλή ένταση. Ο γείτονας Β θέλει να τρίζουν τα subwoofer. Όταν ο Β παίζει τη μουσική του, ο Α αναγκάζεται να βάζει επίσης την τέχνη της φούγκας στη διαπασών για να αποφύγει να ακούει την τέχνη της φούγκας με μπουζούκι. Αυτό με τη σειρά του αναγκάζει τον Β να δοκιμάσει κι άλλο τις επιδόσεις των subwoofers του με αποτέλεσμα το πόσο ένταση καταναλώνει καθένας τους να εξαρτάται από τη δράση και του άλλου.

Παράδειγμα 1.3 Η τιμολόγηση του γάλακτος.

Στην αγορά της πόλης Ε, δραστηριοποιούνται κυρίως δύο μεγάλες εταιρίες (παίκτες) στην αγορά γαλακτοκομικών. Η θεωρία παραγωγού μας λέει ότι ο παραγωγός είναι μικρός και άρα συμπεριφέρεται γνωρίζοντας ότι η συμπεριφορά του δε θα επηρεάσει τις τιμές του γάλακτος. Εξ' ου και τιμολογεί στο οριακό του κόστος. Δηλαδή λύνει ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης του τύπου:

$$\max_{y} \quad \pi(y) = py - c(y)$$

όπου p η τιμή του προϊόντος και $c(y)$ η συνάρτηση κόστους. Είναι λογικό να υποθέσουμε για τις δύο εταιρίες που δραστηριοποιούνται στην πόλη Ε ότι συμπεριφέρονται ως «μικροί» παίκτες, δηλαδή ότι δεν επηρεάζουν τις τιμές, ή τουλάχιστον έτσι θεωρούν αυτές και μεγιστοποιούν τα κέρδη τους σα να μην τις επηρεάζουν;

Παράδειγμα 1.4 Ειλικρινής ή στρατηγική ψήφος.

Συχνά κατά την περίοδο των εκλογών, ακούμε από τους αναλυτές ή τους πολιτικούς για το δίλημμα της χαμένης ψήφου. Εγώ που είμαι οπαδός του κόμματος «Τρεις κι ο κούκος», κόμμα που δεν προβλέπεται από κανένα να λάβει πάνω από 0.0000001% σε ψήφους, και από τα δύο μεγάλα κόμματα των Συντηρητικών και των Ριζοσπαστικών προτιμώ ας πούμε τους Συντηρητικούς, αξίζει να ψηφίσω τους «τρεις και τον κούκο»; Ο νόμος του Duverger (ψάξτε το) μας λέει ότι όχι. Διότι η πιθανότητα να επηρεάσω το αποτέλεσμα και να γύρω την πλάστιγγα προς την προτίμησή μου με ψήφο στο κόμμα «τρεις κι ο κούκος» (απέναντι σε οποιοδήποτε από τα δύο άλλα κόμματα) είναι πάρα πολύ μικρή (μικρότερη) σε σχέση με την πιθανότητα να είμαι ο αποφασιστικός ψηφοφόρος μεταξύ των δύο μεγάλων κομάτων.

Οι θεωρίες της ειλικρινούς ψηφοφορίας (sincere voting) αναλύουν τη συμπεριφορά των ψηφοφόρων υπό την υπόθεση ότι οι ψηφοφόροι ψηφίζουν ειλικρινά το κόμμα που προτιμούν (στην περίπτωσή μου τους «τρεις και τον κούκο»). Οι θεωρίες στρατηγικής ψήφου (strategic voting) λαμβάνουν υπόψιν την πιθανή εκλέπτυνση των ψηφοφόρων και αναλύουν τη συμπεριφορά τους εξετάζοντας πώς θα ψήφιζαν οι ψηφοφόροι εάν γνωρίζουν ότι το αποτέλεσμα που τους ενδιαφέρει εξαρτάται από το συνδυασμό δράεων όλων των ψηφοφόρων και ανάλογα προσάρμοζαν τη δράση τους. Π.χ. αν σε μία επιτροπή 5 ατόμων γνωρίζω ότι με πολύ μεγάλη πιθανότητα δύο θα ψηφίσουν την πρόταση Γ και δύο την πρόταση Δ, εγώ θα πρέπει να αναρωτηθώ ποια προτιμάω μεταξύ των Γ και Δ, ακόμα κι αν η πρώτη μου επιλογή θα ήταν η πρόταση Ζ. Αυτό γιατί λαμβάνω υπόψιν τη δράση των άλλων, ξέρω ότι η δράση τους επηρεάζει την ευημερία μου και προσαρμόζω τη δράση μου ανάλογα.

Τί κοινό είχαν τα παραπάνω παραδείγματα; Σε όλες τις περιπτώσεις υπήρχε στρατηγική αλληλεπίδραση των δράσεών μας. Το τι έκανε ο ένας επηρέαζε τη χρησιμότητα του άλλου και τούμπαλιν και μάλιστα και οι δύο το λάμβαναν υπόψιν αυτό όταν αποφάσιζαν για τη δράση τους. Για την ανάλυση τέτοιων καταστάσεων χρειαζόμαστε ένα (σχετικά) καινούριο εργαλείο που να λαμβάνει υπόψιν τις *Στρατηγικές αλληλεπιδράσεις* μεταξύ των δρώντων. Αυτό το εργαλείο είναι η ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ.

1.2 Τί είναι παίγνιο;

Ορισμός 1.1 Παίνγιο είναι μια αυστηρή (μαθηματική) αναπαράσταση καταστάσεων κατά τις οποίες ένα ή περισσότερα άτομα δρουν σε συνθήκες **στρατηγικής αλληλεπίδρασης**.

Παραδείγματα: Σκάκι, τάβλι, τρίλιζα και πολλά άλλα.

Για να περιγράψουμε ένα παίγνιο χρειαζόμαστε τα εξής:

1. Τους συμμετέχοντες, οι οποίοι ονομάζονται παίκτες.
2. Τους κανόνες. Ποιος κινείται και πότε. Τί κινήσεις μπορεί να κάνει. Τί γνώση έχει όταν κινείται, τί γνώση έχει μετά την κίνηση κλπ.
3. Τις πιθανές εκβάσεις του παιγνίου. Πότε τελειώνει, με ποιους νικητές (αν υπάρχουν νικητές) κλπ.
4. Τις αποδόσεις (ή πληρωμές). Για κάθε πιθανή έκβαση (π.χ. νίκη-ήττα) ποια είναι η χρησιμότητα του κάθε παίκτη.

Παράδειγμα 1.5 Σκάκι:

1. Παίκτες: Άσπρος (Α)-Μαύρος (Μ).
2. Κανόνες: Άσπρος κινείται πρώτος. Πιόνια κινούνται έτσι, ίπποι αλλιώς..., δε μπορείς να κινηθείς αν κάποιος φράζει το δρόμο σου, αν σου κάνου check πρέπει να προφυλάξεις το Βασιλιά, γνωρίζεις πάντοτε πώς είναι η σκακιέρα και θυμάσαι όλες τις κινήσεις που έχουν γίνει κ.ο.κ.
3. (α΄) Νικάει ο Α αν κάνει ματ ή αν ο Μ παραιτηθεί.
   (β΄) Νικάει ο Μ αν κάνει ματ ή αν ο Α παραιτηθεί.
   (γ΄) Ισοπαλία αν παραιτηθούν και οι δύο ταυτόχρονα, γίνει η ίδια κίνηση τρεις φορές, απομείνουν με δύο Βασιλιάδες κλπ.
4. Πληρωμές: Πόσο αξίζει για τον καθένα η κάθε έκβαση. Π.χ. αν έχουν βάλει στοίχημα €20, τοτε $U(N)=20, U(I)=0, U(H)=-20$.

1.3 Κατηγορίες παιγνίων

1.3.1 Συνεργατικά και μη συνεργατικά παίγνια

Τα παίγνια ανάλογα με μια σειρά κριτηρίων χωρίζονται σε διάφορες κατηγορίες. Ένας πρώτος μεγάλος διαχωρισμός σχετίζεται με το αν υπάρχει δυνατοτητα για δεσμευτική συμφωνία μεταξύ των παικτών για τον τρόπο που θα παίξουν στο παίγνιο. Με βάση αυτό το κριτήριο, τα παίγνια χωρίζονται σε συνεργατικά παίγνια (όταν υπάρχει) και σε μή συνεργατικά παίγνια (όταν δεν υπάρχει).

Παραδείγματος χάριν, ας σκεφτούμε τους παραγωγούς σε μια αγορά να συνεννοούνται μεταξύ τους για να συντονίσουν τις τιμές τους ψηλότερα από το τέλεια ανταγωνιστικό επίπεδο. Υπάρχει τρόπος να συνάψουν μεταξύ τους δεσμευτική συμφωνία που θα τους διασφαλίζει ότι κανένας τους δεν θα μειώσει λίγο την τιμή του για να μεγαλώσε το μερίδιο της αγοράς απέναντι στους υπολοίπους; Η απάντηση είναι αρνητική γιατί στις περισσότερες χώρες μια τέτοια συμφωνία δεν θα μπορούσε να επιβληθεί δικαστικά, αφού η σύμπραξη μεταξύ παραγωγών είναι συχνά παράνομη. Υπό αυτό το πρίσμα ένα παίγνιο συνεννόησης μεταξύ παραγωγών είναι αναγκαστικά μη συνεργατικό. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με μη συνεργατικά παίγνια.

1.3.2 Παίγνια και χρόνος

Ένα «χρονικό» κριτήριο σχετίζεται με το αν οι παίκτες κινούνται ταυτόχρονα ή σε σειρά, και χωρίζει τα παίγνια σε ταυτόχρονα ή στατικά και σε δυναμικά. Με βάση αυτό το κριτήριο θα κατατάσσαμε το Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί στα στατικά παίγνια, ενώ το σκάκι στα δυναμικά.

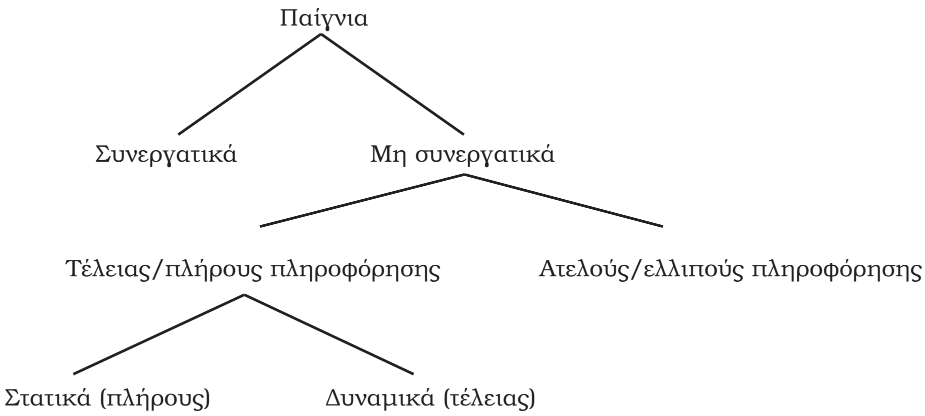
1.3.3 Παίγνια και πληροφόρηση

Τα παίγνια μπορεί επίσης να χωριστούν ανάλογα με την πληροφόρηση που έχουν οι παίκτες σε (αν ξέρουν δηλαδή όλες τις κινήσεις που έχουν προηγηθεί) χωρίζονται σε παίγνια τέλειας και ατελούς πληροφόρησης, ή σε παίγνια πλήρους και ελλιπούς πληροφόρησης. Η διάκριση είναι λίγο λεπτή και πολλές φορές η ορολογία δεν ακολουθείται από όλους τους συγγραφείς, αλλά καλό είναι να την επισημάνουμε. Το αν ένα παίγνιο είναι τέλειας ή ατελούς πληροφόρησης έχει να κάνει με το αν ο παίκτης που κινείται γνωρίζει την ακριβή θέση από την οποία κινείται. Σε ένα παίγνιο τέλειας πληροφόρησης όλοι οι παίκτες όταν και εάν κληθούν να κινηθούν, γνωρίζουν ακριβώς όλη την ιστορία του παιγνίου, ποιες κινήσεις έχουν γίνει και πού τους έχουν φέρει. Αν για παράδειγμα επιλέξετε ποσότητα παραγωγής και εγώ που κινούμαι μετά από εσάς μπορώ να παρατηρήσω την κίνησή σας, παίζουμε ένα παίγνιο τέλειας πληροφόρησης. Αν όμως δεν μπορώ να γνωρίζω πόση ποσότητα έχετε βγάλει στην αγορά όταν καλούμαι να παίξω, τότε έχουμε ένα παίγνιο ατελούς πληροφόρησης.

Ανάλογα με το αν γνωρίζουν τα χαρακτηριστικά ή τις αμοιβές (πληρωμές) των άλλων παικτών, ή τους κανόνες του παιχνιδιού, τα χωρίζουμε σε παίγνια πλήρους (όταν τα γνωρίζουν) και ελλιπούς (όταν όχι) πληροφόρησης. Έτσι, για παράδειγμα, δύο δυοπωλητές που γνωρίζουν τόσο τις συνθήκες αγοράς (π.χ. ζήτηση) όσο και το κόστος (το δικό τους και του ανταγωνιστή τους) και άρα γνωρίζουν πλήρως τις αποδόσεις όλων των παικτών σε κάθε έκβαση του παιγνίου, παίζουν ένα παίγνιο πλήρους πληροφόρησης. Αν όμως κάποιος από τους δύο δεν γνωρίζει το κόστος του ανταγωνιστή του (και άρα δεν γνωρίζει τα κέρδη του ανταγωνιστή του σε κάθε έκβαση), τότε έχουμε ένα παίγνιο ελλιπούς πληροφόρησης.

Για τις ανάγκες του δικού μας μαθήματος θα ασχοληθούμε μόνο με στατικά (ταυτόχρονα) παίγνια πλήρους πληροφόρησης και δυναμικά παίγνια τέλειας πληροφόρησης. Εδώ θα βοηθούσε στην κατανόηση της διάκρισης να αναρωτηθούμε πώς κατατάσσονται όλα τα δυναμικά παίγνια με βάση το κριτήριο της τέλειας/ατελούς πληροφόρησης.

Το σχήμα 1.1 απεικονίζει τις διαφορετικές κατηγορίες παιγνίων. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με τις κατηγορίες που είναι μέσα στο πλαίσιο.



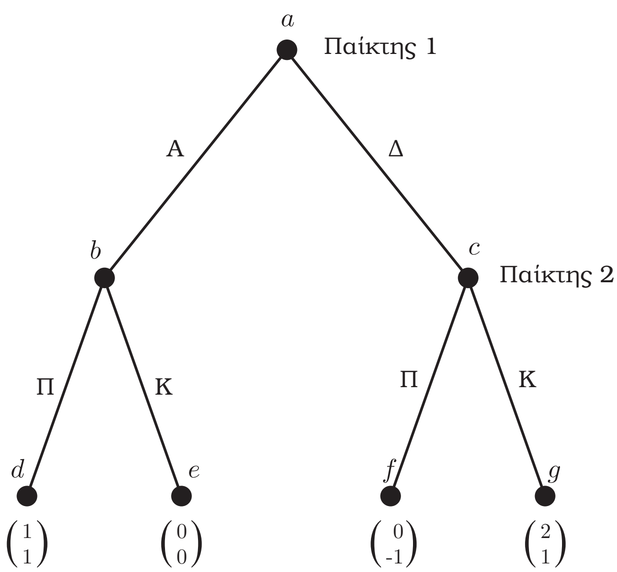
Σχήμα 1.1: Κατηγορίες παιγνίων.

1.4 Αναπαράσταση παιγνίων

Δύο βασικές μορφές αναπαράστασης παιγνίων χρησιμοποιούμε στη βασική θεωρία παιγνίων. Την εκτατικής μορφής αναπαράσταση ενός παιγνίου (extensive form representation) και την κανονικής ή στρατηγικής μορφής αναπαράσταση ενός παιγνίου (normal form representation).

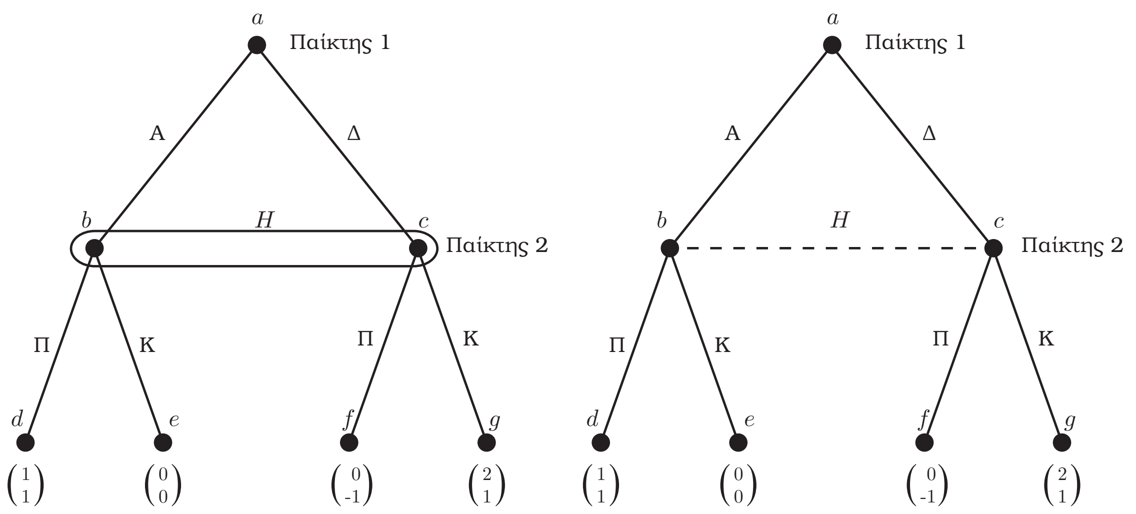
1.4.1 Εκτεταμένης μορφής αναπαράσταση παιγνίου

Η εκτεταμένη μορφή είναι μια πλήρης αναπαράσταση του παιγνίου που μπορεί να μας δώσει όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε για το παίγνιο: Παίκτες, κινήσεις, σειρά κινήσεων, πληροφόρηση κλπ. Χρησιμοποιείται κυρίως στην ανάλυση δυναμικών παιγνίων διότι μπορεί να απεικονίσει τη σειρά κινήσεων, κάτι που δε γίνεται με τη στρατηγική απεικόνιση.



Σχήμα 1.2: Εκτατική μορφή αναπαράστασης παιγνίου τέλειας πληροφόρησης.

Για να δώσουμε ένα παράδειγμα εκτεταμένης μορφής παιγνίου, έστω ότι ο παίκτης 1 επιλέγει ανάμεσα σε αριστερά και δεξιά (Α - Δ). Στη συνέχεια, ο παίκτης 2, αφού παρατη-



(α΄) Το σύνολο πληροφόρησης κυκλώνει τους κόμβους που περιλαμβάνει

(β΄) Το σύνολο πληροφόρησης ενώνει με διακεκομμένη γραμμή τους κόμβους που περιλαμβάνει

Σχήμα 1.3: Διαφορετικοί συμβολισμοί συνόλων πληροφόρησης σε παίγνια ατελούς πληροφόρησης

ρήσει την επιλογή του παίκτη 1 επιλέγει ανάμεσα σε πάνω και κάτω (Π - Κ). Οι εκβάσεις του παιγνίου είναι τέσσερις: ΑΠ, ΑΚ, ΔΠ, ΔΚ. Αν το διάνυσμα των αποδόσεων (πληρωμών) δίνει πρώτα την απόδοση του παίκτη 1 και ως δεύτερη την απόδοση του παίκτη 2, τότε οι πληρωμές δίνονται από $(1,1),(0,0),(0,-1),(2,3)$ για ΑΠ, ΑΚ, ΔΠ, ΔΚ αντίστοιχα. Η εκτατική απεικόνιση του παιγνίου απεικονίζεται στο σχήμα 1.2.

Παρατηρήστε ότι το παίγνιο εκτεταμένης μορφής αποτελείται από μια σειρά στοιχείων. Οι κόμβοι είναι τα σημεία στα οποία καλείται να παίξει κάθε παίκτης. Υπάρχει ένας αρχικός κόμβος (a), οι ενδιάμεσοι κόμβοι (b,c) και οι τελικοί (d,e,f,g). Σε κάθε κόμβο εκτός από τους τελικούς κινείται ένας μόνο παίκτης και έχει μια σειρά κινήσεων (π. χ. ο Π2 στον κόμβο b μπορεί να επιλέξει είτε Π, είτε Κ. Στους τελικούς κόμβους (που ο κάθε ένας αντιστοιχεί σε μία έκβαση), ορίζονται οι αποδόσεις μέσα σε παρενθέσεις.

Το παίγνιο που απεικονίζεται στο σχήμα είναι δυναμικό παίγνιο τέλειας πληροφόρησης. αυτό σημαίνει ότι ο παίκτης που κινείται κάθε φορά, γνωρίζει πλήρως σε ποιον κόμβο κινείται. Σε κάποια παίγνια όμως ενδέχεται ο παίκτης που κινείται να μην γνωρίζει σε ποιον κόμβο τον έχει φέρει η ιστορία του παιγνίου. Αυτά όπως είπαμε είναι παίγνια ατελούς πληροφόρησης. Σε αυτά χρειαζόμαστε ένα επιπρόσθετο συστατικό: τα σύνολα πληροφόρησης. Το σύνολο πληροφόρησης είναι ένα υποσύνολο του συνόλου κόμβου του παιγνίου μέσα στο οποίο κινείται ένας παίκτης. Ας γράψουμε το παραπάνω παίγνιο ως παίγνιο ατελούς πληροφόρησης: υποθέστε ότι κινείται πρώτος ο παίκτης 1, είτε αριστερά, είτε δεξιά, αλλά ο παίκτης 2 δεν παρατηρεί σε ποιον κόμβο τον έφερε ο παίκτης 1. Το παίγνιο αυτό απεικονίζεται στο σχήμα 1.3. Μπορεί να τον έφερε είτε στον κόμβο b, είτε στον κόμβο c. Τότε το σύνολο $H=\{b,c\}$, αποτελεί το σύνολο πληροφόρησης στο οποίο κινείται ο παίκτης 2. Το σύνολο πληροφόρησης συνήθως απεικονίζεται είτε ως μια έλλειψη που κυκλώνει τους κόμβους που περιλαμβάνει (σχήμα 1.3(α΄)), είτε ως διακεκομμένη γραμμή που ενώνει τους κόμβους που περιλαμβάνει (σχήμα 1.3(β΄)).

Σε παίγνια τέλειας πληροφόρησης, το κάθε σύνολο πληροφόρησης αποτελείται από έναν και μόνον κόμβο.

1.4.2 Κανονικής ή στρατηγικής μορφής αναπαράσταση παιγνίου

Για τη στρατηγική αναπαράσταση των παιγνίων χρειαζόμαστε τον ορισμό της στρατηγικής.

> **Ορισμός 1.2** Στρατηγική για ένα παίκτη είναι μια συνάρτηση από κάθε σύνολο πληροφόρησης, στο σύνολο δράσεων (κινήσεων) του παίκτη.

Σκεφτείτε τη στρατηγική σαν έναν τυφλοσούρτη, ένα σύνολο κανόνων δηλαδή που λέει στον παίκτη πως θα παίξει σε κάθε περίπτωση. Δηλαδή του δίνει μια κίνηση για κάθε πιθανό σημείο που μπορεί να βρεθεί. Έχοντας μια στρατηγική, για τον Παίκτη 1, δε χρειάζεται η φυσική παρουσία του για να παικτεί το παίγνιο. Η στρατηγική δίνει οδηγίες (είναι πλήρες σύνολο οδηγιών) σε οποιονδήποτε άλλον που μπορεί να αντικαταστήσει τον παίκτη 1 και να παίξει το παίγνιο αντ' αυτού.

Παραδείγματος χάριν, στο παίγνιο που απεικονίζεται στο σχήμα 1.2, ο Παίκτης 1 έχει δύο στρατηγικές: Στο a να παίξει Α, ή στο a να παίξει Δ. Ο Παίκτης 2 όμως έχει περισσότερες στρατηγικές διότι μια στρατηγική για τον Παίκτη 2 ορίζει μια κίνηση για τον παίκτη σε όποιο σύνολο πληροφόρησης κι αν βρεθεί αυτός. Άρα πρέπει να ορίζει μια κίνηση για τον παίκτη 2 στο b και μια κίνηση για τον παίκτη 2 στο c. Παράδειγμα στρατηγικής για τον παίκτη 2 είναι:

[παίξε Π αν βρεθείς στο b και Κ αν βρεθείς στο c]. Λίγη σκέψη αποκαλύπτει ότι ο παίκτης 2 έχει 4 πιθανές στρατηγικές:

Στρατηγική 1: [παίξε Π αν βρεθείς στο b και Π αν βρεθείς στο c]
Στρατηγική 2: [παίξε Π αν βρεθείς στο b και Κ αν βρεθείς στο c]
Στρατηγική 3: [παίξε Κ αν βρεθείς στο b και Π αν βρεθείς στο c]
Στρατηγική 4: [παίξε Κ αν βρεθείς στο b και Κ αν βρεθείς στο c].

Η παραπάνω διευκρίνηση είναι πολύ σημαντική για τα δυναμικά παίγνια. Στα στατικά παίγνια, όπου οι παίκτες κινούνται ταυτόχρονα, οι στρατηγικές συνήθως συμπίπτουν με τις κινήσεις τους.

Για να γίνει πιο κατανοητή η κανονική μορφή αναπαράστασης ενός παιγνίου σκεφτείτε την σαν έναν πίνακα, όταν έχουμε παίγνια με δύο παίκτες. Οι στήλες του πίνακα δίνουν τις στρατηγικές (κινήσεις) του παίκτη 2 και οι γραμμές του πίνακα τις στρατηγικές του παίκτη 1. Στην αναπαράσταση κανονικής μορφής, πρώτα γράφουμε τις αποδόσεις του παίκτη γραμμή (1) και εν συνεχεία, χωριζόμενες από κόμμα, τις αποδόσεις του παίκτη στήλη (2).

Το δυναμικό παίγνιο του σχήματος 1.2 μπορεί να αναπαρασταθεί σε κανονική μορφή, δηλαδή σε μορφή πίνακα του οποίου οι γραμμές αντιστοιχούν στις στρατηγικές του παίκτη 1 και οι στήλες αντιστοιχούν στις στρατηγικές του παίκτη 2. Για να το απεικονίσουμε πρέπει να λάβουμε υπόψιν ότι ενώ για τον παίκτη 1 (γραμμή) οι στρατηγικές είναι 2 (Α - Δ), για τον παίκτη στήλη οι στρατηγικές οι τέσσερις στρατηγικές που αναφέρονται αμέσως παραπάνω. Το παίγνιο σε κανονική μορφή είναι απεικονίζεται στον πίνακα

	ΠΠ	ΠΚ	ΚΠ	ΚΚ
Π	1, 1	1, 1	0,0	0,0
Κ	0, -1	2, 1	0, -1	2, 1

Πίνακας 1.1: Το παίγνιο του σχήματος 1.2 σε κανονική μορφή.

> **Ορισμός 1.3** Προφίλ στρατηγικών είναι ένα διάνυσμα στρατηγικών, μία για κάθε παίκτη.

Για παράδειγμα σε ένα παίγνιο με 3 παίκτες, ένα προφίλ στρατηγικών είναι ένα διάνυσμα (s_1, s_2, s_3) που ορίζει τη στρατηγική s_i για τον παίκτη i.

Ορισμός 1.4 — Παίγνιο σε κανονική μορφή. Αν έχουμε $1,2,\ldots I$ παίκτες, τότε ένα παίγνιο σε κανονική μορφή (συμβολίζουμε $G_N = (s_i, u_i)_{i=1}^{I}$), προσδιορίζει i σύνολα στρατηγικών S_i (ένα για κάθε παίκτη) και i συναρτήσεις χρησιμότητας $u_i(s_1, s_2, \ldots, s_I)$ που δίνουν τη χρησιμότητα του κάθε παίκτη για κάθε προφίλ στρατηγικών $(s_1, s_2, \ldots, s_I)$.

Ας κάνουμε εδώ μια διάκριση μεταξύ αμιγών και μεικτών στρατηγικών. Μια αμιγής στρατηγική είναι μια στρατηγική η οποία προσδιορίζει μία ή περισσότερες δράσεις χωρίς να υπεισέρχεται το στοιχείο της τυχαιότητας. Παραδείγματος χάριν αν εγώ ως παίκτης έχω δύο δυνατές κινήσεις, να πάω αριστερά, Α ή να πάω δεξιά, Δ, τότε μια αμιγής στρατηγική μου είναι ας πούμε το Δ.

Η μεικτή στρατηγική είναι ένας κανόνας για το πώς θα παίξω το παιχνίδι στον οποίο ενσωματώνω τυχαίες επιλογές. Στο παραπάνω παράδειγμα, μια μεικτή στρατηγική θα ήταν να ρίξω ένα κέρμα και αν έρθει κορώνα να παίξω Α, ενώ αν έρθουν γράμματα, να παίξω Δ. Θα δώσουμε πιο αυστηρό ορισμό των μεικτών στρατηγικών παρακάτω.

Παράδειγμα 1.6 Παίγνιο συντονισμού σε στρατηγική μορφή

	Α	Δ
Π	0,0	20,20
Κ	1,2	0,0

Έστω ότι ο παίκτης 1 έχει δύο στρατηγικές, Π και Κ, ενώ ο παίκτης 2 έχει επίσης δύο στρατηγικές, Α και Δ. Τότε υπάρχουν 4 προφίλ στρατηγικών: {ΚΑ, ΚΔ,ΠΑ,ΠΔ} και κάθε κελί του πίνακα αντιστοιχεί σε ένα προφίλ στρατηγικών. Μέσα στο κάθε κελί δίνουμε τις αποδόσεις από το συγκεκριμένο προφίλ στρατηγικών πρώτα για τον παίκτη 1 και μετά, χωριζόμενες με κόμμα τις αποδόσεις για τον παίκτη 2.

Στο παραπάνω παράδειγμα, οι αποδόσεις του παίκτη 1 και του παίκτη 2 για τα προφίλ στρατηγικών ΠΑ και ΚΔ είναι 0, ενώ οι αποδόσεις του παίκτη 1 και του παίκτη 2 για το προφίλ ΠΔ είναι 20 και οι αποδόσεις του παίκτη 1 για το προφίλ ΚΑ είναι 1 ενώ του παίκτη 2 για το προφίλ ΚΑ είναι 2.

Παράδειγμα 1.7 Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί

	Π	Ψ	Χ
Π	0,0	1,-1	-1,1
Ψ	-1,1	0,0	1,-1
Χ	1,-1	-1,1	0,0

Πάρτε ένα παράδειγμα παιγίου που όλοι έχουμε παίξει ως παιδιά, το πέτρα-ψαλίδι-χαρτί. Είναι προφανώς ταυτόχρονο παίγνιο που ο κάθε παίκτης έχει 3 στρατηγικές, Π, Ψ, Χ. Τα προφίλ στρατηγικών είναι 3×3, άρα 9. Και ας πούμε ότι ο χαμένος δίνει στο νικητή €1 ενώ σε περίπτωση ισοπαλίας δεν αλλάζουν χέρι χρήματα. Τότε σε κανονική μορφή, η αναπαράσταση του παιγνίου θα έχει όπως στο παράδειγμα 1.7.

Παράδειγμα 1.8 Το δίλημμα του κρατουμένου

	Ο	Δ
Ο	-6,-6	0,-12
Δ	-12,0	-1,-1

Δύο συνεργοί συλλαμβάνονται και προφυλακίζονται για ένα έγκλημα που έχει διαπραχθεί. Στη διάρκεια του μήνα ανακρίνονται ξεχωριστά. Ανάλογα με τις απαντήσεις τους θα στοιχειοθετηθεί ή όχι κατηγορία με ανάλογες ποινές: Αν ο ένας κρατούμενος ομολογήσει και ο άλλος όχι, σε ανταλλαγή για την ομολογία που θα φυλακίσει τον άλλο ένοχο, ο εισαγγελέας απαλλάσει τον κρατούμενο που ομολόγησε και ο άλλος τιμωρείται με φυλάκιση 12 μηνών. Αν και οι δύο κρατούμενοι ομολογήσουν, τιμωρούνται και οι δύο με φυλάκιση 6 μηνών. Αν και οι δύο δεν ομολογήσουν, οι ανακρίσεις κρατούν για 1 μήνα τον οποίο οι κρατούμενοι περνούν στη φυλακή, μετά τον οποίο δε στοιχειοθετείται κατηγορία και αφήνονται αμφότεροι ελεύθεροι. Οι στρατηγικές για κάθε κρατούμενο είναι: {Ομολογώ, Δεν ομολογώ} και ο πίνακας των αποδόσεων έχει ως παραπάνω.

1.5 Λύσεις παιγνίων στρατηγικής μορφής

1.5.1 Κυριαρχία

Οι δύο πιο ισχυρές λύσεις μη συνεργατικών παιγνίων είναι κατά σειρά οι κυρίαρχες στρατηγικές και η διαδοχική απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών. Για να εξετάσουμε τις δύο μορφές πρέπει πρώτα να καταλάβουμε τι είναι κυριαρχία. Ξεχωρίζουμε δύο βασικές έννοιες: *κυρίαρχη* και *κυριαρχούμενη στρατηγική*.

Κυρίαρχες στρατηγικές

Ορισμός 1.5 Κυρίαρχη είναι μια στρατηγική όταν αποφέρει στον παίκτη περισσότερες αποδόσεις από *όλες* τις άλλες στρατηγικές του *ο,τιδήποτε κι αν παίξουν οι άλλοι παίκτες*. Ή πιο αυστηρά: Η στρατηγική s_i του παίκτη i, κυριαρχεί αυστηρώς όλες τις άλλες στρατηγικές του παίκτη i εάν για κάθε άλλη στρατηγική s'_i του παίκτη i και για κάθε προφίλ στρατηγικών s_{-i} όλων των υπόλοιπων παικτών πλην του i, ισχύει:

$$\pi_i(s_i, s_{-i}) > \pi_i(s'_i, s_{-i}) \tag{1.1}$$

Η ασθενής κυριαρχία ορίζεται ανάλογα, αλλά αντί για αυστηρή ανισότητα, έχουμε ασθενή ανισότητα ($\geq$).

Προσέξτε το εξής: στην θεωρία παιγνίων είναι χρήσιμος ο εξής συμβολισμός: όταν μιλούμε για τον παίκτη i, συμβολίζουμε με $-i$ όλους τους άλλους παίκτες. Είναι σημαντικό να κατανοήσετε ότι για να είναι μια στρατηγική κυρίαρχη για έναν παίκτη πρέπει να «νικάει» όλες τις άλλες στρατηγικές του παίκτη, ό,τι κι αν κάνουν οι υπόλοιποι παίκτες.

	t1	t2	t3	t4
s1	5, 3	4, 4	10, 5	7, -2
s2	-1, 2	1, 3	9, 4	5, -5
s3	2, 5	3, 6	0, 9	1, 12
s4	4, -2	0, -1	3, 21	2, 7

Πίνακας 1.2: Παίγνιο με κυρίαρχη στρατηγική

Παρατηρήστε ότι στον πίνακα 1.2, οι αποδόσεις του παίκτη γραμμή είναι μεγαλύτερες όταν παίζει s_1 από τις αποδόσεις που του δίνει οποιαδήποτε άλλη στρατηγική του (s_2, s_3, s_4), οποιαδήποτε στρατηγική (t_1, t_2, t_3, t_4) κι αν παίξει ο παίκτης στήλη. Αν ένας παίκτης έχει κυρίαρχη στρατηγική τότε οπωσδήποτε θα παίξει αυτήν. Στο παίγνιο δηλαδή του πίνακα

1.2, γνωρίζουμε ότι ο παίκτης γραμμή θα παίξει απαραιτήτως s_1. Και επομένως ο παίκτης στήλη θα παίξει την στρατηγική που μεγιστοποιεί τις αποδόσεις του γνωρίζοντας ότι ο παίκτης γραμμή θα τον φέρει στην πιο πάνω γραμμή. Επομένως ο παίκτης στήλη θα παίξει t_3 που του αποφέρει 5 μονάδες χρησιμότητας, περισσότερες απ΄ ό,τι του αποφέρουν οι στρατηγικές t_1, t_2 και t_4.

Καταλαβαίνουμε ότι κάτι τέτοιο λύνει αυτομάτως ένα παίγνιο, αλλά δεν είναι πολύ πιθανό να συμβεί. Μια στρατηγική για να είναι κυρίαρχη πρέπει να πληροί πολύ ειδικές περιπτώσεις. Επιπλέον είναι και συζητήσιμο κατά πόσον μια τέτοια περίπτωση έχει ιδιαίτερο στρατηγικό ενδιαφέρον (όταν έχω κυρίαρχη στρατηγική, δεν υπάρχει ουσιαστική αλληλεπίδραση: θα παίξω αυτήν ό,τι κι αν κάνουν οι υπόλοιποι παίκτες).

Ορισμένες φορές, ακόμα κι αν δεν υπάρχει μία κυρίαρχη στρατηγική και άρα δεν υπάρχει μοναδικός και αδιαμφισβήτητος τρόπος να παιχτεί το παίγνιο από έναν ορθολογικό παίκτη, ενδέχεται να έχουμε *κυριαρχούμενες στρατηγικές*. Δηλαδή μπορεί να μην υπάρχει μια στρατηγική που θέλω οπωσδήποτε να παίξω, αλλά μπορεί να υπάρχουν, μία ή περισσότερες στρατηγικές που δεν θέλω να παίξω.

Κυριαρχούμενες στρατηγικές

Ορισμός 1.6 Κυριαρχούμενη είναι μια στρατηγική όταν υπάρχει κάποια άλλη στρατηγική που αποφέρει στον παίκτη περισσότερες αποδόσεις από από αυτήν *ο,τιδήποτε κι αν παίξουν οι άλλοι παίκτες*.
Ή πιο αυστηρά: Η στρατηγική s_i του παίκτη i, είναι κυριαρχούμενη, εάν υπάρχει κάποια άλλη στρατηγική s'_i του παίκτη i τέτοια ώστε για κάθε προφίλ στρατηγικών s_{-i} όλων των υπόλοιπων παικτών πλην του i, ισχύει:

$$\pi_i(s_i, s_{-i}) \leq \pi_i(s'_i, s_{-i}) \tag{1.2}$$

Για να είναι κυριαρχούμενη μια στρατηγική δεν είναι απαραίτητο να είναι «χειρότερη» απ΄ όλες τις άλλες στρατηγικές του παίκτη i. Αρκεί να βρεθεί μία στρατηγική που είναι καλύτερη από κάποια άλλη, ανεξάρτητα του τί παίζουν οι άλλοι, και η στρατηγική αυτή είναι κυριαρχούμενη. Για το θέσουμε αλλιώς για να μην επιλέξω την στρατηγική, ας πούμε t_1, δεν είναι απαραίτητο αυτή να είναι χειρότερη από όλες τις άλλες $(t_2, \ldots t_n)$. Αρκεί να βρεθεί μία έστω (π.χ. t_5) από την οποία η t_1 δίνει αυστηρώς μικρότερες αποδόσεις ό,τι κι αν παίξουν οι υπόλοιποι παίκτες, και η στρατηγική t_1 είναι κυριαρχούμενη. Στον πίνακα 1.3 δίνουμε παράδειγμα αυστηρώς κυριαρχούμενης στρατηγικής

	t1	t2	t3	t4
s1	5, 3	4, 4	0, 5	3, -2
s2	-1, 2	6, 3	9, 4	5, -5
s3	2, 5	3, 6	0, 9	1, 12
s4	4, -2	0, -1	3, 21	2, 7

Πίνακας 1.3: Παίγνιο με κυριαρχούμενη στρατηγική

Παρατηρήστε ότι η στρατηγική t_1 του παίκτη στήλη είναι αυστηρώς κυριαρχούμενη αφού υπάρχει άλλη (για την ακρίβεια άλλες δύο) στρατηγικές που του δίνουν αυστηρώς μεγαλύτερες αποδόσεις, ανεξαρτήτως του τί θα παίξει ο γραμμή. Παρατηρήστε ότι η t_1 δεν κυριαρχείται από όλες τις άλλες στρατηγικές του στήλη: Ας πούμε δεν είναι παντού χειρότερη από την στρατηγική t_4. Ωστόσο ποτέ ένας ορθολογικός παίκτης-στήλη δεν θα έπαιζε t_1 ενώ υπάρχουν οι στρατηγικές t_2 και t_3 που του δίνουν παντού αυστηρώς μεγαλύτερες αποδόσεις.

Παρατηρήστε επίσης ότι και ο γραμμή έχει μία ασθενώς κυριαρχούμενη στρατηγική, την s_3. Η s_3 δίνει το πολύ όσο και η s_1 στον γραμμή. Για την ακρίβεια αν ο παίκτης στήλη παίξει

t_1, t_2 ή t_4 η στρατηγική s_1 δίνει στον γραμμή αυστηρώς μικρότερες αποδόσεις απ' ό,τι η s_1. Αν όμως ο παίκτης στήλη παίξει t_3, του δίνει τις ίδιες αποδόσεις (0) με την s_1. Αυτή ακριβώς είναι και η έννοια της ασθενώς κυριαρχούμενης στρατηγικής.

Διαγραφή αυστηρώς κυριαρχούμενων στρατηγικών και εκλογικεύσιμες (rationalizable) στρατηγικές

Ένας ορθολογικός παίκτης δεν θα έπαιζε ποτέ μια αυστηρώς κυριαρχούμενη στρατηγική (δεν μπορούμε να κάνουμε τον ίδιο ισχυρισμό και για μια ασθενώς κυριαρχούμενη στρατηγική. Για τις ασθενώς κυριαρχούμενες στρατηγικές, αυτό που θα πούμε εδώ είναι ότι καλό είναι να μην τις διαγράφουμε. Για περισσότερες λεπτομέρεις, δείτε Kreps 2009). Επομένως αν οι παίκτες είναι όλοι ορθολογικοί και όλοι γνωρίζουν την ορθολογικότητα όλων κ. ο. κ., μπορούμε να διαγράψουμε όποιες στρατηγικές του παιγνίου είναι κυριαρχούμενες.

Παρατήρηση: Όταν διαγράφουμε *αυστηρώς* κυριαρχούμενες στρατηγικές, δεν έχει σημασία από ποιον παίκτη αρχίζουμε να διαγράφουμε. Επίσης αν ένας παίκτης έχει περισσότερες από μία αυστηρώς κυριαρχούμενες στρατηγικές, τις διαγράφουμε όλες.

Κάποιες φορές, διαγράφοντας μία αυστηρώς κυριαρχούμενη στρατηγική για κάποιον παίκτη i, κάποια στρατηγική ενός άλλου παίκτη j καθίσταται αυστηρώς κυριαρχούμενη (ενώ πριν δεν ήταν απαραίτητα. Δείτε παράδειγμα που ακολουθεί). Σε αυτήν την περίπτωση αφού διαγράψουμε την στρατηγική του i, μπορούμε να συνεχίσουμε διαγράφοντας την αυστηρώς κυριαρχούμενη στρατηγική του j. Και αν διαγράφοντας την αυστηρώς κυριαρχούμενη στρατηγική του j προκύψει κάποια άλλη στρατηγική άλλου παίκτη ως αυστηρώς κυριαρχούμενη, μπορούμε να συνεχίσουμε έτσι διαδοχικά έως ότου μείνουμε με ένα υποσύνολο του παιγνίου στο οποίο δεν υπάρχει πια αυστηρώς κυριαρχούμενη στρατηγική. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *διαδοχική διαγραφή αυστηρώς κυριαρχούμενων στρατηγικών* (Δ. Δ. Κ. Σ.) και οι στρατηγικές που επιβιώνουν αυτής της διαδικασίας ονομάζονται εκλογικεύσιμες στρατηγικές (rationalizable strategies).

	τ1	τ2	τ3	τ4	τ5
σ1	5, 3	4, 4	0, 5	3, -2	7, 6
σ2	-1, 2	6, 3	9, 4	5, -5	5, -5
σ3	2, 5	3, 6	0, 9	1, 12	1, 12
σ4	4, -2	11, -1	3, 21	2, 7	6, 7
σ5	15, 4	3, 21	3, 5	4, 2	4, 0

Πίνακας 1.4: Διαγραφή κυριαρχούμενων στρατηγικών και εκλογικεύσιμες στρατηγικές

Στο παίγνιο που παρουσιάζεται στον πίνακα 1.4, η στρατηγική τ1 του παίκτη στήλη είναι αυστηρώς κυριαρχούμενη. Αν την διαγράψουμε προκύπτει ένα νέο παίγνιο: Στο νέο

	τ2	τ3	τ4	τ5
σ1	4, 4	0, 5	3, -2	7, 6
σ2	6, 3	9, 4	5, -5	5, -5
σ3	3, 6	0, 9	1, 12	1, 12
σ4	11, -1	3, 21	2, 7	6, 7
σ5	3, 21	3, 5	4, 2	4, 0

παίγνιο, παρατηρούμε ότι η στρατηγική σ5 του παίκτη γραμμή είναι επίσης αυστηρώς κυριαρχούμενη. Την διαγράφουμε. Προκύπτει ένα παίγνιο 4x4 στο οποίο η στρατηγική τ2 του στήλη είναι αυστηρώς κυριαρχούμενη (επιβεβαιώστε!). Στο νέο παίγνιο που προκύπτει, η στρατηγική σ3 είναι αυστηρώς κυριαρχούμενη για τον παίκτη γραμμή και διαγράφεται. Τέλος στο παίγνιο που προκύπτει, παρατηρούμε ότι η στρατηγική τ4 του στήλη μπορεί να διαγραφεί. Καταλήγουμε τελικά με ένα παίγνιο 3x2 στο οποίο δεν μπορούμε να βρούμε άλλες κυριαρχούμενες στρατηγικές. Οι στρατηγικές που επιβίωσαν είναι οι εκλογικεύσιμες στρατηγικές των δύο παικτών.

	τ3	τ5
σ1	0, 5	7, 6
σ2	9, 4	5, -5
σ4	3, 21	6, 7

Πίνακας 1.5: Εκλογικεύσιμες στρατηγικές

Οι εκλογικεύσιμες στρατηγικές είναι οι στρατηγικές που επιβιώνουν όταν υποθέτουμε ότι τέλεια ορθολογική παίκτες αποκλείεται να παίξουν στρατηγικές που δεν τους συμφέρουν γνωρίζοντας πάντα ότι και οι τέλεια ορθολογικοί συμπαίκτες τους δεν θα έπαιζαν ποτέ αυστηρώς κυριαρχούμενες στρατηγικές.

Κάποιες φορές η Διαδοχική Διαγραφή Κυριαρχούμενων Στρατηγικών (ΔΔΚΣ) μπορεί να οδηγήσει σε ένα μοναδικό προφίλ στρατηγικών. Τότε αυτό το προφίλ είναι ο.μοναδικός τρόπος που θα παιχθεί το παιχνίδι εάν οι παίκτες είναι τέλεια ορθολογικοί. Άλλες φορές όμως ενδέχεται είτε να μην υπάρχουν κυριαρχούμενες στρατηγκές, είτε το οι εκλογικέυσιμες στρατηγικές να μην είναι μοναδικές και άρα ορθολογικοί παίκτες θα μπορούσαν να παίξουν οποιαδήποτε από αυτές. Σε αυτές τις περιπτώσεις η θεωρία χρειάζεται ένα εργαλείο που να προβλέπει ποια από τα προφίλ στρατηγικών που προκύπτουν από εκλογικεύσιμες στρατηγικές είναι πιο πιθανόν να παικτούν.

	Α	Δ
Π	0, 0	9, 21
Κ	32, 4	0, 0

Πίνακας 1.6: Παίγνιο στο οποίο η ΔΔΚΣ δεν οδηγεί σε μοναδικό προφίλ

Δείτε για παράδειγμα το παίγνιο του πίνακα 1.6. Εδώ η ΔΔΚΣ δεν μπορεί να προβλέψει μοναδικό τρόπο να παιχτεί το παίγνιο. Τα προφίλ που επιβιώνουν είναι 4. Είναι όλα όμως εξίσου πιθανόν να παιχτούν; Υπάρχουν κάποια που ξεχωρίζουν ως πιο πιθανός τρόπος να παιχτεί το παιχνίδι; Η έννοια που απαντάει σε αυτό ακριβώς το ερώτημα είναι η ισορροπία Nash.

1.5.2 Ισορροπία Nash

Είδαμε αμέσως πριν ότι κάποια παίγνια δεν μπορούν να λυθούν ως το τέλος με τη μέθοδο της ΔΔΚΣ. Χρειαζόμαστε κάποια έννοια λύσης ενός παιγνίου που να μπορεί να μας δίνει μια πρόβλεψη για το πώς μπορεί να παιχτεί μια μεγάλη γκάμα παιγνίων. Η λύση ήρθε από τον John Nash ο οποίος έδειξε ότι όλα τα πεπερασμένα παίγνια έχουν λύση, την λεγόμενη ισορροπία Nash. Η ισορροπία Nash μπορεί να υπάρχει είτε σε αμιγείς, είτε σε μεικτές στρατηγικές.[1]

Ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές

Αμιγείς στρατηγικές είναι οι στρατηγικές που υπαγορεύουν στον παίκτη πώς να παίξει ένα παίγνιο ντετερμινιστικά. Δηλαδή χωρίς τυχαιότητα (θα επανέλθουμε και θα γίνει πιο κατανοητή η έννοια της αμιγούς στρατηγικής μόλις κατανοήσετε τις μεικτές στρατηγικές).

[1] Για την ακρίβεια ο Nash έδειξε ότι κάθε πεπερασμένο παίγνιο έχει ισοροπία Nash σε μεικτές στρατηγικές. Οι αμιγείς στρατηγικές είναι ειδική περίπτωση των μεικτών στρατηγικών.

Υπάρχουν διαφορετικοί και ισοδύναμοι τρόποι για να περιγράψει κανείς την ισορροπία Nash. Θα δώσουμε τρεις συμπληρωματικές ερμηνείες που μπορούν η κάθε μία από την πλευρά της να δώσει καλύτερη κατανόηση της έννοιας.

1. **Η ισορροπία Nash ως προφίλ στρατηγικών από το οποίο κανένας παίκτης δεν φεύγει μονομερώς.** Ίσως ο πιο απλός και κατανοητός τρόπος να ορίσουμε την ισορροπία είναι ως ένας τρόπος να παίξουμε το παιχνίδι από τον οποίο κανένας από τους παίκτες δεν φεύγει μονομερώς. Δηλαδή μπορούμε να σκεφτούμε την ισορροπία Nash ως ένα προφίλ στο οποίο αν οι παίκτες βρεθούν, το παιχνίδι θα παιχτεί έτσι. Κανένας δεν έχει κίνητρο από μόνος του να αλλάξει τον τρόπο που παίζει. Αυτή η ερμηνεία έχει το πλεονέκτημα ότι μας δίνει έναν εύκολο τρόπο να ελέγχουμε αν ένα προφίλ είναι ισορροπία ή όχι: θεωρούμε ότι είμαστε στο προφίλ και ρωτάμε αν οποιοσδήποτε παίκτης έχει κίνητρο να φύγει ή όπως λέμε στην θεωρία παιγνίων να *παρεκκλίνει* από αυτό το προφίλ. Αν η απάντηση είναι αρνητική για όλους τους παίκτες, το προφίλ είναι ισορροπία Nash. Αν έστω κι ένας παίκτης μπορεί να βελτιώσει τις αποδόσεις του παρεκκλίνοντας από το προφίλ *μόνος του*, τότε το προφίλ δεν είναι ισορροπία.
2. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να ορίσουμε την ισορροπία ως ένα προφίλ στρατηγικών ή αλλιώς μια στρατηγική *για κάθε παίκτη*, τέτοιο/τέτοιες ώστε **δεδομένων των στρατηγικών όλων των άλλων παικτών**, ο παίκτης i θέλει να παίξει τη στρατηγική που υπαγορεύει το προφίλ της ισορροπίας Nash. Ας πούμε στην περίπτωση δύο παικτών, του Α και του Β, μια ισορροπία Nash είναι μια στρατηγική, ας πούμε α για τον παίκτη Α και μια στρατηγική, ας την πούμε β, για τον παίκτη Β τέτοιες ώστε: Δεδομένης της στρατηγικής β, ο Α θέλει να παίξει α (δεν έχει άλλη στρατηγική που προτιμάει) ΚΑΙ δεδομένης της στρατηγικής α, ο παίκτης Β θέλει να παίξει β (δεν υπάρχει άλλη στρατηγική που ο Β να την προτιμάει από την β).
3. Για τον τρίτο ορισμό της ισορροπίας, χρειαζόμαστε την έννοια της **άριστης απόκρισης**.

Ορισμός 1.7 — Άριστες αποκρίσεις. Μια στρατηγική s_1 είναι άριστη απόκριση σε ένα διάνυσμα στρατηγικών s_{-i} των υπολοίπων παικτών εάν

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \text{ για κάθε } s'_i \text{ στο σύνολο στρατηγικών του } i \tag{1.3}$$

Η άριστη απόκριση ενός παίκτη i είναι μια στρατηγική ως απάντηση στις στρατηγικές των άλλων παικτών. Και αυτή η απάντηση είναι άριστη, δηλαδή δεν υπάρχει άλλη που να δίνει στον i μεγαλύτερες αποδόσεις. Για παράδειγμα, στο παίγνιο «Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί», η άριστη απόκριση ενός παίκτη στην στρατηγική Ψαλίδι του άλλου είναι Πέτρα, ενώ η άριστη απόκριση στην Πέτρα είναι Χαρτί κ.ο.κ. Θα μπορούσαμε να συμβολίσουμε: $R(\Pi) = \mathrm{X}$, $R(\mathrm{X}) = \Psi$, $R(\Psi) = \Pi$.
Έχοντας αυτό υπ' όψιν και συμβολίζοντας τη (αμιγή) στρατηγική του παίκτη i με s_i, είμαστε σε θέση να δώσουμε έναν επίσημο ορισμό της ισορροπίας Nash:

Ορισμός 1.8 — Ισορροπία Nash. Ένα προφίλ στρατηγικών $(s_1, s_2, \dots s_I)$ αποτελεί ισορροπία Nash ενός παιγνίου I παικτών με στρατηγικές S_i και αποδόσεις u_i, αν για κάθε παίκτη $i = 1, \dots I$, ισχύει:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \tag{1.4}$$

για κάθε άλλη στρατηγική $s'_i \neq s_i$ στο σύνολο στρατηγικών S_i του παίκτη i.

ή ισοδύναμα:

Ορισμός 1.9 — Ισορροπία Nash. Ένα προφίλ στρατηγικών $(s_1, s_2, \dots s_I)$ αποτελεί ισορροπία Nash ενός παιγνίου I παικτών με στρατηγικές S_i και αποδόσεις u_i, αν για κάθε παίκτη $i = 1, \dots I$, ισχύει ότι η στρατηγική s_i αποτελεί άριστη απόκριση στις στρατηγικές s_{-i} του προφίλ.

Οι παραπάνω ορισμοί ουσιαστικά μας λένε ότι αν όλοι οι άλλοι παίκτες παίζουν το προφίλ της ισορροπίας, και ο παίκτης i θέλει να επιλέξει το προφίλ της ισορροπίας. Και αυτό συμβαίνει για κάθε παίκτη. Η ισορροπία Nash δε σημαίνει ότι έτσι θα παιχτεί το παίγνιο. Ούτε ότι ο κάθε παίκτης προτιμάει την ισορροπία από κάθε άλλη έκβαση του παιχνιδιού. Ούτε βέβαια ότι δεν υπάρχουν άλλες ισορροπίες. Ο πιο σωστός τρόπος να σκεφτόμαστε την ισορροπία Nash είναι ως αποτέλεσμα μιας σταθερής κοινωνικής σύμβασης. Αν μια κοινωνία βρεθεί να παίζει στρατηγικά ένα προφίλ, κανείς δεν έχει κίνητρο να παρεκκλίνει μονομερώς. Για όσο περιμένουμε ότι οι υπόλοιποι θα συνεχίζουν να παίζουν έτσι, συνεχίζουμε και εμείς, ακόμα κι αν όλοι θα προτιμούσαμε μια άλλη έκβαση.

Στο παράδειγμα 1.8, βλέποντας τον πίνακα πληρωμών, μπορούμε να δούμε ότι το προφίλ ΟΟ αποτελεί μοναδική ισορροπία Nash του παιγνίου. Για να το δείτε, παρατηρήστε ότι αν ο παίκτης στήλη παίζει Ο, τότε ο παίκτης γραμμή προτιμάει Ο που του δίνει -6 από Δ που του δίνει -12. Και αντίστροφα, αν ο παίκτης γραμή παίξει Ο, ο στήλη προτιμάει Ο που του δίνει -6, από Δ, που του δίνει -12. Άρα δεδομένης της στρατηγικής του άλλου, το ΟΟ μεγιστοποιεί τις αποδόσεις και των δύο, και άρα αποτελεί ισορροπία Nash για το παίγνιο.

Ίσως ακόμα πιο απλά χρησιμοποιώντας την δεύτερη ερμηνεία της ισορρπίας Nash που δώσαμε παραπάνω, παρατηρούμε ότι αν οι δύο παίκτες βρεθούν στο προφίλ ΟΟ, κανείς από τους δύο δεν φεύγει *μονομερώς*, δεν φεύγει δηλαδή για όσο ο άλλος παραμένει στο προφίλ.

Η ισορροπία Nash κατά κανόνα δεν είναι μοναδική. Ας εξετάσουμε το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.9 Πολλαπλές ισορροπίες Nash

	Α	Κ	Δ
Π	1,2	3,5	4,10
Μ	6,3	4,8	1,0
Κ	11,3	-1,2	-1,-1

Ο παίκτης γραμμή έχει τρεις στρατηγικές, πάνω, μέση ή κάτω, ενώ ο στήλη έχει τις στρατηγικές αριστερά, κέντρο ή δεξιά. Παρατηρούμε τρεις ισορροπίες Nash που δίνονται στον πίνακα 1.9 με μπλε χρώμα. Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε γιατί η κάθε μία είναι ισορροπία.

Παράδειγμα 1.10 Συνάντηση στην Αθήνα

	Μ	Λ
Μ	2,2	0,0
Λ	0,0	2,2

Ο Πέτρος και η Μαίρη έχουν κανονίσει να συναντηθούν στην Αθήνα. Ο Πέτρος δεν έχει κινητό (πώς επιβιώνει άραγε;) και έφυγε από το σπίτι χωρίς να κλείσουν μέρος για τη συνάντησή τους. Συνήθως συναντιούνται είτε στο Μουσείο της Ακρόπολης, είτε στο Λυκαβηττό. Και οι δύο θέλουν να συναντηθούν χωρίς να νοιάζονται πού. Αν συναντηθούν έχουν αποδόσεις 2 έκαστος κι αν χαθούν 0. Ο καθένας έχει δύο στρατηγικές: είτε μουσείο Μ, είτε Λυκαβηττός, Λ. Ο πίνακας αποδόσεων έχει ως εξής:

Το παραπάνω παίγνιο είναι παίγνιο συντονισμού, διότι και τα δύο μέρη έχουν κίνητρο να καταλήξουν στο ίδιο προφίλ, αλλά μπορεί να μην το πετύχουν μόνο λόγω ελλείψεως συντονισμού. Οι ισορροπίες Nash είναι δύο (ΜΜ, ΛΛ) και δίνονται με μπλε χρώμα.

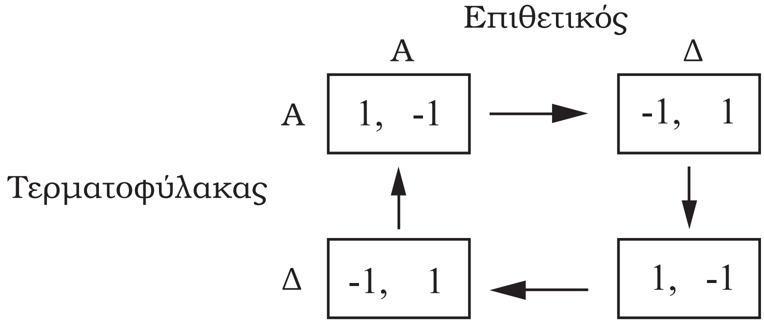
Σε όλα τα παραδείγματα που έχουμε δει ως τώρα, βρήκαμε τουλάχιστον μία ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές. Η συμβολή του Nash ήταν ότι έδειξε (ανάμεσα σε άλλα) την ύπαρξη ισορροπίας σε μη συνεργατικά παίγνια. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα παίγνια έχουν ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές; Η απάντηση είναι σαφέστατα όχι, όπως δείχνει και το επόμενο παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.11 Χτύπημα πέναλτι.

		Επιθετικός	
		Α	Δ
Τερματοφύλακας	Α	1,-1	-1,1
	Δ	-1,1	1,-1

Ένας επιθετικός καλείται να χτυπήσει πέναλτι απέναντι σε ένα τερματοφύλακα. Για απλότητα υποθέτουμε ότι ο επιθετικός μπορεί να στείλει τη μπάλλα είτε αριστερά, είτε δεξιά και ανάλογα ο επιθετικός μπορεί να πέσει είτε αριστερά, είτε δεξιά. Επίσης υποθέτουμε ότι αν ο τερματοφύλακας πέσει σωστά, τότε σίγουρα αποκρούει το πέναλτι, ενώ αν πέσει λάθος, μπαίνει γκολ. Επίσης υποθέτουμε ότι είναι το τελευταίο δευτερόλεπτο, αν το γκολ μπει, προκρίνεται η ομάδα του επιθετικού, ενώ αν ο τερματοφύλακας αποκρούσει προκρίνεται η ομάδα του τερματοφύλακα. Η πρόκριση αξίζει 1 βαθμό στην κάθε ομάδα, ενώ ο αποκλεισμός -1. Οι αποδόσεις του παιγνίου δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Προσέξτε ότι το παίγνιο δεν έχει ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές. Για την ακρίβεια ας αρχίσουμε από πάνω δεξιά κελί στο σχήμα 1.4. Δείτε ότι το προφίλ ΑΑ δε μπορεί να είναι ισορροπία διότι δεδομένου μεν ότι ο επιθετικός παίζει Α, ο τερματοφύλακας θέλει να παίξει Α, αλλά δεδομένου ότι ο τερματοφύλακας παίζει Α, ο επιθετικός θα θέλει να φύγει και να παίξει Δ. Ούτε το ΑΔ όμως μπορεί να είναι ισορροπία διότι από εκεί θα θέλει να φύγει ο τερματοφύλακας και να πάει στο ΔΔ. Ούτε αυτό μπορεί να είναι ισορροπία διότι ο επιθετικός θα θέλει να φύγει μονομερώς για το ΑΔ και συνεχίζουμε έτσι επ' άπειρον διότι σε αμιγείς στρατηγικές κάνουμε κύκλους.



Σχήμα 1.4: Μη ύπαρξη ισορροπίας σε αμιγείς στρατηγικές.

Το παραπάνω παράδειγμα μας δείχνει ότι δεν υπάρχει πάντα ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές σε μη συνεργατικά παίγνια. Το εύλογο ερώτημα είναι, μήπως υπάρχει ισορροπία σε άλλου είδους στρατηγικές; Τί έδειξε ο Nash; Για να απαντήσουμε χρειάζεται να εισαγάγουμε την έννοια των μεικτών στρατηγικών:

		Επιθετικός		
		Α	Δ	
Τερματοφύλακας	Α	1,-1	-1,1	p
	Δ	-1,1	1,-1	$1-p$
		q	$1-q$	

Πίνακας 1.7: Μεικτές στρατηγικές σε παίγνιο 2×2.

Μεικτές στρατηγικές

Στις μεικτές στρατηγικές, οι παίκτες κάνουν μίξη των αμιγών στρατηγικών τους. Δηλαδή αντί να παίζουν μία αμιγής στρατηγική, επιλέγουν στην τύχη με κάποια πιθανότητα μεταξύ των αμιγών στρατηγικών τους. Όλοι ξέρουμε ότι στο πέτρα ψαλίδι χαρτί όταν παίζουμε διαλέγουμε στην τύχη μία από τις τρεις αμιγείς στρατηγικές. Αυτό ακριβώς είναι μικτή στρατηγική: μια κατανομή πιθανότητας ορισμένη πάνω στις αμιγείς στρατηγικές.

Ο τερματοφύλακας που πέφτει αριστερά ή δεξιά, δεν επιλέγει μία από τις δύο στρατηγικές με σιγουριά. Αν κάτι τέτοιο συνέβαινε, ο επιθετικός θα το ήξερε και θα επέλεγε την άλλη πλευρά για να σκοράρει. Αυτό που κάνει και ο τερματοφύλακας, αλλά και ο επιθετικός στο πέναλτι, είναι να αποφασίζουν με κάποια συχνότητα, δηλαδή με κάποια πιθανότητα αν το δούμε σαν στατικό παίγνιο, να πέσουν αριστερά ή να πέσουν δεξιά. Σκεφτείτε το σα να ρίχνουν ένα νόμισμα που τους λέει πού να πέσει στον ένα και πού να χτυπήσει στον άλλον. Η μεικτή στρατηγική του τερματοφύλακα αν ρίχνει ένα νόμισμα είναι η κατανομή πιθανότητας $(\frac{1}{2}\circ \mathrm{A}, \frac{1}{2}\circ \Delta)$.

Αν επέλεγε τραβώντας κλήρο από μια κληρωτίδα με δύο κλήρους Α και έναν κλήρο Δ, η μεικτή στρατηγική του θα ήταν η κατανομή πιθανότητας $(\frac{2}{3}\circ \mathrm{A}, \frac{1}{3}\circ \Delta)$. Έτσι πρέπει να σκέφτεστε τις μεικτές στρατηγικές, ως πιθανότητες, ή καλύτερα κατανομές πιθανότητας, με τις οποίες ένας παίκτης παίζει τις αμιγείς στρατηγικές του. Σαν ένας παίκτης να διαλέγει με τί πιθανότητες θα επιλέξει μεταξύ των αμιγών στρατηγικών του, δηλαδή να διαλέγει το μείγμα των κλήρων που θα τοποθετήσει στην κληρωτίδα για τραβήξει κλήρο για το τί να κάνει.

> **Ορισμός 1.10 — Μεικτή στρατηγική.** Αν ο παίκτης i έχει n αμιγείς στρατηγικές, τις $s_1, s_2, \dots s_n$, νομάζουμε μεικτή στρατηγική για τον παίκτη i και συμβολίζουμε $\sigma_i = p_1(s_1), p_2(s_2)\dots p_n(s_n)$ μια κατανομή πιθανότητας που ορίζει την πιθανότητα $p_j(s_j)$ με την οποία ο παίκτης i παίζει την αμιγή στρατηγική s_j. Προφανώς $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$.

Έχοντας καταλάβει τί είναι μεικτή στρατηγική, μπορούμε να ορίσουμε την ισορροπία Nash σε μεικτές στρατηγικές.

> **Ορισμός 1.11 — Ισορροπία Nash σε μεικτές στρατηγικές.** Ένα προφίλ μεικτών στρατηγικών για κάθε παίκτη $(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_I)$ είναι ισορροπία Nash ενός παιγνίου αν για κάθε παίκτη $i = 1\dots I$, ισχύει:
>
> $$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \tag{1.5}$$
>
> για κάθε άλλη μεικτή στρατηγική $\sigma_i' \neq \sigma_i$ στο σύνολο μεικτών στρατηγικών του παίκτη i.

Ας δούμε πώς στο παιχνίδι του πέναλτι ορίζονται μεικτές στρατηγικές. Μια μεικτή στρατηγική για τον τερματοφύλακα είναι μια κατανομή πιθανότητας ορισμένη πάνω στις αμιγείς στρατηγικές του. Μια τέτοια κατανομή ορίζει μια πιθανότητα p με την οποία θα παίξει Α και μια πιθανότητα (προφανώς $1-p$) με την οποία θα παίξει Δ. Αναλόγως και για τον επιθετικό.

Πώς λύνουμε όμως ένα παίγνιο για ισορροπίες Nash σε μεικτές στρατηγικές. Το μυστικό είναι το εξής: Στην ισορροπία Nash, ο κάθε παίκτης επιλέγει τη μίξη που θα κάνει (τις πιθανότητες με τις οποίες θα παίξει) έτσι ώστε ΝΑ ΑΦΗΝΕΙ ΤΟΝ ΑΛΛΟΝ/ΑΛΛΟΥΣ ΠΑΙΚΤΗ/ΕΣ ΑΔΙΑΦΟΡΟ/ΟΥΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΚΑΘΑΡΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ ΤΟΥ/Σ. Δηλαδή ο γραμμή επιλέγει μίξη $p,(1-p)$, έτσι ώστε ο στήλη να είναι αδιάφορος μεταξύ Α και Δ. Και αναλόγως ο στήλη επιλέγει μίξη $q,(1-q)$ ανάμεσα σε Α και Δ, έτσι ώστε να αφήνει τον γραμμή αδιάφορο μεταξύ Α και Δ. Πάντα σε ισορροπία Nash σε μεικτές στρατηγικές οι παίκτες πρέπει να είναι αδιάφοροι μεταξύ των στρατηγικών που παίζουν με θετική πιθανότητα. Μπορείτε να σκεφτείτε γιατί;

(Hint: Αν ο γραμμή δεν είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο στρατηγικών του, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας, προτιμάει την πάνω γραμμή. Γιατί τότε να κάνει μίξη;)

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να λύσουμε για μεικτές στρατηγικές ως εξής: Έστω ότι ο στήλη παίζει Α με πιθανότητα q και δεξιά με πιθανότητα $1-q$. Ας υπολογίσουμε την προσδοκώμενη (μέση) χρησιμότητα του γραμμή από τη στρατηγική Α.

$$EU_{\Gamma}^{A} = q*1+(1-q)*(-1) = 2q-1$$

Με τονίδιο τρόπο, δεδομένου ότι ο στήλη παίζει τη μεικτή στρατηγική $q,(1-q)$, ας υπολογίσουμε την προσδοκώμενη χρησιμότητα του γραμμή αν αυτό (ο γραμμή) παίξει Δ:

$$EU_{\Gamma}^{\Delta} = q*(-1)+(1-q)*1 = 1-2q$$

Άρα στην ισορροπία Nash, ο στήλη θα επιλέγει το q ώστε ο γραμμή να είναι αδιάφορος μεταξύ Α και Δ. Ή αλλιώς, θα επιλέγει το q έτσι ώστε $EU_{\Gamma}^{A} = EU_{\Gamma}^{\Delta}$. Λύνοντας αυτήν την εξίσωση παίρνουμε την στρατηγική ισορροπίας του στήλη, q^*:

$$EU_{\Gamma}^{A} = EU_{\Gamma}^{\Delta} \Leftrightarrow 2q-1 = 1 = 2q \Leftrightarrow q^* = \frac{1}{2}$$

Αναλόγως η στρατηγική p του γραμμή πρέπει να αφήνει τον στήλη αδιάφορο ανάμεσα σε Α και Δ.

$$EU_{\Sigma}^{A} = p*(-1)+(1-p)*1 = 1-2p$$
$$EU_{\Sigma}^{\Delta} = p*1+(1-p)*(-1) = 2p-1$$

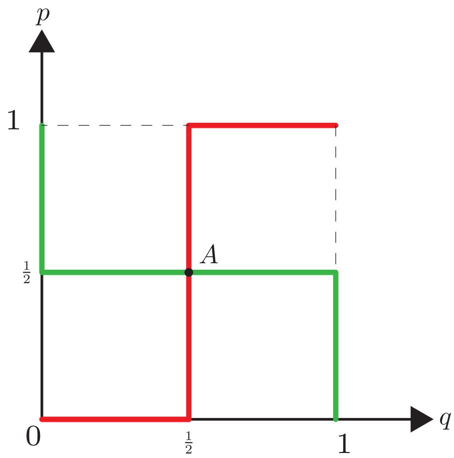
και επομένως για να είναι ο στήλη αδιάφορος μεταξύ Α και Δ θα πρέπει ο γραμμή να επιλέξει p:

$$EU_{\Sigma}^{A} = EU_{\Sigma}^{\Delta} \Leftrightarrow 1-2p = 2p-1 \Leftrightarrow p^* = \frac{1}{2}$$

Η ισορροπία Nash σε μεικτές στρατηγικές είναι επομένως $(p^*,q^*) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, δηλαδή ο γραμμή παίζει Α με πιθανότητα $1/2$ και Δ με την ίδια πιθανότητα, και το ίδιο και ο στήλη.

Πριν κλείσουμε τις μεικτές στρατηγικές ας επισημάνουμε ότι οι μεικτές στρατηγικές είναι η γενική περίπτωση από την οποία οι αμιγείς στρατηγικές προκύπτουν ως ειδική περίπτωση για $p=1$ ή $p=0$ (και ανάλογα για τον στήλη).

Για να γίνει αυτό πιο ξεκάθαρο, παρατηρήστε το εξής: όταν $q > \frac{1}{2}$, τότε $EU_{\Gamma}^{A} > EU_{\Gamma}^{\Delta}$, δηλαδή ο γραμμή προτιμάει να παίζει Α από Δ και επομένως θα παίζει Α με πιθανότητα 1 και Δ με πιθανότητα 0 ($p=1$). Ανάλογα, όταν $q < \frac{1}{2}$, τότε $EU_{\Gamma}^{A} < EU_{\Gamma}^{\Delta}$, δηλαδή ο γραμμή προτιμάει να παίζει Δ από Α και επομένως θα παίζει Α με πιθανότητα 0 και Δ με πιθανότητα



Σχήμα 1.5: Μεικτή στρατηγική των δύο παικτών.

1 ($p=0$). Και όταν $q=\frac{1}{2}$, τότε $EU_{\Gamma}^{A}=EU_{\Gamma}^{\Delta}$, δηλαδή ο γραμμή είναι αδιάφορος μεταξύ A και Δ και επομένως θα παίζει A με οποιαδήποτε πιθανότητα $p\in[0,1]$. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 1.5, όπου με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η άριστη στρατηγική του γραμμή ως συνάρτηση της (μεικτής) στρατηγικής του στήλη.

Αντίστοιχα η πράσινη γραμμή απεικονίζει την άριστη μίξη του στήλη ως συνάρτηση της (μεικτής) στρατηγικής του γραμμή: Όταν ο γραμμή παίζει A με πιθανότητα μεγαλύτερη του $\frac{1}{2}$ τότε ο στήλη προτιμάει να παίζει Δ μόνο δηλαδή θέλει να παίζει A με πιθανότητα $q=0$. Όταν ο γραμμή παίζει A με πιθανότητα μικρότερη του $\frac{1}{2}$, τότε ο στήλη προτιμάει να παίζει A με πιθανότητα $q=1$. Και όταν ο γραμμή παίζει A και Δ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, τότε ο στήλη είναι αδιάφορος μεταξή A και Δ και επιλέγει οποιοδήποτε $q\in[0,1]$. Αυτό δείχνει η πράσινη γραμμή που δίνει την άριστη απάντηση του στήλη στις πιθανές στρατηγικές του γραμμή.

Οι δύο γραμμές μας δίνουν την άριστη απόκριση του ένα παίκτη στη στρατηγική του άλλου. Ως άριστη απόκριση του παίκτη i ορίζουμε τη στρατηγική του i που μεγιστοποιεί τις αποδόσεις του δεδομένης της στρατηγικής των άλλων παικτών. Άρα άριστη απόκριση για κάθε παίκτη είναι συνάρτηση των στρατηγικών των άλλων παικτών. Ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε την ισορροπία Nash είναι ως ένα προφίλ τέτοιο ώστε η στρατηγική του κάθε παίκτη είναι άριστη (απόκριση) στις υπόλοιπες στρατηγικές του προφίλ.

Οι ισορροπίες Nash προκύπτουν εκεί που τέμνονται οι δύο γραμμές. Διότι αυτό ακριβώς είναι ισορροπία Nash: Ο στήλη να παίζει άριστα δεδομένης της στρατηγικής του γραμμή (άρα να βρίσκεται πάνω στην πράσσινη γραμμή) ΚΑΙ ο γραμμή να παίζει άριστα δεδομένης της άριστης στρατηγικής του στήλη (και άρα να βρίσκεται πάνω στην κόκκινη γραμμή). Η τομή των δύο γραμμών μας δίνει τις ισορροπίες Nash. Οι γραμμές τέμνονται σε ένα σημείο, το σημείο A που αντιστοιχεί στην ισορροπία Nash σε μεικτή στρατηγική.

Γιατί όμως λέμε ότι οι αμιγείς στρατηγικές προκύπτουν ως υποπερίπτωση των μεικτών στρατηγικών; Για να το δούμε αυτό ας εξετάσουμε ένα τελευταίο στατικό παίγνιο, το εξής:

Παράδειγμα 1.12 Παίγνιο συντονισμού.

		Μαρία		
		Α	Π	
Γιώργος	Α	1,1	0,0	p
	Π	0,0	2,2	$1-p$
		q	$1-q$	

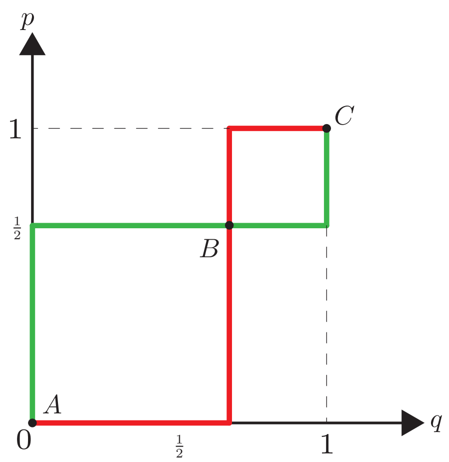
Η Μαρία και ο Γιώργος θέλουν να βρεθούν είτε στην Ακρόπολη Α είτε στο Πασαλιμάνι Π. Προτιμούν το Πασαλιμάνι διότι καλός ο πολιτισμός, αλλά καλύτερη η αστακομακαρονάδα. Ωστόσο βασικό τους μέλημα είναι να βρεθούν (και έχουν ξεχάσει κινητά κλπ.). Το παίγνιο έχει δύο ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές, τις ΑΑ και ΠΠ (θα πρέπει να είστε σε θέση να το δείτε κατευθείαν αυτό). Θέλουμε να βρούμε και τις ισορροπίες Nash σε μεικτές στρατηγικές.

Η προσδοκώμενη χρησιμότητα του Γιώργου από Α (ως συνάρτηση της μεικτής στρατηγικής της Μαρίας q) είναι $EU_\Gamma^A = q$ και η προσδοκώμενη χρησιμότητά του από Π είναι $EU_\Gamma^\Pi = 1-q$. Επομένως ο Γιώργος θα προτιμάει την Ακρόπολη αν και μόνον αν η Μαρία με αρκετά μεγάλη πιθανότητα την Ακρόπολη:

$$EU_\Gamma^A > EU_\Gamma^\Pi \Leftrightarrow q > \frac{2}{3}$$

Ανάλογα (υπολογίστε το), η Μαρία θα προτιμάει την Ακρόπολη όταν:

$$EU_M^A > EU_M^\Pi \Leftrightarrow p > \frac{2}{3}$$



Σχήμα 1.6: Μεικτές στρατηγικές των δύο παικτών.

Οι άριστες απαντήσεις του Γιώργου (κόκκινες) στις πιθανές μίξεις της Μαρίας και της Μαρίας (πράσινες) στις διάφορες μίξεις του Γιώργου δίνονται στο σχήμα 1.6. Οι τομές των δύο γραμμών μας δίνουν τα σημεία ισορροπίας (μεικτής) κατά Nash. Προσέξτε ότι τα σημεία είναι τρία (A,B,C). Τα σημεία A και C αντιστοιχούν στις ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές (όπου οι δύο πάνε είτε στην Ακρόπολη με πιθανότητα 1 είτε στο Πασαλιμάνι με πιθανότητα 1. Το σημείο B αντιστοιχεί στην ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές όπου οι δύο πάνε στην Ακρόπολη με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και στο Πασαλιμάνι με πιθανότητα $\frac{1}{3}$.

1.5.3 Τί είναι η ισορροπία Nash;

Σε όλη την συζήτηση που προηγήθηκε, εστιάσαμε πάνω στην ισορροπία Nash ως λύση ενός παιγνίου. Γεννιέται όμως φυσικά η απορία: γιατί να περιμένουμε ότι ένα παίγνιο θα παιχτεί ως ισορροπία Nash; Στο ερώτημα αυτό υπάρχουν πολλές ανταγωνιστικές αλλά και συμπληρωματικές απαντήσεις. Οι Kreps 2009 και Mas-Colell, Michel Whinston και Jerry Green 1995 έχουν πολύ καλή συζήτηση για το τί είναι η ισορροπία Nash και γιατί θα περιμέναμε η λύση ενός παιγνίου ορθολογικών παικτών να είναι τελικά ισορροπία Nash. Εδώ θα συζητήσουμε σύντομα κάποια από τα πιο σημαντικά επιχειρήματα. Δεν υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος να ερμηνεύσουμε την ισορροπία Nash σε όλα τα παίγνια. Πιθανώς η προσέγγιση που περιγράφει καλύτερα γιατί η ισορροπία Nash είναι ικανοποιητική λύση για ένα παίγνιο να μην δουλεύει για κάποιο άλλο. Όλες όμως οι προσεγγίσεις μαζί πιθανώς μας δίνουν μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για της σημασίας της ισορροπίας Nash στην θεωρία παιγνίων.

1. Η ισορροπία Nash ως *αναγκαία συνθήκη* επίλυσης ενός παιγνίου. Αυτή η ιδέα για την ισορροπία Nash μας λέει ότι εάν υπάρχει κάποιος τρόπος να παιχτεί το παίγνιο, αυτό θα αποτελεί απαραίτητα ισορροπία Nash. Δηλαδή ρωτάει τί ιδιότητες θα πρέπει να έχει μια λύση του παιγνίου και η απάντηση είναι ότι για να είναι ισορροπία θα πρέπει κατά κάποιον τρόπο να «κρατάει» όλους του παίκτες σε αυτό το προφίλ. Αυτή ακριβώς είναι και η ιδιότητα της ισορροπίας Nash. Είδαμε όταν την ορίσαμε ότι είναι ένα προφίλ από το οποίο κανείς δεν παρεκκλίνει μονομερώς. Αυτή είναι η βασική ιδιότητα που θα περιμέναμε από μία λύση: αν κάποιος έχει κίνητρο να παρεκκλίνει, τότε δεν θα πληροί τις απαιτήσεις της ισορροπίας, δεν θα μπορεί να προκύπτει ως ο τρόπος που παίκτες τυπικά συμπεριφέρονται σε μια κοινωνία. Για να το θέσουμε αλλιώς, αυτό το προφίλ δεν θα περιμένουμε να απαντάται όταν πραγματικοί άνθρωποι παίζουν το παίγνιο γιατί κάποιος θα έχει κίνητρο να αλλάξει την στρατηγική του.
   Αυτή η ερμηνεία της ισορροπίας Nash έχει κάτι ικανοποιητικό και μη ικανοποιητικό ταυτόχρονα. Μας λέει ότι η ισορροπία ικανοποιεί κάποιες ελάχιστες απαιτήσεις που θα είχαμε από οποιαδήποτε έννοια ισορροπίας: για να είναι ισορροπία ένα προφίλ, θα πρέπει να μην θέλουν οι παίκτες από αυτό. Ταυτόχρονα όμως δεν εξηγεί γιατί να θέλουμε να παίξουμε κάποιες ισορροπίες Nash που συχνά έχουν ανεπιθύμητες ιδιότητες. Για παράδειγμα δείτε το παίγνιο του πίνακα 1.8. Σε αυτό έχουμε δύο ισορροπίες Nash: (Κ, Α) και (Π, Δ) (βεβαιωθείτε ότι μπορείτε να το δείτε χωρίς κανένα πρόβλημα). Η πρώτη ισορροπία Nash μας προβληματίζει ιδιαίτερα γιατί σε αυτήν ο παίκτης γραμ-

	Α	Δ
Π	3, 4	4, 15
Κ	3, 2	-100, 1

Πίνακας 1.8: Ισορροπία Nash με ασθενώς κυριαρχούμενη στρατηγική.

   μή παίζει το Κ που είναι ασθενώς κυριαρχούμενη στρατηγική. Κι αυτό είναι ιδιαίτερα ανησυχητικό γιατί αυτή η στρατηγική στην καλύτερη του δίνει αποδόσεις ίσες με 3, τις οποίες μπορεί να πάρει και από Π, ενώ εάν ο στήλη κινηθεί δεξιά, ο γραμμή θα έχει μεγάλες απώλειες (-100). Οποιοσδήποτε ορθολογικός παίκτης-γραμμή, δεν θα διακινδύνευε ποτέ την κάτω γραμμή, γιατί μπορεί μόνο να τον οδηγήσει σε μεγάλη ζημιά. Ωστόσο το προφίλ (Κ, Α) αποτελεί ξεκάθαρα ισορροπία Nash.
   Από την συζήτηση προκύπτει ότι η έννοια της ισορροπίας Nash μας βοηθάει να περιορίσουμε τον αριθμό των προφίλ που θεωρούμε ότι μπορεί να αποτελέσουν λύση του παιχνιδιού (ας πούμε στο παραπάνω παράδειγμα από 4 στα 2), αλλά εφόσον την βλέπουμε ως αναγκαία και όχι ικανή συνθήκη δεν εξηγεί γιατί κάποια συγκεκριμένη ισορροπία θα παιχτεί.
2. Η ισορροπία Nash ως προφανής λύση όταν υπάρχει *διαπραγμάτευση πριν το παιχνίδι*

(pre-play negotiation). Κάποιες φορές οι παίκτες ενδέχεται να μπορούν να συζητήσουν για το πώς θέλουν να παίξουν το παιχνίδι. Κατά τη διάρκεια αυτής της συζήτησης ή διαπραγμάτευσης ενδέχεται να φτάσουν σε μια μη δεσμευτική συμφωνία. Η συμφωνία είναι μη δεσμευτική γιατί όπως έχουμε πει εξετάζουμε μόνο μη συνεργατικά παίγνια. Τίποτα βέβαια δεν διασφαλίζει ότι οι παίκτες θα έρθουν σε συμφωνία σε όλα τα παίγνια. Ωστόσο αν σε κάποιο παίγνιο οι παίκτες φτάσουν σε συμφωνία, θα περιμέναμε αυτή η συμφωνία να είναι αυτο-πληρούμενη (self-fulfilling) με την έννοια ότι κανείς από τους παίκτες δεν θα έχει κίνητρο να την παραβεί. Αυτή ακριβώς είναι κι η ιδιότητα που μας διασφαλίζει η ισορροπία Nash.

Δείτε για παράδειγμα την μάχη των φύλων. Ο Γιώργος και η Μαρία θέλουν να περάσουν το βράδυ μαζί. Μπορούν να πάνε είτε στην Όπερα (Ο) είτε σε έναν αγώνα μποξ (Μ). Όπως φαίνεται από τις αποδόσεις του παιγνίου το βασικό τους μέλημα είναι να βρεθούν. Ο Γιώργος προτιμάει βέβαια το μποξ ενώ η Μαρία την όπερα, αλλά εάν γνωρίζουν ότι ο άλλος θα πάει στο ένα από τα δύο, θέλουν κι αυτοί να βρεθούν εκεί.

		Μαρία	
		Ο	Μ
Γιώργος	Ο	2,4	0,0
	Μ	0,0	4,2

Ας πούμε λοιπόν ότι ο Γιώργος με την Μαρία συνεννοούνται πριν το παιχνίδι και ας πούμε ότι συμφωνούν να βρεθούν τελικά στην Όπερα. Φεύγουν από το σπίτι και η μπαταρία των κινητών τους πέφτει, οπότε δεν έχουν τρόπο να συνεννοηθούν στον δρόμο για να αλλάξουν την απόφασή τους. Το παίγνιο είναι πλέον στατικό. Πρέπει ταυτόχρονα και οι δύο να κάνουν την κίνησή τους χωρίς ο ένας να γνωρίζει στα σίγουρα τί κάνει ο άλλος. Εφόσον κατέληξαν σε συμφωνία (Ο, Ο), περιμένουμε ότι αυτή τους η συμφωνία θα αυτο-επιβεβαιωθεί. Δεν είναι λογικό για κανέναν τους να αλλάξει την στρατηγική του εφόσον περιμένει ότι ο άλλος θα πάει στην Όπερα. Και το ζευγάρι αυτό ακριβώς περιμένει γιατί έφτασαν σε συμφωνία κατα την διαπραγμάτευση που προηγήθηκε.

Επομένως η ισορροπία Nash μπορεί πολλές φορές να πιάσει αυτήν την πτυχή της στρατηγικής αλληλεπίδρασης. Ιδιαίτερα στα παίγνια συντονισμού όπως αυτό που παίζει ο Γιώργος με την Μαρία, η ισορροπία Nash δεν μπορεί να προβλέψει μοναδική λύση, αλλά μας λέει ότι εάν έχουμε μια τέτοια περίπτωση θα περιμένουμε τα ζευγάρια (που θέλουν να συναντηθούν και δεν αποφεύγουν ο ένας τον άλλον) να καταλήγουν τελικά στο ίδιο μέρος. Είτε στην Όπερα και οι δύο, αν αυτήν την φορά αποφάσισαν να κάνουν το χατήρι της Μαρίας, είτε στο Μποξ αν ήταν η σειρά του Γιώργου. Η Ισορροπία Nash δηλαδή μπορεί να προβλέψει τί κάνουν τα ζευγάρια που θέλουν να βγουν μαζί: καταλήγουν στο ίδιο μέρος. Και μπορεί να μην μπορεί να προβλέψουμε ειδικά το μέρος στο οποίο θα καταλήξουν, αλλά μπορούμε να πούμε ότι ξέρουμε ότι δεν θα είναι (Ο, Μ) δηλαδή ο ένας εδώ κι ο άλλος εκεί, και επίσης ξέρουμε ότι αφ' ής στιγμής «κλειδώσουν» σε μια συμφωνία, πχ (Μ, Μ), τελικά θα μείνουν αμφότεροι σε αυτήν αφού κανένας δεν έχει κίνητρο να παρεκκλίνει.

3. Η ισορροπία Nash ως *σταθερή κοινωνική σύμβαση*. Ίσως η πιο ικανοποιητική ερμηνεία της ισορροπίας Nash είναι να αντιμετωπίζουμε τα προφίλ της ισορροπίας ως σταθερές κοινωνικές συμβάσεις. Ας πάρουμε για παράδειγμα τον τρόπο που οδηγούμε, αν δηλαδή οδηγούμε από την αριστερή ή την δεξιά πλευρά του δρόμου κι ας προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε ένα χαρακτηριστικό (και σαφέστατα αφαιρετικό) παίγνιο δύο ατόμων που αποφασίζουν από ποια πλευρά του δρόμου θα οδηγήσουν.

	Α	Δ
Α	3, 4	-3, -3
Δ	-3, -3	3, 4

Πίνακας 1.9: Συντονισμός οδήγησης.

Ο πίνακας 1.9 παρουσιάζει τις αποδόσεις που λαμβάνουν οι δύο παίκτες από κάθε πιθανή έκβαση του παιγνίου. Εάν οι δύο παίκτες συντονιστούν και οδηγήσουν αμφότεροι είτε στην αριστερή (Α, Α) είτε στην δεξιά (Δ, Δ) πλευρά του δρόμου, θα φτάσει ο καθένας στην δουλειά του και θα λάβουν ο μεν γραμμή 3 μονάδες, ο δε στήλη 4 μονάδες χρησιμότητας (υποθέτουμε ότι ο στήλη απολαμβάνει την δουλειά του περισσότερο από τον γραμμή...). Εάν όμως δεν συντονιστούν και ο ένας οδηγήσει από την δεξιά πλευρά ενώ ο άλλος από την αριστερή, θα συγκρουστούν και θα καταλήξουν να πληρώνουν νοσοκομεία και επισκευές αυτοκινήτων χάνοντας ο καθένας από 3 μονάδες χρησιμότητας. Για διαφορετικούς πιθανώς ιστορικούς λόγους οι περισσότερες κοινωνίες μέσα από επαναλαμβανόμενη αλληλεπίδραση για δεκαετίες κατέληξαν να οδηγούν τα κάρα και εν συνεχεία τα αυτοκίνητα στο δεξί μέρος του δρόμου. Άλλες (Ηνωμένο Βασίλειο, Κοινοπολιτεία, Ιαπωνία κλπ) συντονίστηκαν στην αριστερή πλευρά.
Η μία ισορροπία Nash προέκυψε ως σταθερή κοινωνική σύμβαση κοινωνιών που συντονίστηκαν αριστερά ενώ οι άλλη ως σταθερή κοινωνική σύμβαση που για τους δικούς τους ιστορικούς λόγους συντονίστηκαν στην δεξιά πλευρά. Ως έννοια ισορροπίας η ισορροπία Nash δεν μπορεί να προβλέψει (πιθανώς χωρίς περισσότερα κοινωνιολογικά ή ιστορικά στοιχεία) εάν μια συγκεκριμένη χώρα θα παίξει (Α, Α) ή (Δ, Δ). Μπορεί όμως να περιγράψει το πού θα συγκλίνουν να παίζουν οι χώρες από όλα τα πιθανά προφίλ: είτε (Α, Α) είτε (Δ, Δ). Η θεωρία παιγνίων αποκλείει να δούμε χώρες στις οποίες ο ένας οδηγεί αριστερά και ο άλλος δεξιά και συγκρούονται, ακόμα κι αν οι οδηγοί αφεθούν ελεύθεροι, χωρίς νομικούς περιορισμούς να επιλέξουν πλευρά οδήγησης.
Αν στην Ελλάδα αύριο οι νόμοι που καθορίζουν την πλευρά οδήγησης καταργούντο και αφηνόμαστε όλοι ελεύθεροι να οδηγούμε σε όποια πλευρά θέλουμε, η διαίσθησή μας μάς λέει ότι η σταθερή κοινωνική σύμβαση που έχουμε αναπτύξει θα μας έκανε να συνεχίσουμε να παίζουμε (Δ, Δ). Και αν κάποιος μας βρεθεί στο Ηνωμένο Βσίλειο, ακόμα κι αν δεν υπάρχουν νόμοι που τον υποχρεώνουν, ακόμα και με αριστεροτίμονο αυτοκίνητο, θα υιοθετούσε την σταθερή εκεί κοινωνική σύμβαση και θα οδηγούσε αριστερά. Και αν για οποιοδήποτε λόγο στην Ελλάδα πιστεύαμε όλοι ότι αύριο θα αλλάξουμε πλευρά (αν για παράδειγμα χωρίς νομοθετική παρέμβαση όλα τα κανάλια έκαναν ρεπορτάζ στα οποία όλοι δήλωναν ότι από αύριο οδηγούμε αριστερά και για κάποιο αδιευκρίνηστο λόγο πιστεύαμε ότι η σύμβαση άλλαξε), τότε θα ήταν άριστο για εμάς να αλλάξουμε σε (Α, Α). Η ισορροπία Nash ίσως δεν μπορεί να μας πει ποια από τις δύο ισορροπίες θα παίξει η συγκεκριμένη χώρα, μπορεί όμως να προβλέψει ότι καμία χώρα δεν θα παίξει (Α, Δ) ή (Δ, Α)!

1.5.4 Πολλαπλές ισορροπίες και επιλογή ισορροπίας

Στα παίγνια που είδαμε, συχνά είδαμε ότι υπάρχουν περισσότερες από μία ισορροπίες Nash. Μπορούμε να ξέρουμε ποια από αυτή θα επιλέξουν οι παίκτες; Ή τουλάχιστον αν κάποια είναι πιο πιθανή και πόσο; Το ζήτημα είναι πολύ σύνθετο για κάποια παίγνια για να επιχειρήσουμε έστω και μία διαισθητική απάντηση εδώ. Είναι πέρα από τις ανάγκες της θεωρίας παιγνίων για ένα εισαγωγικό μάθημα και για όσοι δεν έχετε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα παίγνια θα μπορούσατε να αφήσετε προς το παρόν αυτήν την συζήτηση.

Θα μπορούσαμε ίσως να συζητήσουμε άτυπα για το αν υπάρχει κάποιος πιο προφανής τρόπος να επιλέξουμε ανάμεσα σε πολλαπλές ισορροπίες Nash. Σε πρώτο επίπεδο έχουν προταθεί δύο κριτήρια: κυριαρχία αποδόσεων (payoff dominance) και κυριαρχία ρίσκου (risk dominance). Για να δώσουμε ένα πολύ απλό παράδειγμα της πρώτης, ας σκεφτούμε το εξής παίγνιο:

	Δ	Σ
Δ	1, 1	0,0
Σ	0,0	11, 11

Πίνακας 1.10: Κυριαρχία αποδόσεων

Το παίγνιο έχει δύο ισορροπίες Nash: (Δ, Δ) και (Σ, Σ). Ενώ αν βρεθούμε στην ισορροπία (Δ, Δ) κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να παρεκκλίνει μονομερώς, θα περιμέναμε ότι αν αφήναμε δύο παίκτες να παίξουν αυτό το παίγνιο, ακόμα και χωρίς συνεννόηση, να κατέληγαν στην ισορροπία (Σ, Σ) την οποία προφανώς προτιμούν και οι δύο παίκτες. Είναι, όπως θα συζητήσουμε αργότερα, Pareto άριστη. Το κριτήριο ωστόσο αυτό δεν μπορεί να εφαρμοστεί πάντοτε. Ας σκεφτούμε το εξής παίγνιο όπως παρουσιάζεται στον Rapoport, Anatol 1989 και απεικονίζεται από τον πίνακα 1.11

	Α	Δ
Π	99, 49	0,0
Κ	0,0	1, 51

Πίνακας 1.11: Κυριαρχία ρίσκου

Εδώ, πάλι, (Π, Α) και (Κ, Δ) είναι ισορροπίες Nash, ωστόσο οι δύο παίκτες έχουν διαφορετική αντίληψη για το ποια ισορροπία θα προτιμούσαν. Ο παίκτης γραμμή προτιμάει την πρώτη ενώ ο παίκτης στήλη την δεύτερη. Το κριτήριο κυριαρχίας ρίσκου δουλεύει ως εξής: ο παίκτης γραμμή θα «ενέδιδε» στην πίεση του παίκτη στήλη για να πάνε στην ισορροπία (Κ, Δ) μόνον αν πιστεύει ότι ο παίκτης στήλη θα επέλεγε Δ με πιθανότητα τουλάχιστον 0.99. Αντιθέτως ο παίκτης στήλη θα «ενέδιδε» στην ισορροπία που προτιμάει ο παίκτης γραμμή εάν πίστευε ότι ο παίκτης γραμμή θα επέλεγε Π με πιθανότητα ίση ή μεγαλύτερη από 0.49. Επομένως είναι πιο «επικίνδυνο» για τον παίκτη στήλη να επιμείνει στην στρατηγική Δ απ' ό,τι είναι για τον παίκτη γραμμή να επιμείνει στην στρατηγική Π. Επομένως η στρατηγική (Π, Δ) είναι η κυρίαρχη ρίσκου στρατηγική. Για πιο σύνθετα παίγνια, η επιλογή ισορροπίας γίνεται ένα ιδιαίτερα δύσκολο έργο. Για όποιον ενδιαφέρεται, το Harsanyi, J. C. and Selten, R. 1988 αποτελεί το σημείο αναφοράς από δύο Νομπελίστες που έκαναν μια τιτάνια προσπάθεια να απαντήσουν στο θέμα.

Παράδειγμα 1.13 Παίγνιο διαφθοράς

	Δ	Σ
Δ	1, 1	-10,0
Σ	0,-10	11, 11

Ωστόσο πριν κλείσουμε καλό είναι να σκεφτούμε λίγο περισσότερο την ιδέα της επιλογές ισορροπίας και το αν επιλέγοντας ισορροπία με αυτά τα κριτήρια θα μας οδηγήσει σε ασφαλή πρόβλεψη για το πώς θα έπαιζε μια κοινωνία ανθρώπων ένα παίγνιο. Ας ξαναδούμε το παίγνι που απεικονίζεται στο παράδειγμα 1.13 με μια κάπως διαφορετική ανάγνωση των αποδόσεων και των στρατηγικών. Ας ερμηνεύσουμε το παίγνιο ως την απόφαση που πρέπει να πάρει μια κοινωνία για το αν θα παίξει ένα παίγνιο με διαφθορά (Δ), π.χ. αν θα αποφασίσει να περάσει σε χρηματισμό ενός λειτουργού για ίδιο όφελος, ή αν θα συμμορφωθεί με τον νόμο (Ν). Και ας το ερμηνεύσουμε υπό το πρίσμα της *σταθερής κοινωνικής σύμβασης* που συζητήσαμε προηγουμένως. Υπάρχουν πάλι δύο ισορροπίες Nash η (Δ, Δ) και η (Σ, Σ). Μπορούμε να φανταστούμε δύο κοινωνίες να έχουν «κλειδώσει» σε δύο διαφορετικές ισορροπίες. Η κοινωνία του Βορρά ακολουθεί τον νόμο και παίζουν (Σ, Σ). Σκεφτείτε για παράδειγμα την επιλογαή για το αν θα επιχειρήσει χρηματισμό ενός δημοσίου υπαλλήλου που αντιμετωπίζε κάποιος σε μια χώρα σαν την Ελβετία ή την Φινλανδία. Και σκεφτείτε ότι ένα τέτοιο παίγνιο παίζεται από περισσότερους παίκτες. Αν είμαι ο παίκτης γραμμή και σκέφτομαι αν θα προσφέρω ένα χρηματικό ποσό, γνωρίζω ότι όλοι στον Βορρά παίζουν Σ. Επομένως πηγαίνοντας στο Δ, κινδυνεύω να τιμωρηθώ με φυλάκιση και αποδόσεις $U^{\Gamma}(\Delta, \Sigma) = -10$. Προφανώς θα συμμορφοθώ και θα παίξω Σ.

Ας σκεφτούμε όμως και την αντίστροφη περίπτωση: ένας βόρειος επενδυτής που έρχεται να επενδύσει στον Νότο. Εδώ όλοι ή σχεδόν όλοι παίζουν Δ. Εάν πιστεύω ότι ο άλλος σίγουρα θα παίξει Δ, εγώ προχωρώντας με «τον σταυρό στο χέρι» θα μπλέξω στα γρανάζια της γραφειοκρατείας και θα καταλήξω να έχω αποδώσεις $U^{\Sigma}(\Sigma, \Delta) = 0$. Δεν θα κάνω την δουλειά μου. Θα προτιμήσω να παίξω Δ αν είμαι σίγουρος ότι ο άλλος παίζει Δ για να μπορέσω να προχωρήσω.

Μπορεί αυτό το απλούστατο υπόδειγμα να μας εξηγήσει γιατί κάποιες κοινωνίες παίζουν αναποτελεσματικές ισορροπίες; Πιθανώς μπορεί να μας δώσει αρκετά ενδιαφέρουσα διαίσθηση. Κοινωνίες στις οποίες ο σεβασμός του νόμου έχει επικρατήσει ως σταθερή κοινωνική σύμβαση, παίζουν συστηματικά την ισορροπία ΣΣ. Οι κανόνες που ισχύουν έχουν θετικές εξωτερικότητες (βλ. συζήτηση για εξωτερικότητες στο ομώνυμο κεφάλαιο) πάνω στην παραγωγικότητα, δεν σπαταλούνται πόροι για υφαρπαγή πλεονάσματος μεταξύ των μελών της κοινωνίας και είναι όλοι καλύτερα: $U^i(\Sigma, \Sigma) = 11$.

Κοινωνίες όμως όπως του Νότου έχουν «κλειδώσει» σε μια «κακή» (αναποτελεσματική) ισορροπία. Ενώ είναι αναποτελεσματικό για όλους μας να σπαταλάμε πόρους και χρόνο σε παίγνια διαφθοράς αν είμαστε βέβαιοι ότι αυτός είναι ο μόνος τρόπος να προχωρήσουμε (αλλιώς θα καταλήξουμε με αποδόσεις 0), είναι ορθολογικό να παίξουμε Δ.

Τί θα χρειαζόταν για να περάσει μία κοινωνία από την ισορροπία (Δ, Δ) στην ισορροπία (Σ, Σ); Η απάντηση θα ήταν ότι κανένας δεν θα φύγει αν φύγει μονομερώς. Θα πρέπει να γίνει μια *ταυτόχρονη* μετατόπιση όλων των παικτών (ή τουλάχιστον μιας κριτικής μάζας) από την ισορροπία (Δ, Δ) στην ισορροπία (Σ, Σ). Κάτι τέτοιο απαιτεί τεράστιο συντονισμό. Κανένας δεν το κάνει μόνος του γιατί θα τιμωρηθεί. Είναι ατομικά ορθολογικό για τον κάθε πολίτη να παίξει την κακή ισορροπία διότι αλλιώς θα έχει ακόμα χειρότερες αποδόσεις. Κι ας είναι κοινωνικά επιβλαβές ή και καταστροφικό γιατί κλειδώνει την κοινωνία σε μια ισορροπία χαμηλής ευημερίας.

Η ύπαρξη πολλαπλών ισορροπιών μπορεί να είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για να εξηγήσουμε πώς μερικές κοινωνίες οδηγούνται για ιστορικούς πιθανώς λόγους σε μία ισορροπία ενώ άλλες κοινωνίες σε άλλη. Σκεφτείτε ας πούμε το παίγνιο σε ποια πλευρά του δρόμου οδηγούμε. Μπορείτε να κατασκευάσετε αποδόσεις ενός τέτοιου παιγνίου για 2 παίκτες; Μπορείτε να δείτε ότι κάποιες χώρες καταλήγουν να οδηγούν στην Αριστερή πλευρά ενώ άλλες καταλήγουν στην δεξιά;

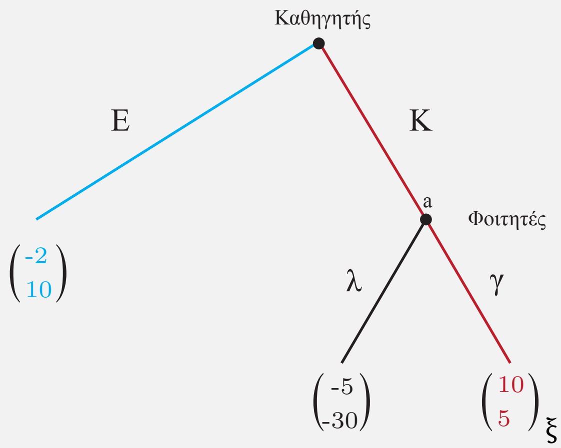
1.6 Δυναμικά παίγνια και τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου

Ως τώρα μελετήσαμε παίγνια όπου οι παίκτες παίζουν ταυτόχρονα και το παιχνίδι λήγει μετά την ταυτόχρονη κίνηση όλων των παικτών. Τα περισσότερα παίγνια όμως (π.χ. σκάκι) παίζονται στο χρόνο. Χρειαζόμαστε λοιπόν εργαλεία ανάλυσης παιγνίων που εκτυλίσσονται στο χρόνο, δηλαδή Δυναμικών Παιγνίων όπως τα αποκαλούμε. Έχουμε την ισορροπία Nash ως λύση των στατικών (ταυτόχρονων) παιγνίων. Μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε ως λύση δυναμικών παιγνίων; Η απάντηση είναι μεν θετική, αλλά όπως θα δούμε η ισορροπία Nash δεν είναι αρκετά ικανοποιητική από μόνη της ως λύσει δυναμικών παιγνίων: συχνά εμφανίζονται ισορροπίες Nash που συμπεριλαμβάνουν παράλογο παίξιμο από μία ή περισσότερες πλευρές.

Γιαυτό και θέλουμε μια έννοια ισορροπίας που να αποκλείει παράλογες συμπεριφορές από παίκτες. Ας δούμε καταρχάς γιατί δε μας ικανοποιεί απόλυτα η ισορροπία Nash.

Παράδειγμα 1.14 Η απειλή των φοιτητών

Ξαφνικά όλοι οι φοιτητές της Μικροοικονομικής ΙΙΙ, συνασπίζεστε και μου στέλνετε έναν εκπρόσωπό σας που μου δηλώνει τα εξής: «Αν δε μας βάλετε πολύ εύκολα θέματα στις εξετάσεις, εμείς θα παραδόσουμε όλοι λευκή κόλλα. Αυτό έχει κακές συνέπειες για σας διότι θα αμαυρωθεί η φήμη σας ως καθηγητής που δε μπορεί να διδάξει κανέναν και έχει μηδενικό ποσοστό επιτυχίας στις εξετάσεις». Το παίγνιο απεικονίζεται σε εκτεταμένη μορφή στο σχήμα:



Η απειλή σας έχει ένα στοιχείο εκφοβιστικό για μένα διότι πραγματικά η φήμη μου έχει αξία για μένα 5, οπότε αν μου τη στερήσετε μου στερείτε αποδόσεις αξίας 5. Οι αποδόσεις του παιγνίου δίνονται στο σχήμα 1.14. Ας τις αναλύσουμε. Το παίγνιο είναι δυναμικό διότι πρώτα κινούμαι εγώ (αποφασίζω αν θα βάλω εύκολες εξετάσεις Ε ή κανονικές, Κ) και εν συνεχεία κινείστε εσείς και αποφασίζεται αν θα πραγματοποιήσετε την απειλή σας και θα παραδώσετε λευκές κόλλες, λ ή θα γράψετε κανονικά, γ. Αν εγώ ενδώσω και παίξω Ε, λαμβάνω -2 διότι ναι μεν έσωσα τη φήμη μου, αλλά έκανα κακά τη δουλειά μου, ενώ εσείς περάσατε χωρίς κούραση και λάβατε απόδοση 10 (θεωρούμε ότι μετράτε τις αποδόσεις σας κοντόφθαλμα και δεν βλέπετε τις αρνητικές επιπτώσεις που θα έχει η έλλειψη προσπάθειας στο πτυχίο σας και στη ζωή σας). Εάν πάλι εγώ δεν ενδώσω, τότε καλείστε εσείς είτε να πραγματοποιήσετε την απειλή σας, είτε να γράψετε κανονικά. Στην πρώτη περίπτωση εγώ λαμβάνω αποδόσεις -5 διότι αμαυρώθηκε η πολύτιμη φήμη μου και εσείς -30 διότι δεν καταφέρατε τίποτα και έχετε άλλο ένα μάθημα για το Σεπτέμβριο. Στη δεύτερη περίπτωση, λαμβάνω 10 διότι έκανα καλά τη δουλειά μου και έσωσα τη φήμη μου και εσείς λαμβάνετε 5 διότι περάσατε το μάθημα, αλλά με κόπο.

Σε αυτό το παίγνιο, οι στρατηγικές είναι λίγο πιο σύνθετες απ' ό,τι στα στατικά παίγνια. Για μεν τον καθηγητή, οι στρατηγικές είναι δύο: είτε Ε είτε Κ. Για τους φοιτητές όμως που κινούνται δεύτεροι, οι στρατηγικές έχουν πιο πολλές υποπεριπτώσεις. Θυμηθείτε ότι στρατηγική είναι για τους φοιτητές ένα πλήρες σχέδιο δράσης, δηλαδή, πρέπει να τους δίνει οδηγίες για κάθε περίπτωση στην οποία θα κληθούν να παίξουν. Πρέπει λοιπόν να τους δίνει οδηγία για την περίπτωση που ο καθηγητής θα παίξει Ε. Οπότε οι στρατηγικές σας είναι οι εξής:

Στρ. 1: [λ αν ο καθ. παίξει Κ]

Στρ. 2: [γ αν ο καθ. παίξει Κ]

Για να βρούμε όλες (όχι μόνο τις τέλειες) τις ισορροπίες Nashτου παιγνίου, βοηθάει να απεικονίσουμε το παίγνιο σε στρατηγική μορφή:

	λ	γ
Ε	-2, 10	-2, 10
Κ	-5, -30	10, 5

Πίνακας 1.12: Η απειλή των φοιτητών σε απεικόνηση στρατηγικής μορφής

Οι ισορροπίες Nash είναι οι εξής δύο (φαίνονται με κόκκινο στο σχήμα):

Ισορροπία Nash 1: Ε για καθ. και [λ αν Κ] για φοιτητές.

Ισορροπία Nash 2: Κ για καθ. και [γ αν Κ] για φοιτητές.

Το δεύτερο προφίλ Nash πρέπει να είναι ξεκάθαρο γιατί συνιστά ισορροπία. Δεδομένου ότι εσείς γράφετε κανονικά, εγώ προτιμώ να παίξω Κ διότι λαμβάνω 10 αντί για -2. Και δεδομένου ότι εγώ παίζω Κ, εσείς προτιμάτε να γράψετε διότι λαμβάνετε 5 αντί -30.

Το πρώτο προφίλ όμως επίσης συνιστά ισορροπία Nash. Δείτε γιατί. Δεδομένου ότι αν εγώ παίξω Κ εσείς θα με τιμωρήσετε παίζοντας λ, εγώ προτιμώ να βάλω Ε θέματα και να πάρω -2 αντί για -5. Και δεδομένου ότι εγώ παίζω Ε, εσείς ό,τι κι αν απειλήσετε να κάνετε αν εγώ έπαιζα Κ, είναι το ίδιο και το αυτό, διότι ποτέ δεν καλείστε να πραγματοποιήσετε την απειλή σας αφού εγώ παίζω Ε. Άρα δεδομένου ότι εγώ παίζω Ε, εσείς δεν έχετε στρατηγική που να σας δίνει περισσότερη χρησιμότητα από τη στρατηγική 1 και άρα η Ισορροπία Nash 1 είναι όντως ισορροπία.

Η έννοια της ισορροπίας Nash δηλαδή υπονοεί ότι αν εσείς μπορείτε να με πείσετε κάπως ότι εννοείτε την απειλή σας, τότε εγώ θα βάλω εύκολα θέματα (αν με πείσετε ότι εσείς βρίσκεστε στη στρατηγική 1, τότε εγώ θέλω να παίξω Ε). Αυτή η ισορροπία ωστόσο έχει κάτι που δε μας αρέσει: Αν παιχτεί αυτή η ισορροπία, σημαίνει ότι ο καθηγητής «τρώει» μια απειλή που είναι παράλογη. Πού έγκειται το παράλογο αυτής της απειλής; Στο ότι εσείς κάνετε μια απειλή που αν την πραγματοποιήσετε βλάπτετε τον εαυτό σας. Η ισορροπία ενέχει λοιπόν μια στρατηγική για τους φοιτητές που είναι βλαβερή γιαυτούς (τους δίνει -30 αντί για 5). Καθότι όμως η μπλόφα τους ποτέ δεν ξεσκεπάζεται, αποτελεί ισορροπία Nash.

Ως στρατηγική ωστόσο, η στρατηγική ισορροπίας των φοιτητών ενέχει ένα παίξιμο (ή μάλλον μια απειλή για παίξιμο) που δεν είναι πιστευτή διότι είναι παίζοντας αυτό κάνουν κακό στον εαυτό τους. Ο λόγος που αυτή η απειλή είναι κομμάτι της ισορροπίας, είναι διότι βρίσκεται εκτός του «μονοπατιού της ισορροπίας» (off-the-equilibrium-path). Τί είναι τα μονοπάτια της ισορροπίας; Είναι οι δρόμοι (κινήσεις-κόμβοι) που μας οδηγούν στις δύο ισορροπίες. Στο σχήμα 1.14 τα δύο μονοπάτια ισορροπίας έχουν χρώμα μπλε και κόκκινο. Βλέπετε λοιπόν ότι σε κανένα από τα μονοπάτια ισορροπίας δεν παίζεται η απειλή. Γιαυτό και μπορούν οι φοιτητές να την κάνουν, διότι η μπλόφα τους δεν ξεσκεπάζεται σε ισορροπία. Η έννοια της ισορροπίας Nash δε μπορεί να «πιάσει» αυτό το πρόβλημα και επομένως υπάρχουν συχνά σε παίγνια ισορροπίες Nash που ενέχουν μια κακή στρατηγική για έναν ή περισσότερους παίκτες (εδώ για τους φοιτητές). Κάτι τέτοιο θα θέλαμε να το αποκλείσουμε και γιαυτό κάνουμε μια εκλέπτυνση της ισορροπίας Nash ώστε να αποκλείσουμε τις ισορροπίες που έχουν αυτό το ανεπιθύμητο χαρακτηριστικό (τέτοιες ισορροπίες μπορούν να προκύψουν μόνον αν ο ένας παίκτης δεν είναι αρκετά εκλεπτυσμένος ώστε να δεί ότι ο άλλος παίκτης παίζει μια στρατηγική που αν κληθεί να την παίξει πραγματικά δεν τον συμφέρει).

Εμείς θέλουμε σε όλα τα σημεία του παιγνίου να παίζεται η άριστη στρατηγική. Δείτε ότι η στρατηγική 1, ενέχει ένα μη ορθολογικό παίξιμο από τους φοιτητές αν τύχει και βρεθούν στον κόμβο a, ωστόσο στην ισορροπία 1 δε φτάνουν ποτέ στον κόμβο a (ενώ θα θέλαμε να παίζουν ορθολογικά και εκεί).

Η νέα έννοια ισορροπίας λοιπόν που χρησιμοποιούμε στα δυναμικά παίγνια είναι η έννοια της ισορροπίας υποπαιγνίου (subgame perfect equilibrium) ή SPE. Για να ορίσουμε αυτήν την ισορροπία πρέπει να ορίσουμε τί είναι υποπαίγνιο.

Ορισμός 1.12 — Υποπαίγνιο. Ένα υποπαίγνιο (subgame) ενός παιγνίου σε εκτατική μορφή είναι ένα υποσύνολο του παιγνίου που:

1. Αρχίζει από ένα σύνολο πληροφόρησης που περιέχει ένα μόνο κόμβο.
2. Περιέχει όλους τους κόμβους που έπονται.
3. Αν περιέχει έναν κόμβο x, τότε κάθε άλλος κόμβος που ανήκει στο ίδιο σύνολο πληροφόρησης με τον x ανήκει επίσης στο υποπαίγνιο

Στο σχήμα 1.7 δείτε δύο παραδείγματα υποσυνόλων ενός παιγνίου που δεν είναι υποπαίγνια και ένα παράδειγμα υποπαιγνίου. Το κόκκινο σύνολο στο σχήμα.4.1(α΄) παραβιάζει την απαίτηση ένα υποπαίγνιο να αρχίζει από έναν μοναδική κόμβο.

Το υποσύνολο του παιγνίου στο σχήμα 4.1(β΄) αρχίζει μεν από σύνολο πληροφόρησης που περιέχει μοναδικό κόμβο, αλλά δεν περιλαμβάνει όλους τους επόμενους κόμβους. Τέλος στο σχήμα 1.7(γ΄) έχουμε παραβίαση της τρίτης απαίτησης που έχουμε για να αποτελεί ένα υποσύνολο του παιγνίου υποπαίγνιο. Στο παίγνιο αυτό κινείται πρώτα ο παίκτης 1. Στη συνέχεια ο παίκτης 2 κινείται έχοντας δει την κίνηση του παίκτη 1. Τέλος ο παίκτης 3 κινείται ξέροντας τί έχει επιλέξει ο παίκτης 2 αλλά μη έχοντας δει τί έχει παίξει ο παίκτης 1: δείτε ότι ο παίκτης 3 ανάλογα με το τί έχει προηγηθεί βρίσκεται είτε στο σύνολο πληροφόρησης H_1 είτε στο σύνολο πληροφόρησης H_2. Αυτό σημαίνει ότι γνωρίζει την κίνηση του παίκτη 2. Αν ο παίκτης 2 έχει παίξει Α, ο παίκτης 3 το γνωρίζει αφού ξέρει ότι βρίσκεται στο σύνολο πληροφόρησης H_1. Ωστόσο δεν γνωρίζει αν ο παίκτης 1 είχε παίξει L ή R κι επομένως δεν γνωρίζει αν βρίσκεται στο b_1 ή στο b_2. (Ανάλογα αν ο παίκτης 2 είχει παίξει Δ).

Στο σχήμα που ακολουθεί, με διακεκομμένα πλαίσια φαίνονται όλα τα υποπαίγνια του παιγνίου. Με πορτοκαλί χρώμα τα υποπαίγνια που αρχίζουν στους τελικούς κόμβους και με πράσινο το υποπαίγνιο που αρχίζει στον προτελευταίο κόμβο. Παρατηρήστε ότι, ασφαλώς, και το όλο παίγνιο είναι υποπαίγνιο αφού πληροί όλες τις υποθέσεις που αναφέραμε στον ορισμό του υποπαιγνίου.

Ορισμός 1.13 — Τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου (Subgame Perfect Equilibrium - SPE). Ένα προφίλ στρατηγικών (μία για κάθε παίκτη) αποτελεί ισορροπία Τέλεια Ισορροπία Υποπαιγνίου SPE όταν είναι ισορροπία σε κάθε υποπαίγνιο του όλου παιγνίου (και του όλου παίγνιου ασφαλώς).

Δείτε ότι ενώ η ισορροπία 2 αποτελεί SPE, η ισορροπία 1 δεν αποτελεί γιατί στο υποπαίγνιο που αρχίζει στον κόμβο a, δίνει συνταγή στρατηγικής που δεν είναι Nash ισορροπία.

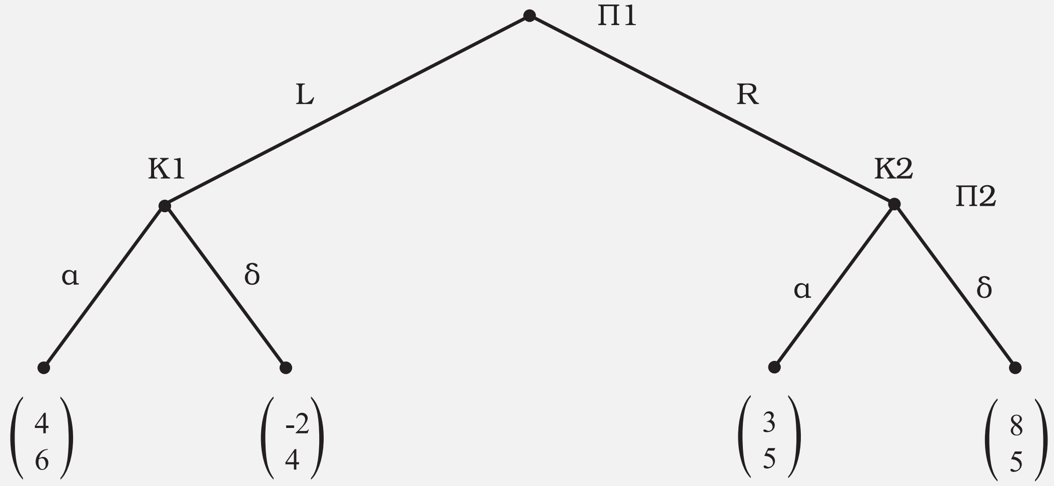
Ηθικό δίδαγμα: Μην επιχειρείτε απειλές που δεν πραγματοποιούνται σε καθηγητές μικροοικονομικής που ξέρουν τί σημαίνει SPE. (Δοκιμάστε ίσως σε οικονομέτρες)!

Για να γίνει πιο κατανοητή η λύση δυναμικών παιγνίων και η εύρεση τέλειων ισορροπιών υποπαιγνίου θα περιγράψουμε την επίλυση των δυναμικών παιγνίων *από το τέλος προς την αρχή*, σε μια διαδικασία που ονομάζεται **οπισθογενής επαγωγή (backwards induction)**. Πηγαίνουμε στους τελικούς κόμβους και απαιτούμε από τον παίκτη που κινείται εκεί να κρατήσει μόνο όσες κινήσεις είναι άριστες (μεγιστοποιούν την χρησιμότητά του). Μόνον αυτές οι κινήσεις μπορούν να είναι μέρος στρατηγικής σε τέλεια ισορροπία υπό παιγνίου.

Έχοντας διαγράψει από τους τελευταίους κόμβους όσες κινήσεις δεν είναι μη βέλτιστες, προχωράμε στους κόμβους πριν από αυτούς. Εκεί όποιος παίκτης κινείται ξέρει ότι αν κινηθεί οι τελικοί παίκτες θα παίξουν μόνο τις κινήσεις που έχουν απομείνει. Επιλέγει λοιπόν τις άριστες κινήσεις δεδομένου ότι οι παίκτες που κινούνται στους τελικούς κόμβους θα παίξουν επίσης άριστα, και διαγράφουμε όποια κίνηση στους κόμβους πριν από το τέλος δεν είναι άριστες. Συνεχίζουμε την διαδικασία από το τέλος προς την αρχή έως ότου απομείνουν μόνο τα προφίλ στρατηγικών που περιέχουν μόνο άριστες κινήσεις σε κάθε υποπαίγνιο.

Στο επόμενο παράδειγμα δείχνουμε πώς λύνουμε για τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου.

Παράδειγμα 1.15 Έστω το παίγνιο που περιγράφεται από το σχήμα. Υπολογίστε τις τέλειες ισορροπίες υποπαιγνίου (S.P.N.E.)



Θα λύσουμε για τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου με οπισθογενή επαγωγή. Πηγαίνουμε και εξετάζουμε έναν έναν τους τελικούς κόμβους. Το παίγνιο έχει δύο τελικούς κόμβους τον Κ1 και τον Κ2. Αρχίζουμε από τον Κ1. Εκεί παίζει ο παίκτης 2. Αν βρεθεί να παίζει στον Κ1, θα παίξει οπωσδήποτε α γιατί αυτή η κίνηση του δίνει 6 ενώ αν παίξει δ θα πάρει μόνο 4. Επομένως στον κόμβο Κ1, μπορούμε να διαγράψουμε την κίνηση δ. Αν πάλι ο παίκτης 2 βρεθεί να παίζει στον άλλο τελικό κόμβο, στον Κ2, οποιαδήποτε από τις κινήσεις α και δ, είναι πιστευτή διότι και οι δύο του δίνουν από 5 μονάδες χρησιμότητας. Έχοντας σβήσει τις κυριαρχούμενες στρατηγικές στους τελικούς κόμβους, το παίγνιό μας παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Επομένως οι μοναδικές στρατηγικές του παίκτη 2 που επιβιώνουν την οπισθογενή επαγωγή είναι οι αα και αδ ή πιο αναλυτικά:

αα = [παίξε α αν βρεθείς στον Κ1 και α αν βρεθείς στον Κ2], και

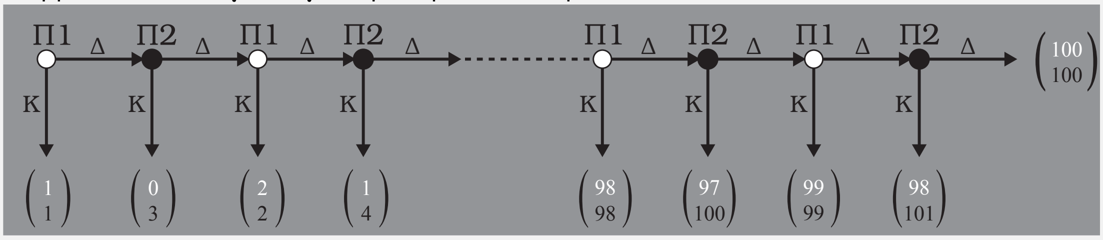
αδ = [παίξε α αν βρεθείς στον Κ1 και δ αν βρεθείς στον Κ2]

Για να βρούμε τις τέλειες ισορροπίες υποπαιγίου θα πρέπει και ο παίκτης 1 να παίζει άριστα δεδομένης της στρατηγικής του παίκτη 2. Αν ο παίκτης 2 παίξει αα, η άριστη στρατηγική για τον παίκτη 1 είναι να παίξει L. Αν πάλι ο παίκτης 2 παίξει αδ, η άριστη στρατηγική για τον παίκτη 1 είναι να παίξει R. Επομένως οι τέλειες ισορροπίες υποπαιγνίου είναι τα προφίλ:

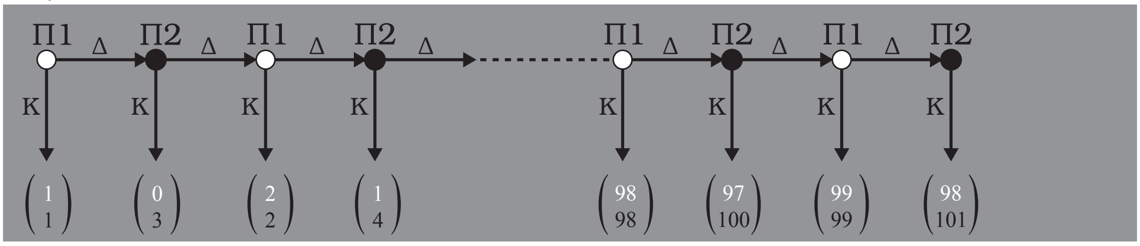
[L, αα]

[R, αδ]

Παράδειγμα 1.16 **Η Σαρανταποδαρούσα.** Το παρακάτω παίγνιο είναι γνωστό ως σαρανταποδαρούσα (centipede) και είναι ένα δυναμικό παίγνιο κατά το οποίο 2 παίκτες εναλλάσονται στις αποφάσεις. Αν κάποιος από τους παίκτες παίξει κάτω (Κ) σε οποιοδήποτε στάδιο, το παίγνιο τελειώνει. Όσο παίζουν δεξιά (Δ) συνεχίζεται για 100 βήματα. Κάθε φορά που κάποιος συνεχίζει προς τα δεξιά αυξάνει τις συνολικές αμοιβές των δύο παικτών αλλά μειώνει τις δικές του. Έτσι οι παίκτες έχουν κίνητρο να πάνε ως κοινωνία δεξιά (μεγέθυνση) αλλά έχουν ταυτόχρονα κι ένα διανεμητικό κίνητρο να λήξουν το παίγνιο για να πάρουν μεγαλύτερο κομμάτι της πίτας από τον άλλο παίκτη. Τί προβλέπει η τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου για την Σαρανταποδαρούσα;



Για να λύσουμε την Σαρανταποδαρούσα με οπισθογενή επαγωγή, θα πάμε στον τελικό κόμβο στον οποίον ο παίκτης 2 επιλέγει είτε δεξιά μεγιστοποιώντας το συνολικό κοινωνικό πλεόνασμα (200) το οποίο ισομοιράζεται, είτε κάτω μεγιστοποιώντας τις δικές του αποδόσεις (101) με μικρή αρνητική επίπτωση πάνω στο συνολικό κοινωνικό πλεόνασμα που κάτω είναι 199. Προφανώς ένας παίκτης που μεγιστοποιεί τις αποδόσεις του θα επέλεγε κάτω. Επομώνς στον τελικό κόμβο, το Δ για τον παίκτη 2 δεν θα επιλεγεί ποτέ και μπορούμε να το διαγράψουμε:

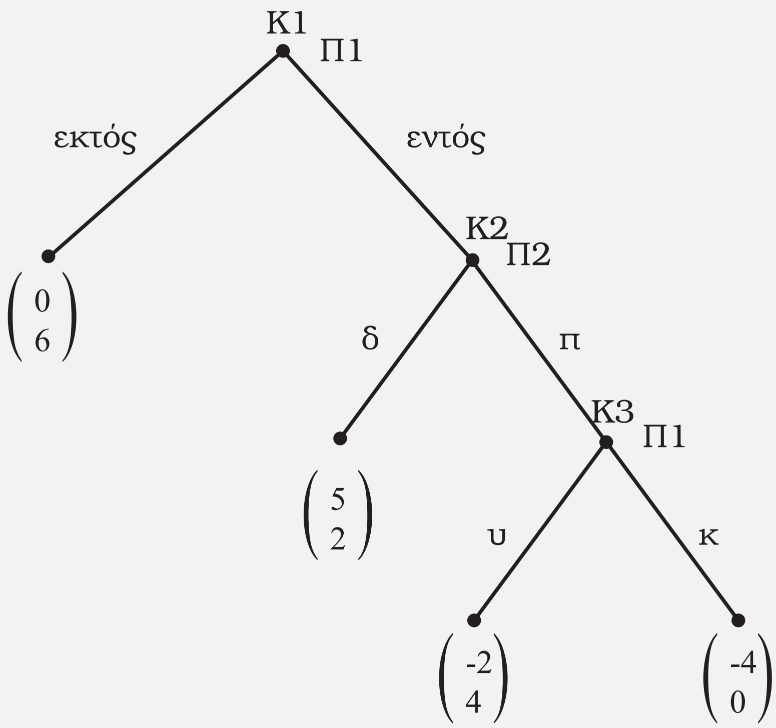


Προχωρώντας ένα επίπεδο, πάνω, στον προτελευταίο κόμβο κινείται ο παίκτης 1. Αυτός γνωρίζει ότι εάν παίξει Δ, ο παίκτης 2 θα πάει κάτω δίνοντάς στον παίκτη 1 μόνο 98 μονάδες χρησιμότητα. Αν όμως ο παίκτης 1 στον προτελευταίο κόμβο λήξει αυτός το παίγνιο επιλέγοντας Κ, θα πάρει 99. Ένας ορθολογικός παίκτης 1 ποτέ δεν θα έπαιζε Δ στον προτελευταίο κόμβο. Συνεχίζοντας έτσι την συλλογιστική μας από το τέλος προς την αρχή, διαγράφουμε πάντα το Δ έως ότου φτάσουμε στον αρχικό κόμβο:

Στον αρχικό κόμβου του παιχνιδιού ένας τέλεια ορθολογικός παίκτης που γνωρίζει ότι και ο άλλος παίκτης είναι τέλεια ορθολογικός κ.ο.κ., δεν θα έπαιζε ποτέ Δ γιατί γνωρίζει ότι λόγω ακριβώς της οπισθογενούς επαγωγής ο παίκτης 3 θα επέλεγε Κ, αφήνοντας τον παίκτη 2 με αποδόσεις 0. Αν όμως ο παίκτης 1 παίξει Κ, θα πάρει 1 που το προτιμάει. Βλέπουμε εδώ ότι δυο τέλεια ορθολογικοί παίκτες με γνώση της ορθολογικότητάς τους λήγουν την Σαρανταποδαρούσα με πολύ χαμηλές αποδόσεις σε σχέση με το τί θα μπορούσαν να λάβουν εάν συνέχιζαν προς τα δεξιά.

Η Σαρανταποδαρούσα είναι ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον παίγνιο για πολλούς λόγους. Αφενός πιάνει την ανταλλαγή μεταξύ μεγεθυντικού και αναδιανεμητικού κινήτρου σε μια κοινωνία. Η κίνηση Δ είναι μια κίνηση συνεργασίας που μεγεθύνει το συνολικό μέγεθος της πίτας, Η κίνηση Κ είναι κίνηση που αυξάνει το μερίδιο που λαμβάνει ο παίκτης που κινείται, θυσιάζοντας όμως την δυνατότητα να μεγεθυνθεί περαιτέρω το συνολικό κοινωνικό πλεόνασμα. Το παίγνιο σχεδιάστηκε και χρησιμοποιήθηκε για πολύ καιρό ως παράδειγμα αποτυχίας της θεωρίας παιγνίων να προβλέψει το πώς θα έπαιζανν δυναμικά ορθολογικοί παίκτες. Έχει ασκηθεί δριμύτατη κριτική για το κατά πόσο είναι ορθολογικός ο τρόπος που προβλέπει η θεωρία παιγνίων ότι θα παικτεί ένα τέτοιο παίγνιο. Στο επόμενο κεφάλαιο, θα ξαναεπισκεφτούμε την σαρανταποδαρούσα για να δούμε πως παίχτηκε σε μια σειρά κλασικών αλλά και πιο προσφάτων, καινοτόμων πειραμάτων.

Παράδειγμα 1.17 **Παίγνιο εισόδου** Το σχήμα απεικονίζει ένα παίγνιο εισόδου επιχείρησης σε εγκαθιδρυμένο κλάοδ. Ο παίκτης 1, η εισερχόμενη επιχείρηση αποφασίζει αν θα μπει σε έναν κλάδο στον οποίον δραστηριοποιείται ήδη μια κατεστημένη επιχείρηση. Ο παίκτης 2 (κατεστημένη επιχείρηση παρατηρεί την κίνηση του εισερχόμενου και σε περίπτωση εισόδου απογασίζει είτε να διευκολύνει (δ) την είσοδο χωρίς πόλεμο τιμών, είτε να προβεί σε πόλεμο τιμών (π). Σε περίπτωση πολέμου από την κατεστημένηε επιχείρηση, η εισερχόμενη μπορεί είτε να υποχωρήσει (υ), είτε να κλιμακώσει (κ) τον πόλεμο.



Ο πίνακας 1.13 απεικονίζει το παίγνιο σε κανονική μορφή. Εύκολα βλέπουμε ότι το παίγνιο έχει τρεις ισορροπίες Nash. Οι αποδόσεις στις ισορροπίες απεικονίζονται με κόκκινο χρώμα.

	δ	π
εκτος, υ	0, 6	0, 6
εκτός, κ	0, 6	0, 6
εντός, υ	5, 2	-2, 4
εντός, κ	5, 2	-4, 0

Πίνακας 1.13: Παίγνιο εισόδου

Δείτε ότι ενώ ο παίκτης 2 έχει δύο μόνο στρατηγικές (διευκόλυνση, πόλεμο), οι στρατηγικές του παίκτη 1 είναι πιο σύνθετες. Κάθε στρατηγική του παίκτη 1 πρέπει να προσδιορίζει μια δράση του στον αρχικό κόμβο και μια δράση του στον κόμβο που αυτός θα κληθεί να παίξει αν ο παίκτης 1 κάνει πόλεμο τιμών. Επομένως ο παίτκης 1 έχει 4 στρατηγικές. Παρόλου που οι πρώτες δύο στρατηγικές του αποφέρουν πανομοιότυπες αποδόσεις στους 2 παίκτες, τις παραθέτουμε γιατί στο δυναμικό παίγνιο το τί θα παίξει ο παίκτης 1 στον κόμβο Κ3 μπορεί να έχει επίπτωση στη επιλογή του παίκτη 2 στον κόμβο Κ2.

Ιδιαίτερα μας ενδιαφέρει η ισορροπία (εντος κ, δ) διότι περιέχει μια μη πιστευτή απειλή. Στην ισορροπία αυτή, ο παίκτης 1 μπαίνει στην αγορά και απειλεί ότι σε περίπτωση που η κατεστημένη επιχείρηση αρχίσει πόλεμο τιμών, αυτός θα κλιμακώσει. Κάτι τέτοιο όμως θα ήταν πολύ πιο ζημιογόνο και για τον δύο και κανένας ορθολογικός παίκτης δεν θα πραγματοποιούσε αυτήν την απειλή.

Για να λύσουμε αυτό το παίγνιο για τέλειες ισορροπίες υποπαιγνίου, πάμε στον κόμβο Κ3 όπου παρατηρούμε ότι αν βρεθεί στην θέση να επιλέξη ο παίκτης 1 θα υποχωρήσει, υφιστάμενος ζημιές -2, που είναι προτιμότερο από τις ζημιές που θα υποστεί αν κλιμακώσει (-4). Επομένως σε περίπτωση πολέμου τιμών, η κατεστημένη επιχείρηση γνωρίζει ότι ο εισερχόμενος θα υποχωρήσει αναγκαστικά. Επομένως στον κόμβο Κ2, η κατεστημένη επιχείρηση θα επιλέξει πόλεμο τιμών αντί για διευκόλυνση αφού έτσι καταλήγει με 4 αντί 2 μονάδες κερδών. Αυτό με την σειρά του οδηγεί την εισερχόμενη επιχείρηση να μείνει εκτός με μηδενικά κέρδη, κάτι προτιμότερο από τις ζημίες που θα υποστεί αν εισέλθει (-2). Επομένως η μοναδική στρατηγική της εισερχόμενης επιχείρησης που είναι συμβατή με τελειότητα, είναι (εκτός, υ) και η μοναδική τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου είναι η [(εκτός, υ), π], στην οποία η κατεστημένη επιχείρηση δεν «τρώει» την απειλεί της εισερχόμενης.

Με τα δυναμικά παίγνια τέλειας πληροφόρησης κλείνουμε την εισαγωγή στην Θεωρία Παιγνίων. Καλύψαμε τα βασικά εργαλεία που θα μας επιτρέψουν να δούμε υποδείγματα ολιγοπωλίου καθώς και στρατηγικές αλληλεπιδράσεις στην παραγωγή δημοσίων αγαθών. Οι εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων είναι πολλές και στην Μικροοικονομική ΙΙΙ θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα μια σειρά οικονομικών εφαρμογών που αφορούν σε καταστάσεις στρατηγικής αλληλεπίδρασης.

1.7 Βιβλιογραφία θεωρίας παιγνίων

Καλά προπτυχιακά εγχειρίδια θεωρίας παιγνίων είναι οι Dutta 1999 και Osborne 2003. Ο Gibbons 2009 είναι κλασικό παλιό εγχειρίδιο με ίσως λίγο ξεπερασμένη ματιά. Ακόμα καλύτεροι ίσως οι Mas-Colell, Michel Whinston και Jerry Green 1995. Αν και μεταπτυχιακό εγχειρίδιο, τα κομμάτια που μας ενδιαφέρουν σε παίγνια εξηγούνται πολύ καλά. Οι Maschler, Eilon Solan και Shmuel Zamir 2020 είναι ένα ό,τι πιο πλήρες, αν και αρκετά πιο προχωρημένο εγχειρίδιο. Ο Kreps 2009 αποτελεί από τις πιο διεισδυτικές ματιές στην θεωρία παιγνίων. Είναι μεταπτυχιακό ανάγνωσμα από έναν πολύ μεγάλο παιγνιοθεωρητικό. Οι συζητήσεις και τα παραδείγματά του μπορούν να σας βοηθήσουν να κατανοήσετε βαθύτερα λεπτές έννοιες της θεωρίας παιγνίων και συνιστάται ιδιαίτερα σε δεύτερη ή τρίτη ανάγνωση. Για όσους θέλουν πραγματικά να εμβαθύνουν σε θεωρία παιγνίων οι Myerson 1991 και Fudenberg και Tirole 1991 είναι δύο πολύ προχωρημένα και μαθηματικά απαιτητικά βιβλία γραμμένα από δύο νομπελίστες που καλύπτουν με τεχνικό τρόπο τόσο τις βασικές έννοιες όσο και ειδικά θέματα.

1.8 Ασκήσεις

1.1. Απεικονίστε την μάχη των φύλων σε αναπαράσταση εκτεταμένης μορφής.

1.2. Βρείτε τις μεικτές ισορροπίες Nash (Ι. Ν.) για το ακόλουθο παίγνιο:

	Α	Δ
Π	2,1	0,2
Κ	1,2	3,0

1.3. Στο ακόλουθο παίγνιο, ποιες στρατηγικές επιβιώνουν από Δ.Δ.Κ.Σ. (iterated elimination of strictly dominated strategies); Ποιες είναι οι Ι. Ν. του παιγνίου;

	Α	Κ	Δ
Π	2,0	1,1	4,2
Μ	3,4	1,2	2,3
Κ	1,3	0,2	3,0

1.4. Στο παχνίδι η μάχη των φύλων (μεταξύ όπερας και ποδοσφαίρου) με τις ακόλουθες αποδόσεις βρείτε όλες τις Ι. Ν. (Σε αμιγείς και μικτές στρατηγικές)

	Ο	Α
Ο	2,1	0,0
Α	0,0	1,2

1.5. Έστω το παρακάτω παίγνιο:

	Α	Μ	Δ
Π	3,0	0,-3	0,-4
Κ	2,4	4,5	-1,8

(α΄) Υπάρχουν κυρίαρχες αμιγείς στρατηγικές; Η στρατηγική κέντρο για τη στήλη κυριαρχείται από αμιγείς στρατηγικές;

(β΄) *Μπορείτε να βρείτε κάποια στρατηγική που κυριαρχείται από μικτές στρατηγικές;

1.6. * Έστω το παρακάτω στατικό παίγνιο πλήρους πληροφόρησης:

	Α	Δ
Π	$c_1, \quad c_2$	$\frac{c_1}{2}, \quad 0$
Κ	0,0	3, 2

(α΄) Για ποιες τιμές των παραμέτρων c_1, c_2 είναι το προφίλ (Π,Α) μοναδική ισορροπία nash του παραπάνω παιχνιδιού;

(β΄) Για ποιες τιμές των παραμέτρων είναι το (Κ,Δ) μοναδική ισορροπία του παιγνίου;

(γ΄) Υπάρχουν τιμές των παραμέτρων c_1, c_2, για τις οποίες το (Π,Α) και το (Κ,Δ) αποτελούν και τα δύο ισορροπίες Nash του παιγνίου.

(δ΄) **Βρείτε τις μεικτές ισορροπίες Nash του παιγνίου.

1.7. Για τα πιο πάνω 2x2 παίγνια, σχεδιάστε τις άριστες αντιδράσεις στο χώρο των μεικτών στρατηγικών των δύο παικτών.

1.8. *Για τα παραπάνω παίγνια σχεδιάστε τις αποδόσεις των καθαρών στρατηγικών του παίκτη i ως συνάρτηση των μεικτών στρατηγικών του παίκτη $j \neq i$ (όπως κάναμε στην παρουσίαση του άρθρου για τους τερματοφύλακες και τους επιθετικούς).

1.9. (Δόθηκε στην τάξη) Βρείτε την Ι. Ν. του ολιγοπωλίου Cournot με n συμμετρικούς ως προς το οριακό κόστος ολιγοπωλητές ($c_i(q_i) = \bar{c}q_i$) και αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης $P(Q) = 1 - Q$.

1.10. Βρείτε την Ι. Ν. του ολιγοπωλίου Cournot με δύο και τρεις μη συμμετρικούς ολιγοπωλητές με οριακό κόστος $c_i(q_i) = c_i q_i$ υποθέτοντας εσωτερική λύση, με συνάρτηση ζήτησης $P(Q) = A - Q$, A μεγάλο.

1.11. Βρείτε την Ι. Ν. για το δυοπώλιο Bertrand (οι δυοπωλητές αποφασίζουν την τιμή στην οποία θα παραγάγουν) όπου οι δύο ολιγοπωλητές έχουν οριακό κόστος c_1 και c_2, με $c_1 < c_2$ και η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης είναι $P = 1 - Q$.

1.12. Για το παίγνιο που απεικονίζεται στο σχήμα 1.10, βρείτε όλες τις ισορροπίες Nash. Ποιες από αυτές είναι Subgame Perfect Nash Equilibria;

1.13. Έστω το παρακάτω παίγνιο σε κανονική μορφή:

	b_1	b_2	b_3
a_1	10, 10	2, 12	0, 13
a_2	12, 2	5, 5	0, 0
a_3	13, 0	0, 0	1, 1

(α΄) Ποιες είναι οι Ι. Ν. του παραπάνω παιγνίου;

(β΄) *Έστω ότι οι δύο παίκτες παίζουν το παραπάνω παίγνιο δύο φορές. Μπορεί το a_1, b_1 να προκύψει ως μέρος ισορροπίας Nash την πρώτη φορά που παίζεται το παίγνιο; Πώς;

(γ΄) **Η παραπάνω ισορροπία (που περιλαμβάνει το a_1, b_1), είναι subgame perfect; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

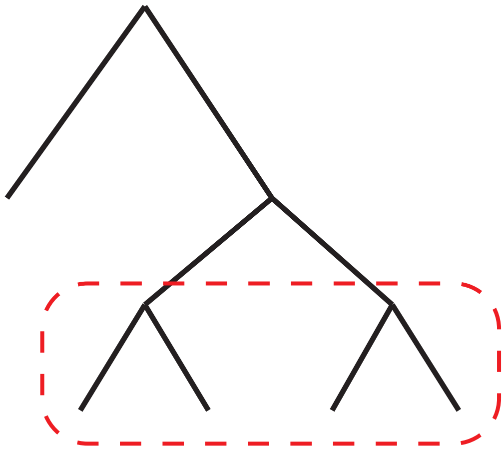
(δ΄) Μπορείτε να σκεφτείτε άλλες τέλειες ισορροπίες υποπαιγνίου για το επαναλαμβανόμενο παίγνιο·

1.14. *Στο σχήμα 1.11 ο Παίκτης 1 κινείται στους κόμβους 1 και 3 (εάν ο Π 2 τον φέρει στον 3), ενώ ο παίκτης 2 κινείται στον κόμβο 2. Υποθέστε ότι $\sigma = -1$. Βρείτε τις ισορροπίες Nash για αυτό το παίγνιο.

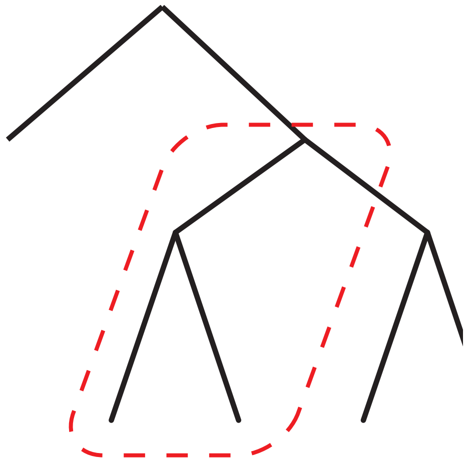
1.15. Ποιες από τις παραπάνω ισορροπίες επιβιώνουν του κριτηρίου του subgame perfection;

1.16. *Αν τώρα $\sigma = 2$ ποιες είναι οι ισορροπίες Nash και ποιες από αυτές είναι Subgame perfect;

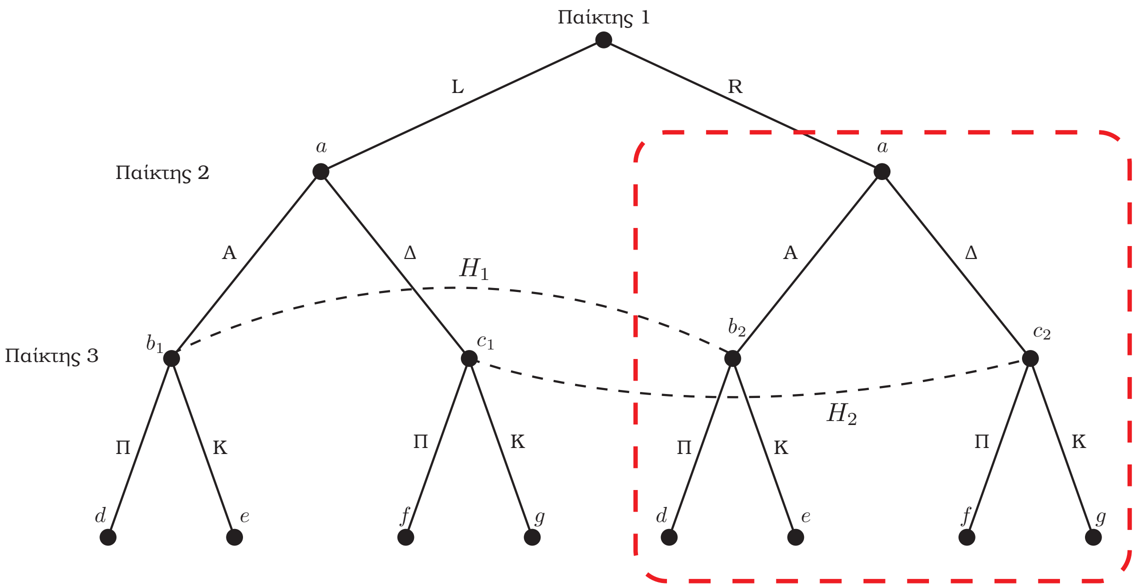
1.17. (Παίγνιο με συνεχείς στρατηγικές). Έστω το εξής παίγνιο διαπραγμάτευσης για το μοίρασμα ενός ποσού. Δύο παίκτες θέλουν να μοιράσουν €100 μεταξύ τους. Ο μηχανισμός που επιλέγουν είναι ο εξής: και οι δύο ταυτόχρονα γράφουν σε ένα χαρτί ένα ποσό μεταξύ 0 και €100 ο καθένας. Εάν τα ποσά των δύο παικτών αθροίζουν συνολικά σε ποσό μικρότερο ίσο των €100, οι δύο παίκτες λαμβάνουν το ποσό που έγραψε ο καθένας στο χαρτί. Εάν τα ποσά αθροίζουν σε ποσό μεγαλύτερο των €100 δεν λαμβάνει κανείς τίποτα. Βρείτε τις ισορροπίες Nash του παιγνίου.



(α΄) Δεν αρχίζει από ένα κόμβο.

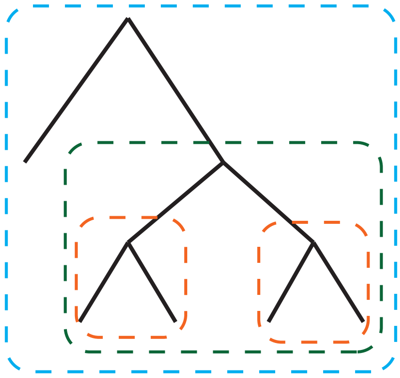


(β΄) Δεν περιλαμβάνει όλους τους επόμενους κόμβους.

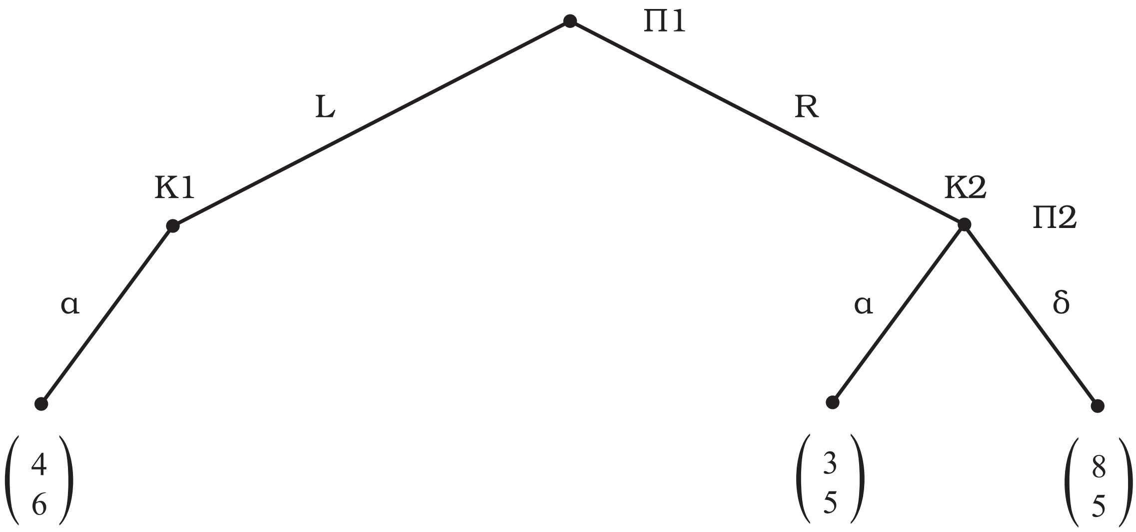


(γ΄) Σπάει τα σύνολα πληροφόρησης H_1, H_2.

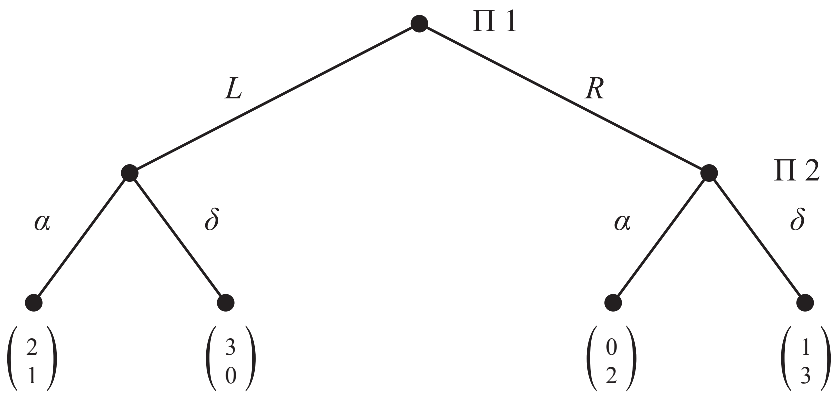
Σχήμα 1.7: Παραδείγματα υποσυνόλων που δεν είναι υποπαίγνια



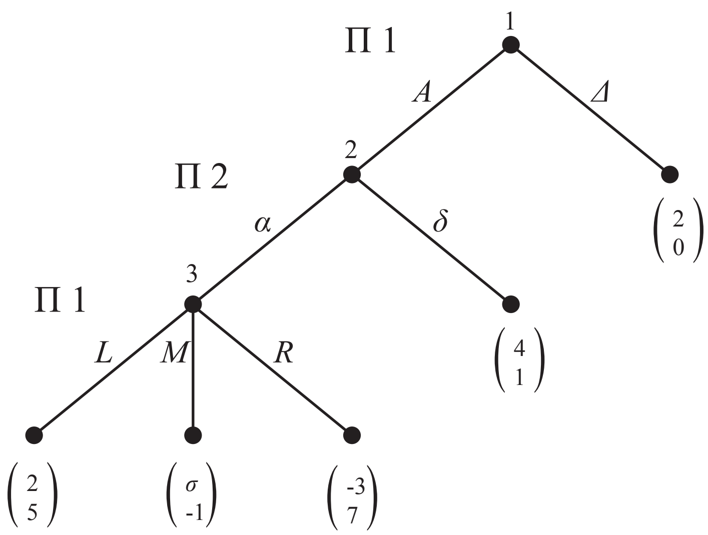
Σχήμα 1.8: Παράδειγμα σωστών υποπαιγνίων.



Σχήμα 1.9: Τέλειες στρατηγικές για παίκτη 2.



Σχήμα 1.10



Σχήμα 1.11

2. Η Θεωρία Παιγνίων στην Πράξη

2.1 Πόσο καλά περιγράφει η θεωρία παιγνίων την πραγματικότητα;

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναπτύξαμε μια σειρά εργαλείων που μας βοηθούν να προβλέψουμε τις ισορροπίες στις οποίες θα τείνει μια κοινωνία ορθολογικών ατόμων σε καταστάσεις στρατηγικής αλληλεπίδρασης. Όταν δηλαδή οι δράσεις του ενός ατόμου ή της μίας μονάδος αν παραδείγματος χάριν μιλάμε για εταιρίες ή άλλες συλλογικές οντότητες, επηρεάζουν άμεσα τις αποδόσεις ή την ευημερία άλλων ατόμων ή οικονομικών μονάδων και όταν οι δρώντες έχουν επίγνωση αυτών των αλληλεπιδράσεων και τις λαμβάνουν υπόψιν κατά την λήψη των αποφάσεων.

Είδαμε ότι αν οι δρώντες είναι πλήρως ορθολογικοί, μπορούν να προβλέπουν την σκέψη και τις δράσεις των άλλων, να αποφεύγουν παγίδες ή «άδειες απειλές» και να μην υποπίπτουν σε λογικά σφάλματα. Όταν μιλούσαμε για την λήψη αποφάσεων υπό καθεστώς αβεβαιότητας ωστόσο, συζητήσαμε την συμβολή των συμπεριφορικών οικονομικών στην μικροοικονομική θεωρία και είδαμε ότι πολύ συχνά οι άνθρωποι δεν ζυγίζουν μόνο κόστος και οφέλη, αλλά υπόκεινται και σε συμπεριφορικές μεροληψίες ακόμα κι αν αυτό τους στοιχίζει σε όρους αποδόσεων. Ένα κύριο ερώτημα που προκύπτει ξανά στην ανάλυση των παιγνίων, είναι το κατά πόσον οι προβλέψεις στις οποίες μας οδηγεί η παιγνιοθεωρητική ανάλυση και οι διάφορες παραλλαγές της ισορροπίας Nash που έχουμε εξετάσει ως τώρα επιβεβαιώνονται στην πράξη όταν άτομα ή οικονομικές μονάδες αλληλεπιδρούν στην καθημερινότητά τους.

Επιβεβαιώνονται λοιπόν οι προβλέψεις της θεωρίας παιγνίων ή μήπως οι άνθρωποι συμπεριφέρονται διαφορετικά στην πράξη; Σε μια μεγάλη σειρά υποδειγμάτων, οι προβλέψεις της θεωρίας παιγνίων έχουν δεχτεί αυστηρή κριτική ως μη ρεαλιστικές. Θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε κατά πόσο η παιγνιοθεωρητική ανάλυση ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, την χρησιμότητά της ως εργαλείο ανάλυσης και τις αστοχίες της με στόχο να αρχίσουμε να αποκτούμε μια καλύτερη αίσθηση της χρησιμότητάς της ως εργαλείο ανάλυσης στρατηγικής συμπεριφοράς.

2.2 Εμπειρικός έλεγχος προβλέψεων της θεωρίας παιγνίων

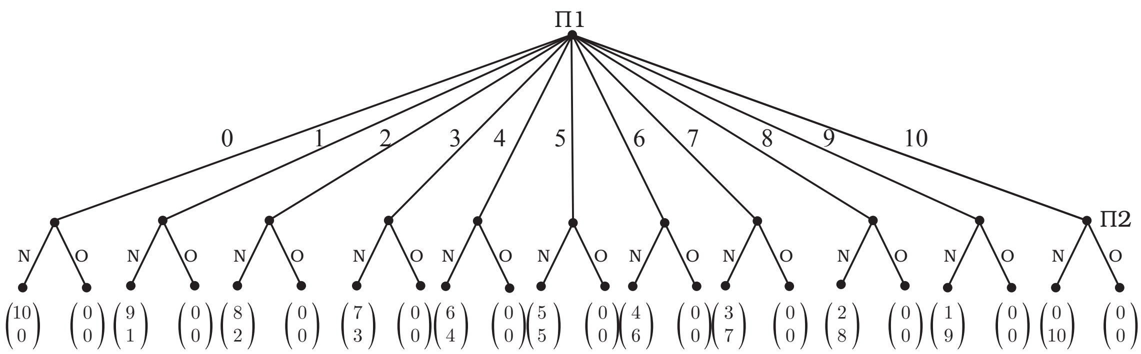
Για να καταλάβουμε που αποκλίνουν οι προβλέψεις της θεωρίας από την παρατηρούμενη συμπεριφορά θα συζητήσουμε μια σειρά δυναμικών κυρίως παιγνίων και το πώς οι προβλέψεις της θεωρίας ελέγχθηκαν εμπειρικά. Το πρώτο παίγνιο που θα εξετάσουμε εδώ είναι το παίγνιο του «Τελεσιγράφου» (ultimatum game).

2.2.1 Το παίγνιο του τελεσιγράφου

Ας δούμε το παίγνιο του τελεσιγράφου, ένα παίγνιο που συναντάμε συχνά σε διαπραγματεύσεις. Ένα μέρος κινείται και δίνει ένα τελεσίγραφο στο άλλο μέρος. Σκεφτείτε ένα παίγνιο διαπραγμάτευσης στο οποίο δύο παίκτες καλούνται να μοιράσουν μεταξύ τους ένα πλεόνασμα αξίας €10. Ο παίκτης 1 κινείται πρώτος και κάνει στον άλλον μια πρόταση τελεσίγραφο για την μοιρασιά. Του προτείνει ένα ποσό από τα €10. Το υπόλοιπο ποσό θα το κρατήσει ο ίδιος. Έτσι αν για παράδειγμα ο παίκτης 1 προτείνει «€3», η πρόταση που κάνει είναι: «θα κρατήσω εγώ τα €7 και θα πάρεις εσύ τα €3».

Αφού ο παίκτης 1 κάνει την κίνησή του, κινείται ο παίκτης 2, ο οποίος μπορεί είτε να αποδεχτεί την πρόταση του παίκτη 1 (Ναι), είτε να την απορρίψει (όχι). Στην πρώτη περίπτωση πραγματοποιείται η διανομή που προτείνει ο πρώτος παίκτης και ο καθένας λαμβάνει τα ευρώ της πρότασης. Εάν ο παίκτης 2 απορρίψει την πρόταση καταλήγουν και οι δύο με μηδενικές αποδόσεις. Το παίγνιο απεικονίζεται σε εκτεταμένη μορφή στο σχήμα 2.1.

Λύση παιγνίου του τελεσιγράφου

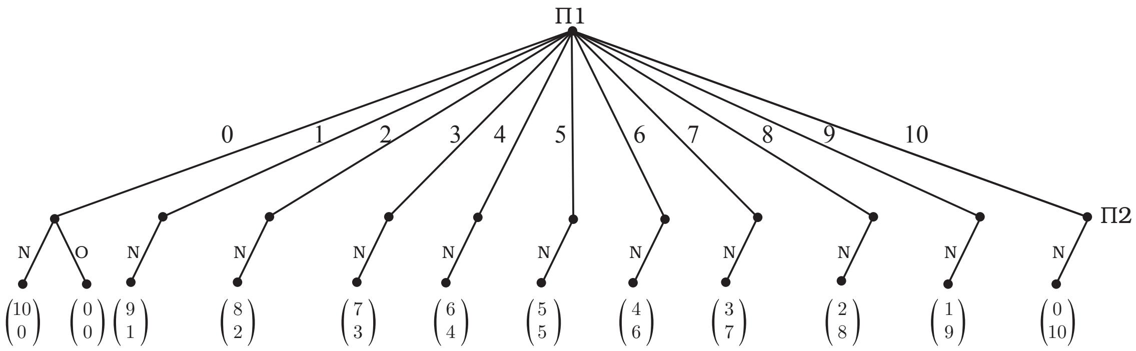


Σχήμα 2.1: Το παίγνιο του τελεσιγράφου

Πώς θα λυθεί αυτό το παίγνιο; Αν ψάξουμε για ισορροπίες Nash παρατηρήστε ότι ο παίκτης 2, εάν πείσει τον παίκτη 1 ότι είναι διατεθειμένος να απορρίψει οποιαδήποτε προσφορά δεν θεωρεί καλή, μπορεί να αποσπάσει την μερίδα του λέοντος. Για παράδειγμα, εάν ακολουθήσει την στρατηγική «δεν θα δεχτώ τίποτα λιγότερο από €9», ή αν προτιμάτε την στρατηγική (OOOOOOOOONN), τότε η μοναδική ισορροπία του παιχνιδιού είναι ο παίκτης 1 να προσφέρει €9 και ο παίκτης 2 να δεχθεί. Ωστόσο όπως εξηγήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο μια τέτοια στρατηγική δεν είναι τέλεια γιατί υπονοεί ότι ο παίκτης 2 θα βλάψει τον εαυτό του εάν βρεθεί με μια πρόταση 5-5.

Για να βρούμε τις τέλειες ισορροπίες υποπαιγνίου λύνουμε από τους τελικούς κόμβους προς τα πίσω με οπισθογενή επαγωγή. Εάν ο παίκτης 2 βρεθεί σε οποιονδήποτε τελικό κόμβο πλην του πρώτου, το άριστο είναι να δεχθεί το ποσό που είναι προτιμότερο από το να φύγει με μηδενικές αποδόσεις. Επομένως σε κάθε κόμβο εκτός από τον πρώτο ο παίκτης 2. εάν βρισκόταν και ήταν ορθολογικός, θα δεχόταν την πρόταση του παίκτη 1.

Επομένως ο παίκτης 1 γνωρίζει ότι πηγαίνοντας τον παίκτη 2 σε οποιονδήποτε κόμβο από τον 2ο έως τον τελικό, ο παίκτης 2 θα απαντήσει Ν. Στον πρώτο κόμβο ο παίκτης 2 μπορεί να απαντήσει είτε N, είτε O. Η οπισθογενής επαγωγή δηλαδή μας οδηγεί στο απλούστερο παίγνιο του σχήματος 2.2.



Σχήμα 2.2: Οπισθογενής επαγωγή στο παίγνιο του τελεσιγράφου

Οι μοναδικές δύο στρατηγικές του παίκτη 2[1] που επιβιώνουν στην οπισθογενή επαγωγή είναι οι στρατηγικές (NNNNNNNNNNN) και (ONNNNNNNNNN) και άρα οι μοναδικές δύο τέλειες ισορροπίες υποπαιγνίου είναι:

$$[0, (\text{NNNNNNNNNNN})] \text{ και } [1, (\text{ONNNNNNNNNN})\ ]$$

Όταν το παίγνιο του τελεσιγράφου παίζεται από δύο ορθολογικούς παίκτες, περιμένουμε ο παίκτης 1 να καταλήξει με ολόκληρο ή σχεδόν ολόκληρο το ποσό και ο παίκτης 2 το πολύ με ένα ελάχιστο ποσό.

Το παίγνιο του τελεσιγράφου σε πειράματα

Πόσο καλή είναι η πρόβλεψη αυτή για την θεωρία παιγνίων; Για να μπορέσουμε να κρίνουμε εάν και σε περιπτώσεις η παιγνιοθεωρητική ανάλυση είναι ικανοποιητική για το παίγνιο του τελεσιγράφου καλό είναι να δούμε πώς έχουν παίξει το παίγνιο αυτό διαφορετικοί παίκτες σε πειραματικές μελέτες.

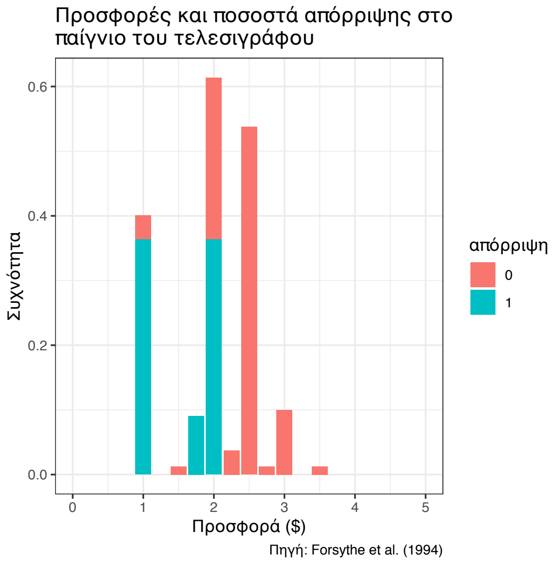
Στην πλειοψηφία των πειραματικών μελετών, οι προβλέψεις της θεωρίας παιγνίων απέχουν σημαντικά από την παρατηρούμενη συμπεριφορά των παικτών. Γιαυτό και το παίγνιο του τελεσιγράφου έχει αποτελέσει την αιχμή του δόρατος στην κριτική που έχει υποστεί η θεωρία παιγνίων ως προς τις υποθέσεις και τα συμπεράσματά της. Οι αποκλίσεις από τις προβλέψεις που παρατηρούμε στα πειράματα σχετίζονται με την στρατηγική ισορροπίας τόσο του παίκτη 1 όσο και του παίκτη 2. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε τόσο παίκτες 1 που προσφέρουν πολύ μεγαλύτερο ποσοστό του συνολικού ποσό, όσο και παίκτες 2 που απορρίπτουν συχνά μεγαλύτερα ποσά από το 10%.

Ας δούμε τόσο τα σημεία συγκέντρωσης των προσφορών όσο και τα ποσοστά απορρίψεων σε μία από τις πρώτες και πιο κλασικές πειραματικές μελέτες του παιγνίου του τελεσιγράφου (Forsythe κ.ά. 1994). Το σχήμα 2.3 παρουσιάζει τόσο την συχνότητα των προσφορών του παίκτη 1 όσο και τα ποσοστά απορρίψεων από τον παίκτη 2 όπως εμφανίζονται στο άρθρο Forsythe κ.ά. 1994. Το πείραμα έπαιξε το παιχνίδι του τελεσιγράφου με συνολικό ποσό \$5.

Δύο παρατηρήσεις ξεχωρίζουν. Καταρχάς, παρατηρούμε μεγάλη συγκέντρωση προσφορών κοντά στο 50% του συνολικού ποσού: πολύ συχνά ο παίκτης 1 προσφέρει είτε \$2.5 είτε \$2 στον παίκτη 2. Παρατηρήστε ότι υπάρχουν και προσφορές πάνω από το 50% του συνολικού ποσού. Επομένως η προσδοκία ότι ο παίκτης 1 θα κρατά την μερίδα του λέοντος

[1] Παρατηρήστε ότι στο παίγνιο ο παίκτης 2 έχει 2^{11} στρατηγικές αφού οι κόμβοι είναι 11 και σε κάθε κόμβο έχει 2 κινήσεις.

για τον εαυτό του δεν δείχνει να επιβεβαιώνεται εμπειρικά. Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι, αντίθετα με τις προβλέψεις της δυναμικής ανάλυσης στην θεωρία παιγνίων, οι παίκτες 2 πολύ συχνά απορρίπτουν χαμηλές προσφορές. Βλέπουμε ότι οι προσφορές κάτω του 50% έχουν συντριπτικά ποσοστά απόρριψης από τον παίκτη 2 (πράσινο χρώμα). Προσφορές κοντά ή πάνω από το 50% γίνονται πάντα αποδεκτές.



Σχήμα 2.3: Πειραματικά αποτελέσματα του παιγνίου του τελεσιγράφου

Πώς εξηγούνται οι παρατηρούμενες αποκλίσεις στο παίγνιο του τελεσιγράφου;

Οι παρατηρούμενες αποκλίσεις στο παίγνιο του τελεσιγράφου είναι συχνές και τα αποτελέσματα που θέλουν τις προσφορές να συγκεντρώνονται κοντά στο 50% και τις απορρίψεις για χαμηλότερες προσφορές να είναι συχνές επιβεβαιώνονται από πολλές μελέτες (βλ. για παράδειγμα Camerer και Thaler 1995). Σημαίνει αυτό ότι οι προβλέψεις της θεωρίας παιγνίων είναι άστοχες και άχρηστες; Εδώ είναι χρήσιμο να λάβουμε υπόψιν κάποια βασικά σημεία:

1. Οι αποδόσεις των παικτών όπως έχουμε συζητήσει και στην θεωρία καταναλωτή αλλά και στην θεωρία επιλογής σε περιβάλλον αβεβαιότητας, δεν ταυτίζονται με τα χρηματικά τους κέρδη. Επομένως εάν κάποια πειράματα χρησιμοποιούν χρηματικά ποσά για να πιάσουν τις αποδόσεις, τότε κατά πάσα πιθανότητα αποτυγχάνουν να απεικονίσουν τις πραγματικές αποδόσεις των παικτών. Θυμηθείτε ότι τις αποδόσεις τις ορίσαμε ως την χρησιμότητα που λαμβάνει ο κάθε παίκτης σε κάθε πιθανή έκβαση του παιγνίου. Επομένως για τους δύο παίκτες του παιγνίου του τελεσιγράφου οι πραγματικές (ψυχολογικές) αποδόσεις τους όπως μετριούνται από την χρησιμότητα επί των εκβάσεων, εν γένει θα διαφέρουν από τα ποσά που λαμβάνουν αυτοί σε κάθε έκβαση. Για παράδειγμα στην μοιρασιά €9-€1, οι αποδόσεις των δύο παικτών θα είναι εν γένει $[U^1(9,1), U^2(9,1)] \neq (9,1)$. Εφόσον για μένα ως παίκτη 2 είναι σημαντική η ισότητα, όταν λαμβάνω 1 ενώ ο συμπαίκτης μου λαμβάνει 9, η χρησιμότητά μου δεν θα είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι όταν λαμβάνουμε και οι δύο 0: $U^2(9,1) < U^2(0,0)$. Αυτό ασφαλώς σημαίνει ότι τα πειράματα δεν είναι σχεδιασμένα να απεικονίζουν τις πραγματικές αποδόσεις από το παίγνιο του τελεσιγράφου και ότι πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί όταν ταυτίζουμε τις χρηματικές με τις ψυχολογικές αποδόσεις των παικτών.
2. Αν για κάποιους παίκτες εκτός από την χρηματική αμοιβή, η ψυχολογική ικανοποίηση

εξαρτάται και από παράγοντες όπως δικαιοσύνη ή ισότητα, τότε αυτοί θα είναι διατεθειμένοι πιθανώς να θυσιάσουν κάποιο ποσό από τα κέρδη τους για να τιμωρήσουν αυτόν που αισθάνονται ότι τους αδικεί γιατί βρίσκεται σε θέση ισχύος (παίζει πρώτος). Αυτή η τιμωρητική διάθεση όμως θα συνεχίσει να επικρατεί εάν. οι χρηματικές αποδόσεις ανεβούν; Τί θα γίνει αν αντί για μια διανομή €9-€1, οι αποδόσεις του παιγνίου στο σχήμα 2.1 είναι €9.000-€1.000; Ή αν οι αριθμοί του σχήματος συμβολίζουν όχι ευρώ αλλά εκατομμύρια ευρώ; Θα περιμέναμε έναν παίκτη 2 στον οποίον προσφέρεται μια διανομή €9.000.000 προς €1.000.000 να θυσιάσει ένα εκατομμύριο για να τιμωρήσει αυτόν που τον αδίκησε; Ποια τιμή ακριβώς. έχει η αίσθηση δικαιοσύνης; Μήπως οι προβλέψεις της θεωρίας παιγνίων αρχίζουν να επιβεβαιώνονται όταν το διακύβευμα αρχίζει να μεγαλώνει πολύ;

3. Θα περιμέναμε ο τρόπος που παίζονται διαφορετικά παίγνια να είναι πανομοιότυπος για κοινωνίες με διαφορετικό πολιτισμό, αξίες, ήθη και παραδόσεις; Πόσο επηρεάζουν παράγοντες όπως πολιτισμός, παραδόσεις αλλά και παραγωγικό μοντέλο τον τρόπο που αλληλεπιδρούν στρατηγικά διαφορετικοί πληθυσμοί;

Η πρώτη απάντηση στην κριτική είναι ξεκάθαρη, ορθή και δεν επιδέχεται ουσιαστική αμφισβήτηση. Εφόσον οι αποδόσεις εκ κατασκευής απεικονίζουν τις προτιμήσεις των παικτών, τότε οι χρηματικές αποδόσεις που χρησιμοποιούνται ως προσέγγιση των ψυχολογικών προτιμήσεων στο παίγνιο προφανώς αποτυγχάνουν να τις προσεγγίσουν επαρκώς. Και άρα η απόδοση χρηματική απόδοση 1 σε σχέση με 0, απεικονίζει την ψυχολογική απόδοση. Εάν είχαμε το ίδιο παίγνιο με ψυχολογικές αποδόσεις (π.χ. σε έναν απόλυτα ατομιστικό πληθυσμό, του οποίου τα μέλη δεν ενδιαφέρονται καθόλου για το τί κάνει ο άλλος παίκτης και τους απασχολούν μόνο οι δικές τους αποδόσεις), τότε θα περιμέναμε να ισχύουν οι προβλέψεις της θεωρίας παιγνίων.

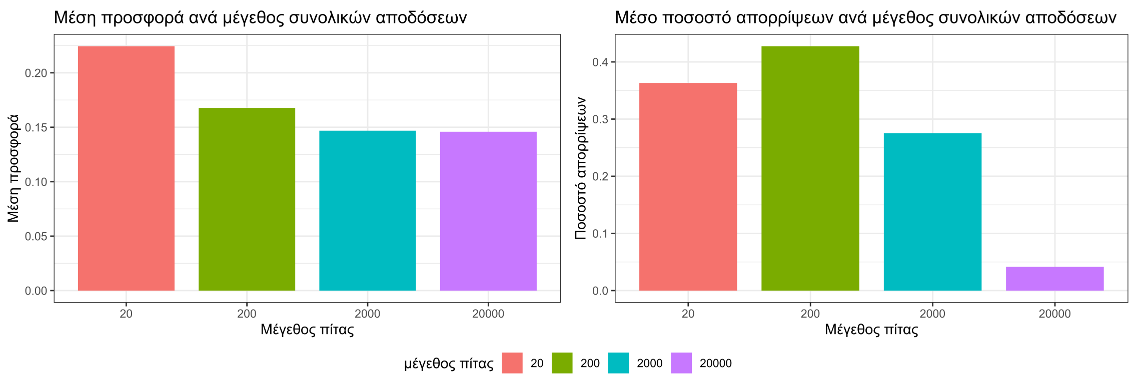
Παρατηρήστε εδώ την συνάφεια με τα συμπεριφορικά οικονομικά που συζητήσαμε: κατά πάσα πιθανότητα, οι homo sapiens δεν ενδιαφέρονται αποκλειστικά και μόνον για την ατομική τους κατανάλωση αλλά σχηματίζουν σημεία αναφοράς για το τί θα έπρεπε να καταναλώσουν παρατηρώντας τι λαμβάνουν και οι άλλοι. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι προβλέψεις της θεωρίας παιγνίων είναι λάθος, αλλά μάλλον ότι αποτύχαμε να απεκονίσαμε μέσα στις παρενθέσεις του σχήματος 2.1 τις πραγματικές (ψυχολογικές) αποδόσεις των δύο παικτών.

Ως προς την δεύτερη παρατήρηση, θα λέγαμε ότι η εμπειρική εξέταση του αν η συμπεριφορά αλλάζει όταν μεγαλώνουν τα ποσά που «παίζονται», είναι απλή: σχεδιάστε πειράματα με μεγαλύτερα ποσά. Κάτι τέτοιο ωστόσο ακούγεται πιο εύκολο απ' ό,τι είναι στην πραγματικότητα: σκεφτείτε το δείγμα που χρειαζόμαστε ώστε να έχουμε αρκετή διακύμανση προσφορών σε όλες τις κατηγορίες. Δηλαδή ας πούμε ότι χωρίζουμε το ποσό που προσφέρεται σε 10 κατηγορίες (0-10%, 10-20%, . . . 90-100%). Για να κάνουμε στατιστική ανάλυση του τί συμβαίνει στις χαμηλές προσφορές (0-10%), θέλουμε ικανό δείγμα προσφορών σε αυτήν την κατηγορία. Όμως δεδομένου ότι οι άνθρωποι δείχνουν για δάφορους λόγους να συγκεντρώνουν τις προσφορές τους γύρω από το 50%, για να πάρουμε π.χ. 50-60 προσφορές στο κατώτερο κλιμάκιο, θα πρέπει να έχουμε πιθανώς εκατοντάδες προσφορές γύρω από το 50%. Σκεφτείτε τώρα να πρέπει να δώσουμε στους δύο παίκτες σε κάθε γύρο που γίνεται αποδεκτή η προσφορά από €1.000, σε δείγμα ας πούμε 1.000 γύρων ενός παιχνιδιού. Ακόμα κι αν απορρίπτονται 20-30% των προσφορών, θα πρέπει να έχουμε προϋπολογισμό αρκετών εκατοντάδων χιλιάδων ευρώ για να τρέξουμε το πείραμα. Τα πειραματικά οικονομικά έχουν βρει τρόπους μέσα από τυχαιοποίηση των πληρωμών να μειώνουν τα τελικά ποσά που πληρώνονται αλλά και πάλι ένα πείραμα με υψηλά ποσά είναι απαγορευτικά ακριβό για να ελεγθεί στην πράξη.

Παρά την δυσκολία να ελεγχθεί εάν η συμπεριφορά των παικτών προσεγγίζει τις προβλέψεις της θεωρητικής ανάλυσης, μια σειρά άρθρων έχουν προσπαθήσει να εξετάσουν το παίγνιο του τελεσιγράφου όταν οι αποδόσεις μεγαλώνουν. Για καιρό οι μελέτες επιβεβαίωναν ότι η συμπεριφορά δεν αλλάζει σημαντικά όταν μεγαλώνουν τα ποσά, επιβεβαιώνοντας την «ανωμαλία» που επεσήμαναν οι Camerer και Thaler 1995 και Forsythe κ.ά. 1994.[2] Αυτό έχει οδηγήσει στην εδραίωση μιας πεποίθησης ότι σε μεγάλο βαθμό ακόμα και σε καταστάσεις στρατηγικής αλληλεπίδρασης, οι άνθρωποι επιδεικνύουν συμπεριφορικές τάσεις που δεν συμβαδίζουν με ορθολογισμό, ανεξαρτήτως του ύψους των κερδών που διακυβεύονται.

Πρόσφατα ωστόσο μια νέα μελέτη ήρθε να δείξει ότι τα πράγματα αλλάζουν όταν τα ποσά αυξάνονται σημαντικά. Οι Andersen κ.ά. 2011 διοργάνωσαν πειράματα με το παίγνιο του τελεσιγράφου σε φτωχά χωριά στην Ινδία. Αυτό τους επέτρεψε να δώσουν χρηματικές αποδόσεις στους συμμετέχοντες που ανέρχονταν σε πολύ υψηλά ποσά για τα τοπικά στάνταρντς. Οι αποδόσεις σε μισθούς έφταναν έως και μισθούς επτά μηνών. Οι Andersen κ.ά. 2011 προσέφεραν τέσσερα διαφορετικά «μεγέθη πίτας». Στις χαμηλές αποδόσεις οι συμμετέχοντες μοίραζαν μια πίτα 20 ρουπίων. Το πείραμα είχε επίσης παίγνια των 200, 2.000 και 20.000 ρουπιών. Στο σχήμα **;;**, παρουσιάζουμε την κατανομή των προσφορών για τα 4 διαφορετικά μεγέθη αποδόσεων.

Φαίνεται σε πρώτη ματιά ότι όσο οι αποδόσεις μεγαλώνουν, η κατανομή συγκεντρώνεται προς τα αριστερά. Επομένως όσο μεγαλύτερο ποσό διακυβεύεται, τόσο οι προσφορές γίνονται μικρότερες, επιβεβαιώνοντας την πρόβλεψη του θεωρητικού υποδείγματος ότι οι προσφορές θα είναι μικρές στο παίγνιο του τελεσιγράφου. Αυτό επιβεβαιώνεται αν κοιτάξουμε τις μέσες προσφορές αλλά και το μέσο ποσοστό απορρίψεων ανά μέγεθος πίτας που διένειμαν οι παίκτες στο σχήμα 2.4

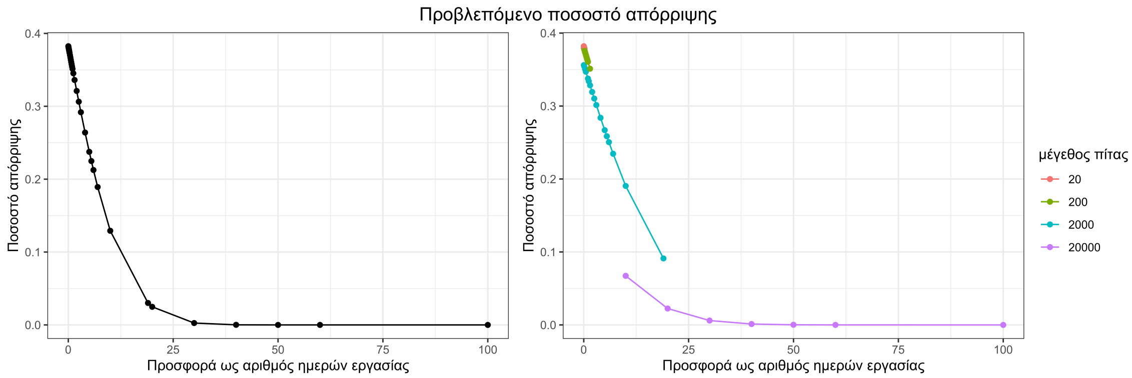


Σχήμα 2.4: Προσφορές και απορρίψεις για διαφορετικά μεγέθη πίτας

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το ποσό που διανέμεται, τόσο μειώνονται οι μέσες προσφορές από τον παίκτη 1 (διάγραμμα αριστερά στο σχήμα 2.4). Επιπρόσθετα παρατηρούμε στο δεξί διάγραμμα ότι οι πτώση των ποσοστών απόρριψης είναι πολύ μεγαλύτερη, παρά το γεγονός ότι οι προσφορές έχουν μειωθεί. Επομένως τόσο ο παίκτης 1 όσο και ο παίκτης 2 δείχνουν να συμμορφώνονται στις επιταγές του παιγνιοθεωρητικού υποδείγματος όσο τα κέρδη και οι απώλειες αρχίζουν να αυξάνουν.

Στο σχήμα 2.5, απεικονίζεται η εκτιμηθείσα πιθανότητα να απορρίψει ο παίκτης 2 την προσφορά του παίκτη 1 καθώς η προσφορά μεγαλώνει. Αριστερά απεικονίζεται η πιθανότητα απόρριψης λαμβάνοντας υπόψιν μόνο το μέγεθος της προσφοράς. Δεξιά η πιθανότητα εκτιμάται ως συνάρτηση της προσφοράς του παίκτη 1 αλλά και του μεγέθους της συνολικής πίτας.

[2] Για πειράματα με «μεγάλο διακύβευμα» δείτε Slonim και E. Roth 1998, Cameron 1999 και Munier και Zaharia 1999.



Σχήμα 2.5: Εκτιμώμενη πιθανότητα απόρριψης από τον παίκτη 2 ως συνάρτηση της προσφοράς εκφρασμένης σε ημέρες εργασίας.

Το σχήμα δείχνει ξεκάθαρα ότι η ίδια ακριβώς προσφορά, όταν το μέγεθος της πίτας αυξάνει απορρίπτεται με μικρότερη πιθανότητα. Τα ποσοστά απόρριψης για παιχνίδια με μεγάλες αποδόσεις είναι γενικότερα πιο χαμηλά.

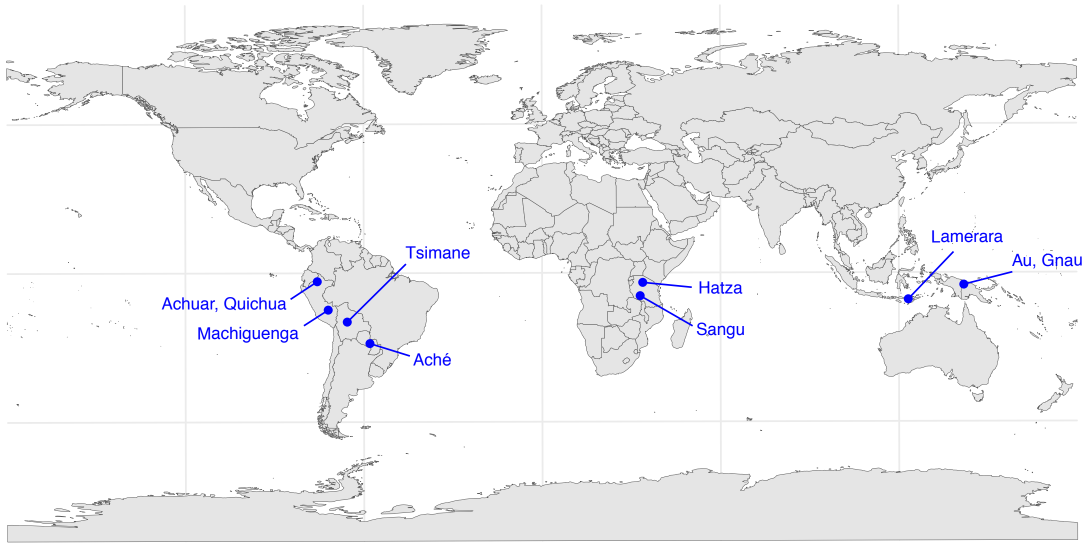
Η συζήτηση ως τώρα μας δείχνει δύο βασικές κατευθύνσεις που ίσως βοηθήσουν στην κατανόηση της προσφοράς της θεωρίας παιγνίων στην ανάλυση οικονομικών αποφάσεων. Η πρώτη είναι η ύπαρξη συμπεριφορικών στοιχείων στην ανάλυση. Ιδιαίτερα για παίγνια με μικρότερες αποδόσεις, οι άνθρωποι δείχνουν να λαμβάνουν αποφάσεις όχι μόνο με γνώμονα την ορθολογική ανάλυση κέρδους-ζημίας αλλά και με κριτήρια όπως η ισότητα ή η δικαιοσύνη. Ωστόσο όταν τα κέρδη ή οι απώλειες κερδών μεγαλώνουν το ορθολογικό κομμάτι της απόφασης δείχνει να υπερισχύει και οι προβλέψεις της θεωρίας παιγνίων να επιβεβαιώνονται. Όταν τα κέρδη στο παίγνιο του τελεσιγράφου στην Ινδία ήταν της τάξεως 6-7 μισθών, οι παίκτες 2, έπαψαν να απορρίπτουν χαμηλές προσφορές και τις δέχονταν με πολύ μεγάλη πιθανότητα. Αυτό δείχνει οι συμμετέχοντες ήταν σε θέση να βάλουν στην άκρη την δυσαρέσκειά τους από την ανισότητα της προσφοράς όταν το ποσό που θα έχαναν αν την απέρριπταν άρχιζε να γίνει σημαντικό. Η διαίσθηση που αποκομίζουμε από αυτά τα πειραματικά παίγνια είναι ότι αφενός οι ψυχολογικές αποδόσεις του παιγνίου δεν συμπίπτουν κατ' ανάγκην με τις χρηματικές, ιδιαίτερα για παίγνια με μικρές αποδόσεις και αφετέρου ότι όταν οι χρηματικές αποδόσεις αυξάνουν, οι ψυχολογικές αποδόσεις τείνουν να έρθουν πολύ πιο κοντά στις χρηματικές: Ένας παίκτης 2 θα απορρίψει πολύ πιο εύκολα μια προσφορά ίση με 5% της πίτα έχει μέγεθος €10 απ' ό,τι θα απέρριπτε το 5% ενός εκατομμυρίου ευρώ!

2.2.2 Πολιτισμικές διαφορές και στρατηγική αλληλεπίδραση

Ένα άλλο μεγάλο ερώτημα που θίξαμε προηγουμένως έχει να κάνει με τον τρόπο που παίζονται τα παίγνια από παίκτες με ετερόκλητες παραδόσεις, πολιτισμό ή και παραγωγικά μοντέλα. Θα περιμέναμε το ίδιο παίγνιο να παιχθεί με τον ίδιο τρόπο από κατοίκους της Νέας Υόρκης ή από κατοίκους της υποσαχάριας Αφρικής; Σε ένα άρθρο που παρουσιάζει τα αποτελέσματα μιας τεράστιας έρευνας πεδίου, οι Henrich κ.ά. 2001 εξετάζουν πώς παίζουν το παίγνιο του τελεσιγράφου μικρές τροφοσυλλεκτικές κοινωνίες. Στον χάρτη του σχήματος 2.6 απεικονίζεται η γεωγραφική διασπορά μερικών από τις κοινωνίες αυτές που θα εξετάσουμε εδώ ως προς τις διαφορές τους στον τρόπο με τον οποίον έπαιξαν το παίγνιο του τελεσιγράφου.

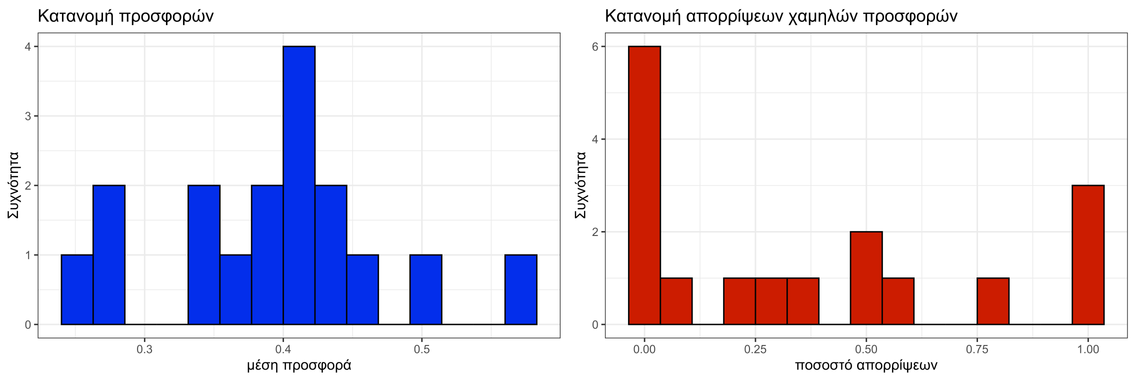
Ο πίνακας 2.1 δίνει τις προσφορές του παίκτη 1 και τις απαντήσεις του παίκτη 2 σε κάποιες χαρακτηριστικές περιπτώσεις ενδεικτικά.

Οι Henrich κ.ά. 2001 κάνουν κάποιες επισημάνσεις με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το πώς παίζεται το παίγνιο του τελεσιγράφου. Η πρώτη παρατήρηση έχει να κάνει με την διακύμαν-



Σχήμα 2.6: Μερικές από τις κοινωνίες των Henrich κ.ά. 2001. Πηγή: Henrich κ.ά. 2005.

ση των προσφορών. Οι προσφορές των τροφοσυλλεκτών απο διαφορετικές κοινωνίες έχουν μεγάλη διακύμανση με άλλες κοινωνίες (βλ. ενδεικτικά Machiguenga από το Περού) να προσφέρουν πολύ μικρότερα ποσοστά του ποσού από τα ποσά που παρατηρούνται σε δυτικές κοινωνίες, και άλλες να προσφέρουν κατά μέσο όρο πάνω από τη μισή πίτα (π. χ. Lamerara από την Ινδονησία). Ακόμα πιο ενδιαφέρον είναι ότι η κατανομή των προσφορών στις μέσα στις κοινωνίες δεν είναι μονοκόρυφη, αλλά συχνά έχει πολλαπλές κορυφές (multimodal), παρατήρηση που δείχνει ότι οι στρατηγικές των παικτών συγκεντρώνονται γύρω από δύο διακριτούς πόλους που απέχουν ο ένας από τον άλλον. Ανάλογο ενδιαφέρον έχει και η κατανομή των απορρίψεων, κυρίως των χαμηλών προσφορών που κυμαίνονται από 0% σε κοινωνίες όπως οι Acht ή οι Lamelare, έως και 100% σε κοινωνίες όπως οι Au από την Παπούα Νέα Γουινέα.



Σχήμα 2.7: Στρατηγικές παικτών στο παίγνιο του τελεσιγράφου όπως παίχθηκε σε μικρές τροφοσυλλεκτικές κοινωνίες.

Το σχήμα 2.7 παρουσιάζει την κατανομή των στρατηγικών των δύο παικτών μεταξύ των διαφορετικών μικρών τροφοσυλλεκτικών κοινωνιών. Το αριστερό γράφημα παρουσιάζει την κατανομή των μέσων προσφορών (στρατηγική παίκτη 1) ανά κοινωνία ενώ το δεξί γράφημα την κατανομή των μέσων απορρίψεων (στρατηγική παίκτη 2) απέναντι σε χαμηλές προσφορές

Ομάδα	χώρα	μέση προσφορά	απόρριψη	απόρριψη χαμηλών προσφορών
Machiguenga	Περού	0.26	4.8%	10%
Hadza	Τανζανία	0.40	19%	80%
Tsimane	Βολιβία	0.37	0%	0%
Quichua	Ισημερινός	0.27	15%	50%
Au	Π.Ν.Γ.	0.43	27%	100%
Gnau	Π.Ν.Γ.	0.38	40%	50%
Sangu	Τανζανία	0.42	5%	100%
Achuar	Ισημερινός	0.42	0%	0%
Aché	Παραγουάη	0.51	0%	0%
Lamerara	Ινδονησία	0.58	0%	0%

Πίνακας 2.1: Προσφορές και απορρίψεις στο παίγνιο του τελεσιγράφου από μικρές τροφοσυλλεκτικές κοινωνίες.
Πηγή: Henrich κ.ά. 2001.

του παίκτη 1. Παρατηρούμε ότι οι μικρές τροφοσυλλεκτικές κοινωνίες διαφέρουν πολύ η μία από την άλλη τόσο στις μέσες προσφορές του παίκτη 1 όσο και στα ποσοστά απορρίψεων του παίκτη 2. Είναι χαρακτηριστικό ότι υπάρχουν κοινωνίες που δεν απορρίπτουν ποτέ ούτε τις χαμηλότερες προσφορές, ενώ άλλες κοινωνίες απορρίπτουν κάθε χαμηλή προσφορά. Όπως επίσης είναι αξιοσημείωτο ότι υπάρχουν κοινωνίες που προσφέρουν λιγότερο από 30% ενώ άλλες προσφέρουν κατά μέσο όρο περισσότερο από το μισό ποσό στον παίκτη 2.

Η συμβολή των Henrich κ.ά. 2001 είναι μεγάλη γιατί μας δίνει συστηματική ανάλυση, με το ίδιο πρωτόκολλο στο ίδιο παίγνιο και με συγκρίσιμες αμοιβές, του τρόπου με τον οποίο πολιτισμικοί και οικονομικοί παράγοντες επηρεάζουν την αντίληψη και την συμπεριφορά δρώντων σε καταστάσης στρατηγικής αλληλεπίδφρασης. Τί είναι αυτό που προσδιορίζει το βαθμό συνεργασίας ή αλτρουισμού στο παίγνιο του τελεσιγράφου όπως παίζεται από μέλη διαφορετικών μικρών τροφοσυλλεκτικών κοινωνιών; Οι Henrich κ.ά. 2001 κάποιους πολύ ενδιαφέροντες παράγοντες που επηρεάζουν σημαντικά το πώς παίζεται το παιχνίδι:

1. Τα *τοπικά ήθη και έθιμα* που επηρεάζουν τον τρόπο που οι παίκτες ερμηνεύουν το παιχνίδι. Για παράδειγμα οι Au και Gnau από την Παπούα Νέα Γουινέα, έκαναν πολύ μεγάλες προσφορές (συχνά πάνω από 50% και είχαν πολύ μεγάλα ποσοστά απόρριψης. Αυτό σχετίζεται με τις συνήθειες προσφοράς και αποδοχής δώρων στην κοινωνία. Στις κοινωνίες της Νέας Γουινέας, η αποδοχή δώρων, ιδιαίτερα μεγάλων δώρων, ακόμα κι αν δεν έχει ζητηθεί, αφενός υποχρεώνει τον αποδέκτη να ανταποδώσει και αφετέρου τον τοποθετεί σε θέση υποτέλειας. Ήταν λοιπόν εύλογο οι συγκεκριμένες ομάδες να απορρίπτουν πολύ γενναιόδωρες προσφορές με πολύ μεγάλο ποσοστό.
2. Η *σημασία της συνεργασίας στην παραγωγή*. Το πόσο αποφέρει η συνεργασία στις συνθήκες παραγωγής της συγκεκριμένης κοινωνίας, επηρέασε και τον τρόπο που έπαιξαν το παιχνίδι και οι δύο παίκτες. Σε κοινωνίες στις οποίες η συνεργασία είναι απαραίτητη για την συλλογή θηραμάτων, οι άνθρωποι θα είναι συνηθισμένη να μοιράζονται και θα περιμένουμε να παίζουν το παιχνίδι του τελεσιγράφου με μεγαλύτερη γενναιοδωρία. Αντίθετα κοινωνίες με αυτάρκεια στην παραγωγή σε επίπεδο οικογένειας, βλέπουν τη διανομή του εισοδήματός τους εχθρικά. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα των Lamerara, μας φαλαινοθηρικής φυλής από την Ινδονησία. Για τους φαλαιοθήρες η συνεργασία αποτελεί συνθήκη επιβίωσης, καθότι χωρίς συνεργασία σε επίπεδο φυλής, δεν μπορούν να αλιεύσουν. Οι Lamerara έκαναν τις πιο γενναιόδωρες προσφορές, και ποτέ δεν απέρριπταν την προσφορά ως παίκτης 2.

3. Ο *βαθμός αγοραίας ολοκλήρωσης* της κοινωνίας. Όσο περισσότερες αγοραίες συναλλαγές κάνει κάποιος, τόσο πιο εξοικειωμένος θα είναι με τους κανόνες ανταλλαγής και με την διανομή πλεονάσματος με αγνώστους, κάτι που γίνεται και στο παίγνιο του τελεσιγράφου.

Συνδυασμένα, ο βαθμός συνεργασίας στην παραγωγή και ο βαθμός αγοραίας ολοκλήρωσης μπορούν να εξηγήσουν 68% της διακύμανσης των προσφορών, τη στιγμή που ατομικοί παράγοντες όπως φύλο, ηλικία, σχετικός πλούτος δεν είχαν στατιστικά σημαντικό αποτέλεσμα στο ύψος των προσφορών.

Η τεράστιας έκτασης και σημασίας έρευνα των Henrich κ.ά. 2001 καταδεικνύει τον ρόλο που παίζουν στις στρατηγικές μας αποφάσεις πολιτισμικοί παράγοντες. Συνδέει ένα παίγνιο που στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράψαμε ως προϊόν καθαρής λογικής ανάλυσης με τα ήθη, την κοινωνική και πολιτιστική πρόσληψη της διανομής και της προσφοράς και με δομικά παραγωγικά χαρακτηριστικά. Η παιγνιοθεωρητική ανάλυση αποτελεί μία ορθολογική συνιστώσα της συμπεριφοράς μας. Για να αποκτήσουμε μια πιο πλήρη εικόνα θα πρέπει πάντα να συνεκτιμούμε και όλους τους αλλους ανθρωπολογικούς, πολιτιστικούς, οικονομικούς και κοινωνικούς παράγοντες. Συνεχίζουμε με συζήτηση πειραματικών και εμπειρικών παρατηρήσεων σε ένα άλλο παίγνιο που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, της σαρανταποδαρούσας, του οποίου οι προβλέψεις μας οδήγησαν να αναρωτηθούμε για την ακρίβεια και την χρησιμότητα της έννοιας της τέλειας ισορροπίας και της οπισθογενούς επαγωγής. Γιατί η σαρανταποδαρούσα είπαμε οδηγεί σε μη ρεαλιστικές προβλέψεις για το πως θα παικτεί το παίγνιο. Ή μήπως όχι;

2.2.3 Η Σαρανταποδαρούσα στην πράξη

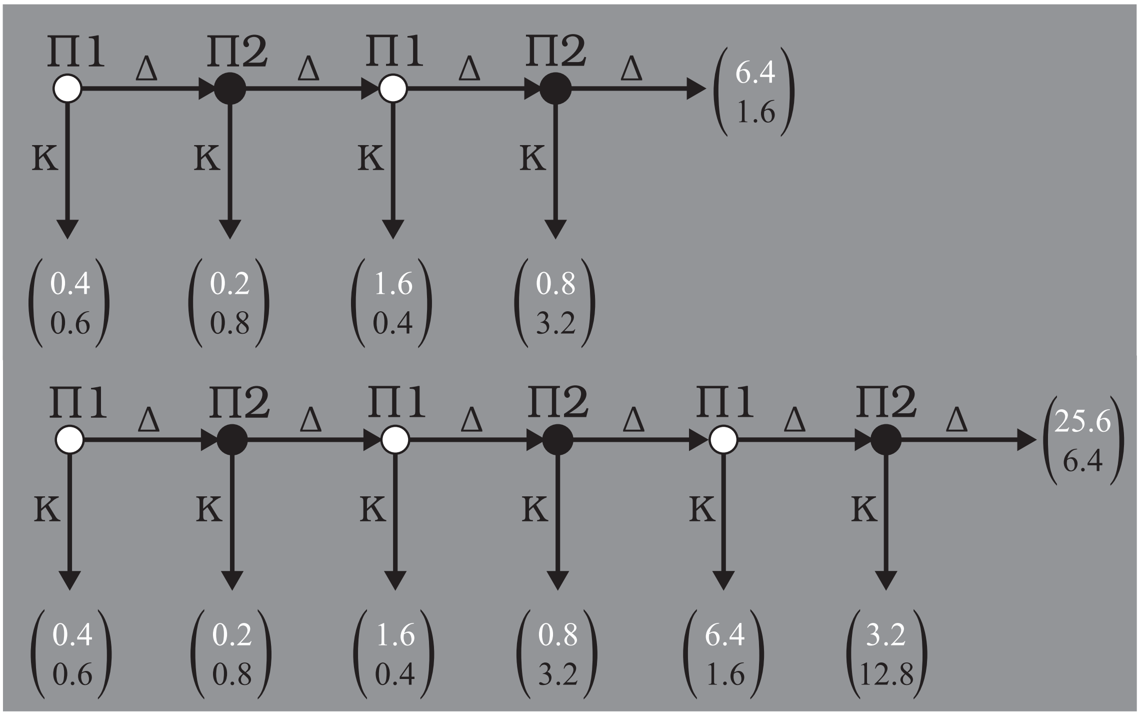
Στο προηγούμενο κεφάλαιο, στο παράδειγμα 1.16, είδαμε το παίγνιο της σαρανταποδαρούσας και αναφέραμε εν συντομία ότι το παίγνιο αποτελεί ένα πλήγμα στην οπισθογενή επαγωγή. Ο οπισθογενής ανάλυση για εκατό βήματα οδηγεί σε αποδόσεις που είναι συνταρακτικά μικρότερες απ' ό,τι θα λάμβαναν οι παίκτες αν έπαιζαν μη ορθολογικά. Και διαισθητικά είναι δύσκολο να αποτινάξουμε την αίσθηση ότι η τέλεια ισορροπία του παιγνίου δεν συμπίπτει με τον τρόπο που θα έπαιζε το παίγνιο η πλειοψηφία των ανθρώπων.

Βεβαιώνουν οι εμπειρικές παρατηρήσεις την διαίσθησή μας ότι οι περισσότεροι άνθρωποι δεν θα εγκατέλειπαν το παίγνιο στον κόμβο 1; Ή μήπως η παιγνιοθεωρητική πρόβλεψη επαληθεύεται σε κάποιες περιπτώσεις και ποιες;

Οι McKelvey και Palfrey 1992, διοργάνωσαν ένα πείραμα στο Κολλέγιο της Passadena και στο California Institute of Technology με το παίγνιο της Σαρανταποδαρούσας. Καθότι οι αμοιβές της Σαρανταποδαρούσας στο παίγνιο με τους εκατό κόμβους μπορεί να είναι πολύ υψηλές για να διοργανωθεί ένα πείραμα με αρκετούς γύρους για στατιστική ανάλυση, το παίγνιο των McKelvey και Palfrey 1992 παίχτηκε με μειωμένους κόμβους σε δύο παραλλαγές, με τέσσερις (συν τον τελικό) και έξι (συν τον τελικό) κόμβους. Τα δύο παίγνια των McKelvey και Palfrey 1992 απεικονίζονται στο σχήμα 2.8.

Αν υπάρχει ένα συμπέρασμα από την ανάλυση των McKelvey και Palfrey 1992, αυτό είναι ότι το παίγνιο δεν παίζεται όπως προβλέπει η θεωρία για παίγνιο τέλειας πληροφόρησης. Συγκεκριμένα, η συντριπτική πλειοψηφία των παιχνιδιών δεν έληξαν ούτε στον πρώτο κόμβο, όπως προβλέπει η δυναμική ανάλυση με τέλεια πληροφόρηση, ούτε στον τελικό κόμβο που μεγιστοποιεί τις συνολικές κοινωνικές αποδόσεις. Η κατανομή των κόμβων εξόδου του παιχνιδιού δίνεται στο σχήμα 2.9.

Όπως φαίνεται ξεκάθαρα, οι παίκτες που κλήθηκαν να παίξουν την Σαρανταποδαρούσα, δεν συμπεριφέρθηκαν ούτε πλήρως ορθολογικά με κριτήρια τέλειας πληροφόρησης, αλλά ούτε πλήρως αλτρουιστικά, φτάνοντας στον τελικό κόμβο που μεγιστοποιεί τις αποδόσεις της κοινωνίας, ακόμα κι αν θυσίαζαν προσωπικά κέρδη. Αντιθέτως η συντριπτική πλειοψηφία



Σχήμα 2.8: Το παίγνιο της σαρανταποδαρούσας των McKelvey και Palfrey 1992

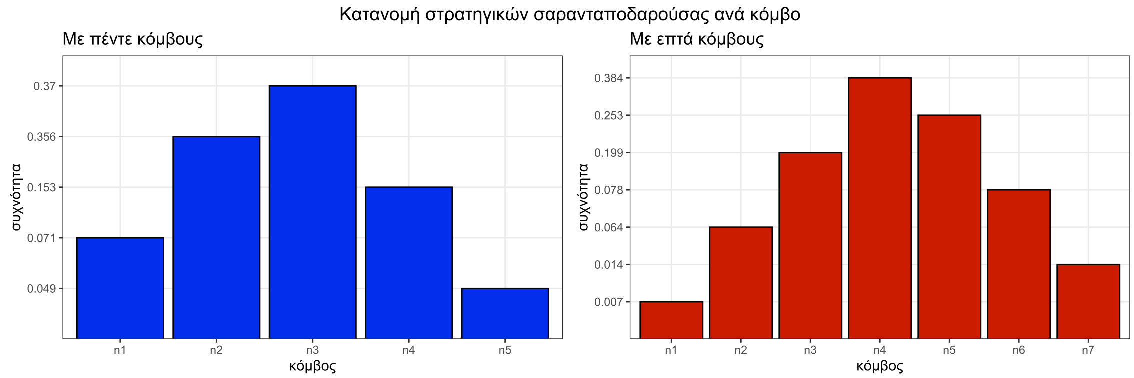
κυμάνθηκε κάπου στην μέση. Παρατηρήστε ότι στο παίγνιο με τους περισσότερους κόμβους (δεξιά) και τις υψηλότερες πληρωμές. Το ποσοστό των παιγνίων που τελείωσε στον πλήρως ορθολογικό κόμβο (n_1) είναι εξαιρετικά μικρό ($\leq 1\%$).

Πώς μπορούμε να εξηγήσουμε την απόκλιση της πράξης από τις προβλέψεις της θεωρίας παιγνίων; Σημαίνει ότι οι παίκτες δεν είναι ορθολογικοί; Η μία εξήγηση πιθανώς μας λέει ότι η ορθολογικότητα είναι μόνο μία συνιστώσα της συμπεριφοράς των ανθρώπων. Υπάρχουν και άλλες συνιστώσες όπως ο αλτρουισμός.

Μια άλλη εξήγηση λέει ότι πιθανώς οι παίκτες έχουν περιορισμένη ορθολογικότητα και δεν μπορούν να δουν ευθύς εξαρχής το τέλος από τον πρώτο κόμβο. Αλλά γιαυτό και δεν παίζουν έξω από την αρχή. Ωστόσο όσο πλησιάζουν προς τον τελικό κόμβο, αρχίζουν και συνειδητοποιούν ότι στρατηγικά τους συμφέρει να βγουν πριν προλάβει ο άλλος παίκτης και εγκαταλείπουν το παιχνίδι σε ενδιάμεσους κόμβους.

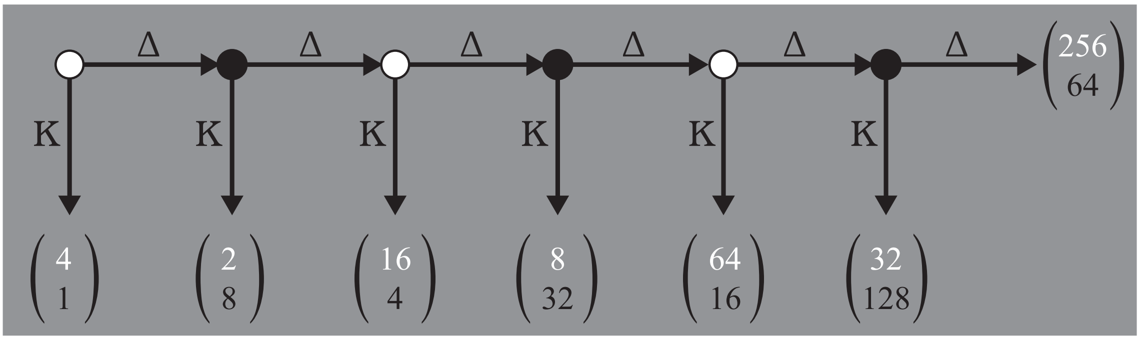
Οι McKelvey και Palfrey 1992 δίνουν μια άλλη εξήγηση: εάν υπάρχει ένα μικρό ποσοστό αλτρουιστών, οι παίκτες δεν γνωρίζουν ποιον έχουν απέναντί τους και τότε παίζουν ένα παίγνιο ελλιπούς πληροφόρησης στο οποίο υιοθετούν μεικτές στρατηγικές. Οι McKelvey και Palfrey 1992 εκτιμούν διαφορετικές παραμετροποιήσεις με την μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας και καταλήγουν ότι το υπόδειγμα με ύπαρξη αλτρουιστών είναι αυτό που εξηγεί καλύτερα την παρατηρούμενη συμπεριφορά και υπολογίζουν ένα επίπεδο αλτρουισμού της τάξης του 5%.

Οι McKelvey και Palfrey 1992 μπορούν να συμβιβάσουν την παρατηρούμενη συμπεριφορά με ορθολογισμό χρησιμοποιώντας ένα μάλλον σύνθετο υπόδειγμα και με την υπόθεση ύπαρξης αλτρουιστικών παικτών. Πιο πρόσφατα οι Palacios-Huerta και Volij 2009 παρουσίασαν μια νέα και καινοτόμα προσέγγιση στην Σαρανταποδαρούσα. Για να τσεκάρουν το εάν η ικανότητα των παικτών για ορθολογική ανάλυση επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο παίζουν την σαρανταποδαρούσα. Οι Palacios-Huerta και Volij 2009 παρουσιάζουν μια βερσιόν του παιγνίου των McKelvey και Palfrey 1992 με επτά κόμβους που παρουσιάσαμε πιο πάνω,



Σχήμα 2.9: Κατανομή εκβάσεων στο παίγνιο της σαρανταποδαρούσας των McKelvey και Palfrey 1992

με τις αποδόσεις πολλαπλασιασμένες επί 10. Το παίγνιο απεικονίζεται στο σχήμα

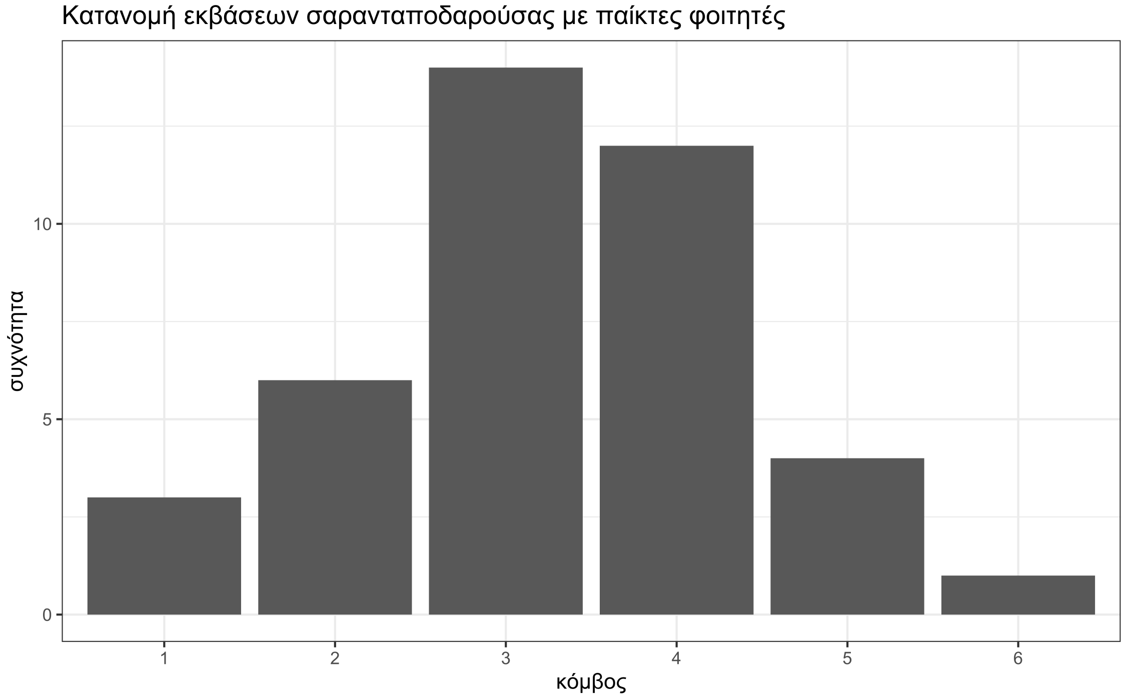


Σχήμα 2.10: Το παίγνιο των Palacios-Huerta και Volij 2009

Η καινοτομία ωστόσο των Palacios-Huerta και Volij 2009 συνίσταται στην επιλογή των παικτών. Όπως και οι McKelvey και Palfrey 1992, έτσι και οι Palacios-Huerta και Volij 2009 χρησιμοποίησαν φοιτητές για την μελέτη της σαρανταποδαρούσας. Οι φοιτητές ως πληθυσμός πιάνουν το πώς παίζουν το παιχνίδι παίκτες με αντίληψη αλλά πιθανώς χωρίς τέλεια μελλοντική όραση. Η σαρανταποδαρούσα χρειάζεται να μπορεί ένας παίκτης να προβλέψει πιθανές βαριάντες του παιχνιδιού στο μέλλον (όπως ακριβώς κάνουν οι παίκτες στο σκάκι). Για να δουν πώς συγκρίνονται οι φοιτητές με παίκτες που έχουν πολύ μεγάλη υπολογιστική ικανότητα για μελλοντικά μονοπάτια, οι Palacios-Huerta και Volij 2009 διοργάνωσαν και γύρους του παιχνιδιού με συμμετέχοντες σκακιστές διαφόρων επιπέδων. Το πείραμα διοργνώθηκε σε 2 φάσεις. Στην πρώτη φάση δύο διαφορετικές ομάδες έπαιξαν χωριστά. Φοιτητές έπαιξαν εναντίον φοιτητών και σκακιστές εναντίον σκακιστών. Τα αποτελέσματα του πειράματός τους ήταν αποκαλυπτικά.

Το σχήμα 2.11 παρουσιάζει τον τρόπο που έπαιξαν το παιχνίδι φοιτητές. Όπως και στα αποτελέσματα των McKelvey και Palfrey 1992, η μεγάλη μάζα των παιγνίων κατέληξαν σε ένα κόμβο μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου, που επιβεβαιώνει την θέση ότι οι παίκτες δεν δείχνουν τέλεια ορθολογικότητα στον τρόπου που παίζουν την σαρανταποδαρούσα.

Όταν οι Palacios-Huerta και Volij 2009 επανέλαβαν το παίγνιο σε τουρνουά σκακιού, έβαλαν αντιμέτωπους ως παίκτες 1 και πάκτες 2 σκακιστές διαφορετικών δυνατοτήτων. Οι τίτλοι των σκακιστών (Grandmaster - GM, International Master - IM και Federation Master



Σχήμα 2.11: Κατανομή εκβάσεων Palacios-Huerta και Volij 2009 όπως παίχτηκε από φοιτητές.

- FM αντικατοπτρίζουν τους υψηλότερου (κατά φθίνουσα σειρά) τίτλους που μπορεί να λάει ένας σκακιστής από την Παγκόσμια Σκακιστική Ομοσπονδία. GM είναι ο υψηλότερος τίτλος που μπορεί να χορηγηθεί σε έναν σκακιστή, ακολουθεί ο τίτλος IM, κατόπιν ο FM και οι υπόλοιποι σκακιστές είναι αδιαβάθμητοι. Το σχήμα 2.12 δείχνει πώς έπαιξαν το παίγνιο οι σκακιστές:

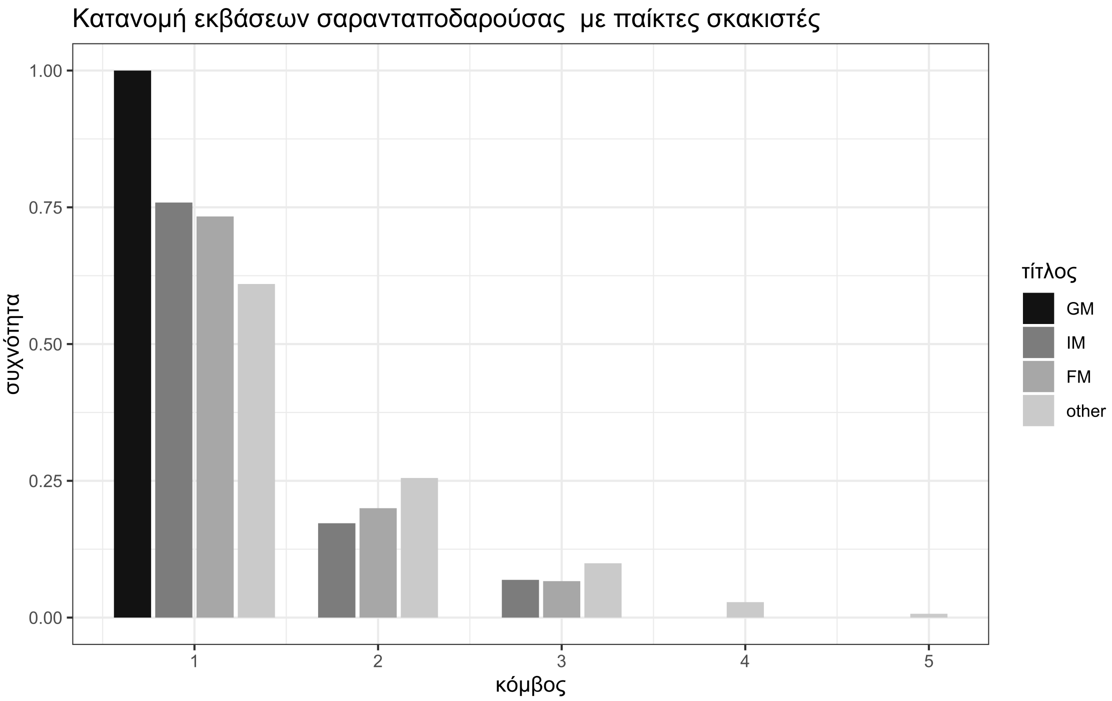
Όλοι οι σκακιστές της υψηλότερης βαθμίδας ανεξαιρέτως τελείωσαν το παιχνίδι στον πρώτο κόμβο. Οι σκακιστές με βαθμίδα GM είναι εκπαιδευμένοι στην αναλυτική σκέψη και στην πρόβλεψη βαριάντων πολλές κινήσεις μπροστά. Όλοι τους έπαιξαν το παίγνιο ακριβώς όπως προλέπει η τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου. Οι χαμηλότερες βαθμίδες έπαιξαν πολύ κοντά στην προλεπόμενη τέλεια ισορροπία με τους παίκτες να αποκλίνουν περισσότερο όταν ανήκαν σε χαμηλότερη βαθμίδα.

Όταν το παίγνιο επαναλήφθηκε στο εργαστήριο και οι σκακιστές αναμίχθηκαν με φοιτητές, τα αποτελέσματα ήταν επίσης πολύ ενδιαφέροντα:

Οι σκακιστές ήταν πολύ πιο κοντά στην προβλεπόμενη ισορροπία απ' ό,τι οι φοιτητές. Μάλιστα όταν έπαιξαν επαναλαμανόμενους γύρους όλοι οι σκακιστές που αντιμετώπισαν σκακιστές συνέκλιναν στην τέλεια ισορροπία έως την 5η επανάληψη του παιγνίου. Όταν οι σκακιστές αντιμετώπιζαν φοιτητές, και πάλι το παίξιμό τους ήταν πολύ κοντά στην προλεπόμενη τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου.

Αντιθέτως οι φοιτητές που αντιμετώπισαν φοιτητές έπαιξαν όπως και στις προηγούμενες μελέτες με ποσοστό μόνο 3% να συγκλίνει στην τέλεια ισορροπία και χωρίς να υπάρχει σύγκλιση προς την ισορροπία προς τους τελευταίους γύρους. Όταν οι φοιτητές ως παίκτης 1 αντιμετώπισαν σκακιστές, το ποσοστό των παιγνίων που έληξαν στην πρώτη κίνηση δεκαπλασιάστηκε και μάλιστα στους τελευταίους δύο γύρους το ποσοστό που έληξε στον κόμβο 1 ήταν 70%.

Βλέπουμε δηλαδή ότι παίκτες εξασκημένοι στην λογική ανάλυση κινήσεων και στην



Σχήμα 2.12: Κατανομή εκβάσεων Palacios-Huerta και Volij 2009 όπως παίχτηκε από σκακιστές.

πρόλεψη μελλοντικών κινήσεων του αντιπάλου συγκλίνουν σε πολύ μεγάλο βαθμό στις προλέψεις της θεωρίας παιγνίων, ενώ παίκτες που δεν έχουν ανάλογη εκπαίδευση αποκλίνουν συστηματικά. Επιπλέον όταν παίκτες όπως οι φοιτητές ματσάρονται με παίκτες με πείρα στον υπολογισμό των μελλοντικών γύρων όπως οι σκακιστές, το παίξιμό τους πλησιάζει πολύ περισσότερο στις προλέψεις της θεωρίας παιγνίων. Η ανάλυση των Palacios-Huerta και Volij 2009 προσφέρει ισχυρότατες ενδείξεις ότι, σε πολλά παίγνια, η απόκλιση από τις προβλέψεις της θεωρίας παιγνίων μπορεί να μην οφείλονται σε αποκλίσεις από την ορθολογικότητα αλλά σε δυσκολία των παικτών να υπολογίσουν με συνέπεια την τέλεια ισορροπία και όταν είτε από εξάσκηση, είτε επειδή βρίσκονται αντιμέτωποι με παίκτες που παίζουν ορθολογικά, το παίξιμό τους πλησιάζει στις προβλέψεις της θεωρίας.

2.3 Μεικτές στρατηγικές: παίζουν οι επαγγελματίες minimax;

Οι μεικτές στρατηγικές έχουν συχνά δεχθεί δριμεία κριτική που βασίζεται κυρίως στην «τυχαιοποίηση» που κάνουν οι παίκτες (Aumann 1985, Rubinstein 1991). Η κριτική εστιάζει κυρίως σε δύο σημεία: αφενός ότι ο ένας παίκτης πρέπει να επιλέξει την ακριβή πιθανότητα που κάνει τον άλλον παίκτη αδιάφορο μεταξύ των στρατηγικών που πρέπει να χρησιμοποιήσει. Αυτό σημαίνει ότι εγώ επιλέγω την ακριβή μίξη ώστε εσείς να είστε αδιάφοροι μεταξύ των στρατηγικών που παίζετε με θετική πιθανότητα. Πόσες φορές όμως έχουμε εμπειρία παικτών που επιλέγουν το πώς παίζουν ώστε να είναι ο αντίπαλός τους αδιάφορος μεταξύ των στρατηγικών του; Επιπλέον, στην ισορροπία κάθε παίκτης είναι ακριβώς αδιάφορος μεταξύ αυτών των στρατηγικών. Γιατί λοιπόν αφού είναι αδιάφορος να εστιάζει ακριβώς σε αυτήν την μίξη και όχι σε οποιαδήποτε άλλη;

Ως προς το πρώτο ερώτημα μπορούμε να σκεφτούμε πολλές περιπτώσεις στις οποίες θέλουμε ο αντίπαλος να είναι ακριβώς αδιάφορος μεταξύ των στρατηγικών του. Σκεφτείτε τα παίγνια αμιγούς σύγκρουσης/ανταγωνισμού, όπως το πέτρα-ψαλίδι-χαρτί, ή η απόφαση του πού θα σερβίρει ένας τενίστας σε έναν αγώνα. Εάν ο αντίπαλος δεν είναι αδιάφορος μεταξύ δύο στρατηγικών του, πχ A και B, αυτό σημαίνει ότι θα προτιμάει την μία, ας πούμε την A. Αν δηλαδή ο τενίστας στην υποδοχή προτιμάει να κινηθεί προς τα δεξιά, αυτό σημαίνει ότι καταλαβαίνει ότι δεξιά έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να νικήσει. Μα όσο μεγαλώνει η πιθανότητα να νικήσει αυτός, τόσο ελαττώνεται η πιθανότητα να νικήσει αυτός που σερβίρει. Και ο server δεν το θέλει αυτό. Για να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα νίκης του, θα πρέπει ο αντίπαλος να μην προτιμάει καμία από τις δύο πλευρές. Ή στο πέτρα ψαλίδι χαρτί: αν εσείς προτιμάτε την πέτρα από το ψαλίδι ή το χαρτί, αυτό σημαίνει ότι με την πέτρα με νικάτε πιο συχνά, αλλιώς δεν θα την προτιμούσατε. Εγώ λοιπόν ως αντίπαλος θέλω να σας κάνω να μην προτιμάτε κάποια από τις τρεις στρατηγικές. Αν την προτιμάτε, θα πει ότι σας αρέσει και αυτό δεν αρέσει σε μένα!

Το παραπάνω επιχείρημα εν μέρει απαντά και στην δεύτερη κριτική: από όλες τις στρατηγικές μου μεταξύ των οποίων είμαι αδιάφορος, επιλέγω ακριβώς την μίξη που σας κάνει κι εσάς αδιάφορους γιατί το να προτιμάτε κάτι από τα δύο είναι κακά νέα. Ο Harsanyi 1973 δίνει και μια άλλη πολύ ενδιαφέρουσα ερμηνεία για τις μεικτές στρατηγικές: οι μικτές ισορροπίες Nash είναι το όριο μιας Bayes-ανής ισορροπίας Nash, δηλαδή μιας ισορροπίας Nash σε ένα παίγνιο ελλιπούς πληροφόρησης, όταν η αβεβαιότητα είναι πολύ μικρή. Φυσικά για να καταλάβουμε καλύτερα αυτήν την ερμημεία, θα πρέπει να συζητήσουμε παίγνια ελλιπούς πληροφόρησης, κάτι που είναι πέρα από τις δυνατότητες ενός γενικού εγχειριδίου μικροοικονομικής. Για όσους ενδιαφέρεστε περισσότερο, για Bayesian Nash ισορροπίες, μπορείτε να απευθυνθείτε στην βιβλιογραφία που συζητήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Ένα ερώτημα που γεννιέται εύλογα είναι εάν έχουμε λόγους να πιστεύουμε ότι οι μεικτές ισορροπίες παίζονται στην πραγματικότητα. Κι εδώ θα μπορούσαμε να συζητήσουμε μια σειρά από πειραματικές δοκιμές που έχουν γίνει σε εργαστήρια. Ίσως όμως είναι πιο ενδιαφέρον να στραφούμε σε ένα παράδειγμα από τον επαγγελματικό αθλητισμό, και μάλιστα ένα παράδειγμα που όλοι κάποια στιγμή έχουμε παρακολουθήσει: το χτύπημα των πέναλτυ. Ο Palacios-Huerta 2003 από τον οποίο δανείζομαι και τον τίτλο της παρούσας ενότητας, μελέτησε το πώς χτυπούν πέναλτυ και πώς επιλέγουν πλευρά οι τερματοφύλακες σε μεγάλα Ευρωπαϊκά πρωταθλήματα (Ιταλία, Ισπανία, Αγγλία κ.α.). Ο Ο Palacios-Huerta 2003 μελέτησε 1417 χτυπήματα πέναλτυ και συγκεκριμένα ποια πλευρά επιλέγει ο επιθετικός για να στείλει την μπάλα και ποια πλευρά ο τερματοφύλακας για να πέσει. Ποιες είναι οι αποδόσεις αυτού του παιγνίου; Ας δούμε πώς θα ήταν το παίγνιο σε απλουστευμένη μορφή στον πίνακα 2.2.

		Τερματοφύλακας	
		Α	Δ
Επιθετικός	Α	0, 1	1, 0
	Δ	1, 0	0, 1

Πίνακας 2.2: Το χτύπημα του πέναλτυ με απόλυτη επιτυχία ή αποτυχία.

Ο επιθετικός θέλει να ξεγελάσει τον τερματοφύλακα και να τον στείλει στην αντίθετη πλευρά από την πλευρά που θα χτυπήσει το πέναλτυ. Αντίθετα ο τερματοφύλακας θέλει να μαντέψει σωστά. Στον πίνακα 2.2 παρουσιάζουμε μια απλουστευμένη μορφή του παιγνίου στην οποία θεωρούμε ότι αν ο επιθετικός κατορθώσει να ξεγελάσει τον τερματοφύλακα (πχ τον στείλει αριστερά αλλά χτυπήσει την μπαλλα δεξιά), τότε σκοράρει με πιθανότητα 100%. Αν πάλι ο τερματοφύλακας δεν ξεγελαστεί, αλλά μαντέψει σωστά, τότε σίγουρα πιάνει την μπάλα. Έτσι για παράδειγμα στο προφίλ ΔΔ, ο επιθετικός λαμβάνει 0 αφού δεν σκόραρε και ο τερματοφύλακας 1 αφού μάντεψε σωστά.

Ωστόσο στην πραγματικότητα τα πράγματα είναι πιο σύνθετα. Στην πραγματικότητα ο επιθετικός μπορεί να ξεγελάσει τον τερματοφύλακα, και παρόλαυτά να μην σκοράρει (γιατί για παράδειγμα έστειλε την μπάλα στο δοκάρι ή έξω). Ή και αντίθετα: ο τερματοφύλακας μπορεί να πέσει στην σωστή πλευρά και να μπει το γκολ γιατί το χτύπημα ήταν πολύ δυνατό και δεν πρόλαβε να σταματήσει την μπάλα. Έτσι πιο σωστά, οι αναθεωρημένες αποδόσεις σε κάθε προφίλ μας δίνουν την πιθανότητα να μπει το γκολ ανάλογα με το τί κάνουν οι δύο αντίπαλοι. Το αναθεωρημένο παίγνιο φαίνεται στον πίνακα 2.3

		Τερματοφύλακας: Α	Τερματοφύλακας: Δ	
Επιθετικός	Α	58.3, 41.7	94.97, 5.03	p
	Δ	92.91, 7.09	69.92, 30.08	$1-p$
		q	$1-q$	

Πίνακας 2.3: Το χτύπημα του πέναλτυ με πραγματική παρατηρούμενη επιτυχία.

Στον πίνακα οι αποδόσεις των δύο παικτών είναι οι πιθανότητες επιτυχίας τους. Για παράδειγμα όταν ο επιθετικός χτυπάει την μπάλα Αριστερά και ο τερματοφύλακας μαντεύει σωστά (Α), η πιθανότητα να μπει γκολ είναι 58.3%. Επομένως η απόδοση του επιθετικού είναι 58.3 ενώ η απόδοση του τερματοφύλακα είναι η πιθανότητα να πιάσει την μπάλα, δηλαδή 41.7. Θα παρατηρήσετε ότι σε κάθε έκβαση, οι αποδόσεις των δύο παικτών αθροίζουν στο 100%. Είναι ξεκάθαρο ότι στα παρατηρούμενα παίγνια όταν ο επιθετικός αποτυγχάνει να ξεγελάσει τον αντίπαλό του σκοράρει πολύ λιγότερο (58.3% και 69.92%) απ΄ ό,τι αν τον στείλει σε διαφορετική πλευρά από το χτύπημά του (95.97% και 92.91% αντίστοιχα). Όπως είναι προφανές από απλή επισκόπηση και των δύο παραλλαγών του παιγνίου, το παίγνιο δεν έχει ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε την ισορροπία σε μεικτές στρατηγικές: Για να υπολογίσουμε την ισορροπία του παιγνίου σε μεικτές στρατηγικές, ψάχνουμε τις κατανομές πιθανότητας $p,(1-p)$ και $q,(1-q)$ για τις οποίες κανείς δεν θέλει να παρεκκλίνει. Θυμηθείτε ότι για να υπολογίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας, θέλουμε η μίξει που κάνει ο επιθετικός (p) να αφήνει τον τερματοφύλακα αδιάφορο μεταξύ Α και Δ, και αντίστοιχα η μίξη (q) να αφήνει τον επιθετικό αδιάφορο μεταξύ του να στείλει την μπάλα αριστερά ή δεξιά. Επομένως ο επιθετικός επιλέγει p έτσι ώστε:

$$EU_{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} = EU_{\Delta}^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow 41.7p + 7.09(1-p) = 4.03p + 30.08(1-p) \Leftrightarrow \boxed{p^* = 38.54\%} \tag{2.1}$$

Αντίστοιχα, ο τερματοφύλακας επιλέγει το q έτσι ώστε ο επιθετικός να είναι αδιάφορος μεταξύ Α και Δ:

$$EU_{\mathrm{A}}^{\mathrm{E}} = EU_{\Delta}^{\mathrm{E}} \Leftrightarrow 58.3q + 94.97(1-q) = 92.91q + 69.92(1-q) \Leftrightarrow \boxed{q^* = 41.99\%} \tag{2.2}$$

Πόσο καλά περιγράφει η λύση του θεωρητικού υποδείγματος την παρατηρούμενη συχνότητα με την οποία οι επαγγελματίες παίζουν το χτύπημα του πέναλτυ;

	q	$1-q$	p	$1-p$
Προβλεπόμενες συχνότητες Nash	41.99%	58.01%	38.54%	61.46%
Παρατηρούμενες συχνότητες	42.31%	57.69%	39.98%	60.02%

Πίνακας 2.4: Προβλεπόμενες και παρατηρούμενες συχνότητες του παιγνίου πέναλτυ.

Ο πίνακας 2.4 δίνει τις προβλέψεις της θεωρίας για τις μεικτές στρατηγικές ισορροπίας και τις συχνότητες με τις οποίες οι παίκτες παίζουν το παίγνιο στα μεγάλα Ευρωπαϊκά πρωταθλήματα. Βλέπουμε ότι τα δύο είναι πολύ κοντά το ένα στο άλλο. Για την ακρίβεια η υπόθεση ότι οι παίκτες χτυπούν (και πέφτουν) τα πέναλτυ με τις συχνότητες που προβλέπει η μεικτή ισορροπία Nash δεν μπορεί να απορριφθεί. Για την ακρίβεια με p-values σταθερά πάνω από 35% και σε πιο ειδικά τεστ να πλησιάζουν το 90%, οι δύο συχνότητες είναι ουσιαστικά πανομοιότυπες.

Η έρευνα του Palacios-Huerta 2003 είναι σημαντική γιατί έξω από το εργαστήριο, σε πραγματικές συνθήκες με επαγγελματίες που είναι εκπαιδευμένοι να παίζουν το παίγνιο όσο καλύτερα γίνεται, δείχνει ότι οι προβλέψεις της θεωρίας παιγνίων επιβεβαιώνονται με εντυπωσιακή ακρίβεια. Η έρευνά του προσφέρει στιβαρή υποστήριξη στην ισορροπία Nash σε μεικτές στρατηγικές και μας διδάσκει ότι οι τελευταίες είναι ένα εργαλείο ανάλυσης που. μπορεί να περιγράψει με μεγάλη ακρίβεια το πώς παίζουν επαγγελματίες παίγνια με σημαντικές αποδόσεις.

2.4 Χρόνος και συνεργασία

Στο παράδειγμα 2.5 του κεφαλαίου 2.5, είδαμε το δίλημμα του κρατουμένου, ένα από τα πιο γνωστά και χρησιμοποιημένα παίγνια. Δεν πρέπει να υπάρχει βιβλίο η εισαγωγικό κεφάλαιο σε θεωρία παιγνίων που να μην αναφέρει το δίλημμα του κρατουμένου. Γιατί μας ενδιαφέρει τόσο το παίγνιο αυτό; Θυμίζουμε το παίγνιο σε στρατηγική μορφή:

	Σ	Α
Σ	-1,-1	-12,0
Α	0, -12	-6,-6

Πίνακας 2.5: Δίλημμα του κρατουμένου

Το δίλημμα του κρατουμένου απεικονίζει ξεκάθαρα την σύγκρουση ανάμεσα στο κίνητρο της συνεργασίας και στο κίνητρο της αποσκίρτησης. Σε στατικό περιβάλλον, η λύση του παιγνίου είναι ξεκάθαρη. Η στρατηγική αποσκίρτηση είναι κυρίαρχη στρατηγική ανεξαρτήτως του τί θα πράξει ο άλλος παίκτης, είναι πάντοτε αυστηρώς αποδοτικότερο και για τους δύο παίκτες να αποσκιρτήσουν. Ταυτόχρονα όμως η λύση του παιγνίου είναι αναποτελεσματική καθώς οι συνολικές κοινωνικές αποδόσεις είναι πολύ μικρότερες σε σχέση με το προφίλ στο οποίο και οι δύο παίκτες συνεργάζονται.

Το δίλημμα του κρατουμένου προκαλεί μια αναστάτωση σε όσους έρχονται σε επαφή για πρώτη φορά με το παίγνιο. Κάτι μέσα μας, μάς ενοχλεί σε βαθύ επίπεδο για το ότι μια κοινωνία των κρατουμένων που αποζητούν τη μέγιστη δυνατή ευημερία, καταλήγουν να βλάπτουν ο ένας τον άλλον και συνεπώς και το σύνολο της κοινωνίας τους τόσο πολύ. Οι δύο κρατούμενοι καταλήγουν ο καθένας 5 μήνες περισσότερο στην φυλακή απ' ό,τι αν συνεργάζονταν, κι ωστόσο τίποτα δεν μπορεί να αποτρέψει αυτήν την εξέλιξη στο στατικό παίγνιο, παρότι οι αποδόσεις αλλά και η λύση είναι γνωστές σε όλους. Κι αυτή η κατάληξη εναντιώνεται στην διαίσθηση που έχουμε ότι οι άνθρωποι συνεργάζονται συχνά με ευεργετικά αποτελέσματα.

Πώς μπορεί επομένως να συμβιβαστεί το δίλημμα του κρατουμένου με την παρατήρηση ότι η συνεργασία προκύπτει συχνά σε καθημερινό επίπεδο, ακόμα και σε μη συνεργατικά (υπό την παιγνιοθεωρητική έννοια) περιβάλλοντα; Θα εξετάσουμε δύο προσεγγίσεις που επιχειρούν να δείξουν ότι το δίλημμα του κρατουμένου μπορεί να έχει συνεργατική κατάληξη. Και οι δύο είναι δυναμικές και απαιτούν μελλοντικό χρόνο για να τιμωρήσουν παρεκκλίνουσες συμπεριφορές.

2.4.1 Άπειρα επαναλαμβανόμενα παίγνια, υπομονή και «λαϊκά» θεωρήματα (folk theorems)

Η πρώτη προσέγγιση βασίζεται στον Friedman 1971 και προτείνει ως λύση στο επαναλαμβανόμενο παίγνιο την λύση της συνεργασίας και από τους δύο παίκτης. Ο Friedman 1971 ορίζει ως «υπερπαίγνιο» (supergame), το άπειρα επαναλαμβανόμενο παίγνιο στο οποίο οι παίκτες προεξοφλούν το μέλλον με κάποιον συντελεστή προεξόφλησης δ. Το παίγνιο παίζεται από τώρα και για άπειρο ορίζοντα και αν για το προφίλ στρατηγικών s_t στην t-οστή επανάληψη του παιγνίου ο παίκτης i λαμβάνει αποδόσεις $u_t^i(s_t)$, τότε η παρούσα αξία των μελλοντικών προφίλ $s_1, s_2, \ldots s_T, \ldots$ για τον παίκτη i είναι $\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j u_j^i(s_j)$. Ο Friedman 1971 ουσιαστικά δείχνει ότι οποιοδήποτε προφίλ είναι προτιμότερο από μια ισορροπία Nash και για τους δύο παίκτες, μπορεί να προκύψει ως στρατηγική ισορροπίας σε κάθε στάδιο του υπερπαιγνίου, αρκεί οι παίκτες να είναι αρκετά υπομονετικοί (το δ να είναι αρκετά υψηλό, ή αλλιώς να μην προεξοφλούν πολύ έντονα τις μελλοντικές αποδόσεις).

Ας προσπαθήσουμε να το καταλάβουμε λίγο καλύτερα αυτό. Σκεφτείτε το δίλημμα το κρατουμένου στον πίνακα 2.5. Το στατικό παίγνιο έχει μοναδική ισορροπία Nash (Α, Α). Ωστόσο, προφανώς, το προφίλ στρατηγικών (Σ, Σ) είναι προτιμότερο και για τους δύο παίκτες ή όπως θα συζητήσουμε αργότερα, στην γενική ισορροπία, είναι Pareto προτιμότερο. Το προτιμότερο προφίλ (Σ, Σ) μπορεί να προκύψει ως προφίλ ισορροπίας σε κάθε στάδιο στο υπερπαίγνιο. Ας δούμε πώς. Σκεφτείτε την στρατηγική s_i που για κάθε στάδιο του επαναλαμβανόμενου παιγνίου υπαγορεύει: «εάν είσαι στον αρχικό στάδιο ή εάν σε όλα τα στάδια ως τώρα έχει παιχτεί (Σ, Σ) , παίξε Σ. Εάν έστω και μία φορά κάποιος παρέκκλινε από το προφίλ (Σ, Σ) παίξε Α». Αυτή είναι μια στρατηγική γιατί για κάθε στάδιο του επαναλαμβανόμενου παιγνίου όποια κι αν είναι η ιστορία (σε όποιον κόμβο κι αν βρεθεί ένας παίκτης) περιγράφει μια κίνηση. Πάμε να δούμε εάν και υπό ποιες προϋποθέσεις το προφίλ που ορίζει αυτήν την στρατηγική για τους δύο παίκτες αποτελεί τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου.

Το προφίλ στο οποίο και οι δύο παίκτες παίζουν την παραπάνω στρατηγική, θα είναι τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου εάν σε κάθε στάδιο ένας παίκτης παρεκκλίνοντας μονομερώς δεν κερδίζει περισσότερα απ' ό,τι λαμβάνει μένοντας στο προφίλ (δεδομένου ότι ο άλλος παίζει το προφίλ). Οι αποδόσεις του να μείνει στο προφίλ ένας παίκτης δεδομένου ότι ο άλλος είναι στο προφίλ είναι $u(s_i, s_{-i}) = (-1) + \delta(-1) + \delta^2(-1) + \ldots = (-1)(1 + \delta + \delta^2 + \ldots) = -\frac{1}{1-\delta}$ αφού παίζοντας το προφίλ, ο κάθε παίκτης λαμβάνει από (-1) σε κάθε στάδιο. Παρεκκλίνοντας, ένας παίκτης λαμβάνει για μία περίοδο 0, ωστόσο για τις υπόλοιπες περιόδους θα παιχτεί η ισορροπία Nash του παιγνίου-σταδίου και θα λάβει (-6). Επομένως οι αποδόσεις του παίκτη που παρεκκλίνει θα είναι: $u(\text{παρέκκλιση}, s_{-i}) = 0 + \delta(-6) + \delta^2(-6) + \ldots = -6\delta(1 + \delta + \delta^2 + \ldots) = -\frac{6\delta}{1-\delta}$.

Για να προκύψει το προφίλ ως τέλεια ισορροπία, θα πρέπει οι αποδόσεις της παρέκκλισης να είναι μικρότερες από τις αποδόσεις του προφίλ και για τους δύο παίκτες:

$$u(s_i, s_{-i}) \geq u(\text{παρέκκλιση}, s_{-i}) \Leftrightarrow -\frac{1}{1-\delta} \geq -\frac{6\delta}{1-\delta} \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{6} \tag{2.3}$$

Η εξίσωση (2.3) μας λέει ότι εφόσον οι παίκτες είναι στοιχειωδώς υπομονετικοί και δεν προεξοφλούν συμαντικά τα μελλοντικά κέρδη, δηλαδή εάν για τους παίκτες 1 μονάδα απόδοσης του χρόνου είναι τουλάχιστον όσο καλή όσο $\frac{1}{6}$ της μονάδας απόδοσης σήμερα, τότε στο άπειρα επαναλαμβανόμενο παίγνιο, θα παίξουν συνεργασία αντί για απόσχιση που προέβλεπε το στατικό παίγνιο.

Η λύση του επαναλαμβανόμενου διλήμματος του κρατουμένου για υπομονετικούς παίκτες επιβεβαιώνει την διαίσθησή μας ότι η συνεργασία μπορεί να προκύψει και σε μη συνεργατικά παίγνια για υπομονετικούς παίκτες που αξιολογούν τα μελλοντικά οφέλη από την συνεργασία περισσότερο απ' ό,τι ένα βραχυπρόθεσμο κέρδος που θα προκύψει από εξαπάτηση του άλλου παίκτη. Το ίδιο αποτέλεσμα, μέσα από μια αρκετά διαφορετική προσέγγιση προκύπτει και από την ανάλυση της συνεργασίας ως μη συνεργατικό αποτέλεσμα του Axelrod 2006 που περιγράφεται παρακάτω.

Πριν όμως προχωρήσουμε στην ανάλυση του Axelrod 2006, μια τελευταία επισήμανση για τα υπερπαίγνια και τον άπειρο χρονικό ορίζοντα. Μπορεί η υπόθεση του άπειρου μελλοντικού χρονικού ορίζοντα να φαίνεται υπερβολική. Εξάλλου, ποιος συμπεριφέρεται σαν να έχει άπειρο μέλλον; Εάν θέλουμε να είμαστε ρεαλιστικοί θα πρέπει να υποθέσουμε για τους παίκτες πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα. Κι αν το κάνουμε λύνοντας με οπισθογενή επαγωγή θα καταλήξουμε αναγκαστικά στην απόσχιση γιατί καμία απειλή τιμωρίας δεν θα είναι πιστευτή στο τελικό στάδιο. Επομένως και στο προτελευταίο στάδιο, η απειλή ότι θα τιμωρηθώ αν δεν παίξω Σ δεν είναι πιστευτή: ξέρω ότι στο τελευταίο θα τιμωρηθώ ούτως ή άλλως γιατί κανένας παίκτης στο τελευταίο στάδιο δεν θα έπαιζε Σ που είναι κυριαρχούμενη στρατηγική. Προχωρώντας έτσι προς την αρχή η μόνη τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου είναι να παιχτεί παντού (Α, Α).

Ο άπειρος χρονικός ορίζοντας είναι απαραίτητη προϋπόθεση για να υπάρξει τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου στο επαναλαμβανόμενο παίγνιο, στην οποία όλοι συνεργάζονται. Ωστόσο είναι ρεαλιστική υπόθεση, ιδιαίτερα καθότι τα παίγνια παίζονται από θνητούς ανθρώπους που κάποια στιγμή αναγκαστικά θα πάψουν να παίζουν; Η πιο πειστική απάντηση που συχνά δίνεται από την θεωρία παιγνίων είναι ότι ο άπειρος ορίζοντας είναι λιγότερο προβληματικός απ' ό,τι μπορεί να δείχνει σε πρώτη ματιά.

Καταρχάς, πολλές φορές μια συνεργασία συνεχίζεται και μετά το φυσικό τέλος ενός παίκτη. Παραδείγματος χάριν, μια επιχείρηση μπορεί να συνεχίζει την συνεργασία με μια άλλη επιχείρηση θεωρητικά για πάντα, ακόμη και μετά το φυσικό τέλος των ιδιοκτητών της. Αλλά ίσως πιο ουσιαστικά, αυτό που απαιτούμε από τους παίκτες δεν είναι να έχουν άπειρο ορίζοντα, αλλά να μην μπορούν να δουν το ορατό τέλος. Σκεφτείτε πώς παίρνουμε αποφάσεις όταν δεν ξέρουμε πόσο χρόνο έχουμε μπροστά μας: είναι σχεδόν αδύνατον να σκεφτούμε τον τελικό κόμβο όταν δεν ξέρουμε πότε θα φτάσουμε σε αυτόν. Πώς ακριβώς λοιπόν θα ορίσουμε την οπισθογενή επαγωγή όταν δεν έχουμε τελικό κόμβο στο ορατό μέλλον. Σε περιπτώσεις με αρκετά μεγάλο χρονικό ορίζοντα, όταν οι παίκτες δεν βλέπουν το τέλος του παιχνιδιού στο ορατό μέλλον, μπορούμε χωρίς να καταφεύγουμε σε μη ρεαλιστικές υποθέσεις να υποθέσουμε ότι οι παίκτες συμπεριφέρονται σαν να έχουν άπειρο χρονικό ορίζοντα.

2.4.2 Εξελικτικές στρατηγικές και η εξέλιξη της συνεργασίας

Το 1984, ένας πολιτικός επιστήμονας, ο Robert Axelrod εξέδωσε ένα βιβλίο για την προέλευση της συνεργασίας μέσα από παιγνιοθεωρητική σκοπιά. Το έργο του (Axelrod 2006) ήρθε να προεκτείνει την έρευνα που είχαν δημοσιεύσει νωρίτερα στο περιοδικό Science οι Axelrod και Hamilton 1981 σχετικά με την συνεργασία που προκύπτει σε ένα επαναλαμβανόμενο δίλημμα του κρατουμένου. Το βιβλίο του Axelrod είχε τεράστιο αντίκτυπο σε μεγάλο εύρος επιστημών, με ίσως κορυφαία επιτυχία στις θετικές επιστήμες και κυρίως στην βιολογία.

Ποια είναι η καινοτομία του Axelrod 2006; Η καινοτομία του συνίσταται στο ότι προσεγγίζει το δίλημμα του κρατουμένου από την σκοπιά της *εξελικτικής θεωρίας παιγνίων*.

Η εξελικτική θεωρία παιγνίων (evolutionary game theory), όπως αναπτύχθηκε από τον Smith 1982, προσεγγίζει κάπως διαφορετικά την θεωρία παιγνίων και τις στρατηγικές. Αντί για «συνειδητές» στρατηγικές που οι παίκτες επιλέγουν ορθολογικά, στην εξελικτική θεωρία παιγνίων, υποθέτουμε ότι ένας πληθυσμός ζώων ή οργανισμών, είναι γενετικά προγραμματισμένος να «παίζει» μια συγκεκριμένη στρατηγική. Παραδείγματος χάριν, κάποια αρσενικά είναι γενετικά προγραμματισμένα να είναι επιθετικά στην περιοχή τους ή στην προστασία του θηλυκού απέναντι σε υποψήφιους μνηστήρες, ενώ άλλα μπορεί να είναι προγραμματισμένα να παίζουν μια «υποτελή» στρατηγική. Και φυσικά υπάρχουν και μεικτές στρατηγικές.

Επομένως στην εξελικτική θεωρία παιγνίων θεωρούμε ότι τα ζώα ή οι οργανισμοί είναι προγραμματισμένοι να παίζουν με μια συγκεκριμένη στρατηγική. Μια τέτοια στρατηγική x είναι *εξελικτικά σταθερή* (ESS - evolutionarily stable strategy), εάν δεν μπορεί να «προσβληθεί» από καμία άλλη στρατηγική y που παίζει ένας μικρός μεταλλαγμένος πληθυσμός. Για να το καταλάβουμε καλύτερα: ας πούμε ότι έχουμε έναν πληθυσμό που παίζει ομοιόμορφα την στρατηγική x. Η x είναι ESS εάν όταν εμφανίζεται μια σπάνια μετάλλαξη στον πληθυσμό που παίζει την y, η x έχει μεγαλύτερες αποδόσεις από την y. Και επομένως η y θα εξαφανιστεί.

Σκεφτείτε δηλαδή ότι ένα είδος είναι γενετικά προγραμματισμένο να παίζει x, π.χ. σε ένα παίγνιο ανταγωνισμού, τύπου hawk and dove (chicken), να επιτίθεται όταν ο άλλος αποφεύγει και να αποφεύγει όταν ο άλλος επιτίθεται. Και σκεφτείτε ότι μια τυχαία γενετική μετάλλαξη κάνει ένα μικρό μέρος του πληθυσμού να συμπεριφέρεται διαφορετικά, π.χ. να επιτίθεται στην επίθεση. Εάν η αρχική στρατηγική αποφέρει μεγαλύτερες αποδόσεις από την συγκρουσιακή νέα στρατηγική, τότε η x είναι ESS. Ο αρχικός πληθυσμός που παίζει την εγκαθιδρυμένη στρατηγική έχει υψηλότερες αποδόσεις (π.χ. τροφή), κάνει περισσότερους απογόνους και επομένως έχει εξελικτικό πλεονέκτημα. Σύντομα η στρατηγική που δεν αποδίδει θα εξαφανιστεί από τον πληθυσμό.

Έχοντας κάνει αυτήν την παρένθεση για να εξηγήσουμε τί είναι εξελικτική στρατηγική στην θεωρία παιγνίων, μπορούμε να επιστρέψουμε στην συνεισφορά του Axelrod 2006. Ο Axelrod 2006 διοργάνωσε τουρνουά σε μια παραλλαγή του διλήμματος του κρατουμένου που παρουσιάζεται στον πίνακα 2.6. Μπορούμε να δούμε ότι ξεκάθαρα η απόσκίρτηση είναι κυρίαρχη στρατηγική καθώς και ότι αν οι δύο παίκτες έπαιζαν το προφίλ (Σ, Σ), θα ήταν οφελημένοι ιδιαίτερα εάν το παίγνιο επαναλαμβάνεται.

	Σ	Α
Σ	3,3	0,5
Α	5,0	1,1

Πίνακας 2.6: Δίλημμα του κρατουμένου στον Axelrod 2006.

Ο Axelrod λοιπόν διοργάνωσε ένα τουρνουά με ηλεκτρονικούς υπολογιστές, στο οποίο το παραπάνω παίγνιο θα παιζόταν επαναλαμβανόμενα και απέτεινε ανοιχτή πρόσκληση προς παγνιοθεωρητικούς αλλά και αργότερα (στην δεύτερη παραλλαγή του παγνίου) προς όποιον ήθελε να καταθέσει την στρατηγική του. Στρατηγική θα ήταν οποιοσδήποτε κώδικας θα υπαγόρευε στον υπολογιστή πώς να παίξει το παίγνιο σε κάθε γύρο ανάλογα με την ιστορία του παιγνίου ως τον γύρο αυτό. Οι παίκτες θα είχαν τέλεια μνήμ η, δηλαδή θα θυμούνταν αν έχουν ξαναπαίξει με τον συγκεκριμένο παίκτη. Στο παίγνιο υπάρχουν άπειρες στρατηγικές και στο κάλεσμα ανταποκρίθηκαν πολλοί επιστήμονες από διάφορους κλάδους αλλά και συμμετέχοντες από το ευρύτερο κοινό. Κατατέθηκαν 63 στρατηγικές. Και το παίγνιο παίχτηκε πολλές φορές με μικρή πιθανότητα διακοπής σε κάθε γύρο.

Για να προσώσει εξελικτική χροιά στο παίγνιο ο Axelrod έκανε το εξής: έφτιαξε πληθυσμούς με παίκτες. Στον πρώτο γύρο, όλες οι στρατηγικές άρχιζαν με τον ίδιο αριθμό ατόμων. Και τυχαία κάθε άτομο αντιστοιχίστηκε με ένα άλλο άτομο του πληθυσμού. Στον δεύτερο γύρο, ο πληθυσμός μοιράστηκε στις στρατηγικές ανάλογα με το πόσο καλά πήγε η κάθε στρατηγική στον πρώτο γύρο. Αν παραδείγματος χάριν μία στρατηγική συγκέντρωσε 30 βαθμούς στον πρώτο γύρο, ενώ μια άλλη 10, η πρώτη στρατηγική θα είχε τριπλάσιο αριθμό απογόνων στον 2ο γύρο. Στον 2ο γύρο, κάθε άτομο (που ήταν προγραμματισμένο να παίζει μία και μόνο μία στρατηγική), αντιστοιχίστηκε τυχαία με ένα άλλο άτομο από τον πληθυσμό κ.ο.κ.

Μπορούμε να καταλάβουμε γιατί ο Axelrod μίλησε για εξέλιξη και συνεργασία. Οι στρατηγικές που στην πράξη πετυχαίνουν υψηλότερες αποδόσεις, είναι εξελικτικά ανώτερες: κάνουν περισσότερους απογόνους και εκπροσωπούνται με μεγαλύτερο βάρος στον πληθυσμό. Οι στρατηγικές που δεν είναι πετυχημένες, έχουν λιγότερους απογόνους και αν συνεχίσουν να μην είναι πετυχημένες συγκριτικά, τότε με την πάροδο των γύρων, σιγά σιγά θα τείνουν προς εξαφάνιση. Παραμένουν λοιπόν μόνον οι πιο πετυχημένες εξελικτικά στρατηγικές. Ο Axelrod δείχνει τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά μέσα από τα τουρνουά του ότι υπάρχουν εξελικτικά σταθερές στρατηγικές που περιλαμβάνουν συνεργασία.

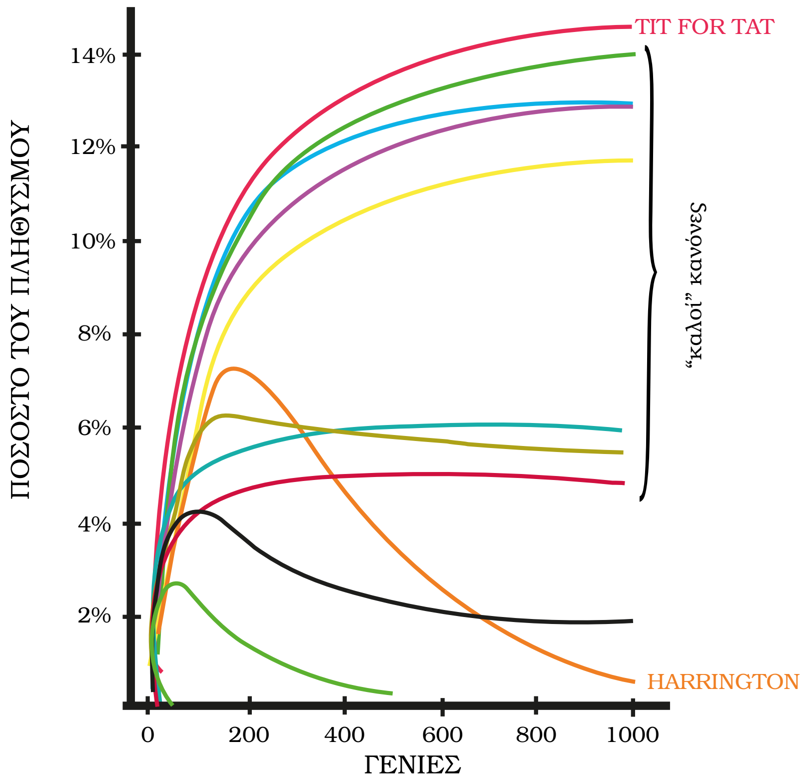
Πριν συζητήσουμε ποια στρατηγική κέρδισε πανηγυρικά το τουρνουά, ας συζητήσουμε κάποιες ενδιαφέρουσες στρατηγικές. Μια χαρακτηριστική στρατηγική ήταν η τυχαία RANDOM η οποία έπαιζε τελείως στην τύχη. Υπήρχε η DEFECT, η οποία αποσκιρτούσε σε κάθε γύρο, ή η FRIEDMAN η οποία ποτέ δεν επιτίθετο πρώτη, αλλά αν κάποιος αποσκιρτούσε, η FRIEDMAN τον τιμωρούσε αποσκιρτώντας για πάντα σε κάθε επόμενο γύρο που τον συναντούσε. Υπήρχε η DOWNING που προσπαθούσε τους πρώτους γύρους να καταλάβει τί τύπος ήταν ο αντίπαλος και ανάλογα να αποσκιρτήσει αν την «έπαιρνε» ή να συνεργαστεί με τύπους που τιμωρούσαν, οι TESTER και TRANQUILIZER που «κοίμιζαν» τον αντίπαλο παίζοντας συνεργασία και προσπαθούσαν που και που να ξεκλέψουν τα κέρδη μιας αποσκίρτησης και πολλές άλλες.

Η στρατηγική που κέρδισε χωρίς ουσιαστικό ανταγωνισμό σχεδόν όλα τα τουρνουά ήταν η στρατηγική TIT FOR TAT που κατατέθηκε από τον καθηγητή ψυχολογίας Anatol Rapoport από το πανεπιστήμιο του Τορόντο. Η TIT FOR TAT είναι μια πολύ απλή και ξεκάθαρη στρατηγική: την πρώτη φορά που συναντάς κάποιο άτομο, άρχισε παίζοντας Σ. Σε κάθε επόμενο γύρο που τον ξανασυναντάς, παίξε ό,τι έπαιξε αυτός στην προηγούμενη συνάντησή σας. Η στρατηγική TIT FOR TAT έχει συζητηθεί εκτενώς και η επιτυχία της αναλύεται με μεγάλη σαφήνεια από τον Axelrod 2006. Η πορεία των βασικών στρατηγικών στον χρόνο φαίνεται στο σχήμα 2.13.

Βλέπουμε ότι το TIT FOR TAT είχε την μεγαλύτερη εξελικτική επιτυχία αφού είχε το υψηλότερο ποσοστό εκπροσώπησης στον πληθυσμό (άνω του 14%). Μια σημαντική επισήμανση ήταν ότι όλες ανεξαιρέτως οι καλύτερες 8 στρατηγικές ήταν «καλές», δηλαδή δεν επιτίθεντο ποτέ πρώτες. Μια πολύ ενδιαφέρουσα στρατηγική για να καταλάβουμε την εξελικτική δυναμική των στρατηγικών στον πληθυσμό και το πώς επέρχεται ένας οικολογικός αφανισμός είναι η στρατηγική HARRINGTON, την μόνη μη καλή στρατηγική ανάμεσα στις 15 πρώτες. Η HARRINGTON ήταν μια στρατηγική που προσπαθούσε να εκμεταλλευτεί την αδυναμία του αντιπάλου. Για περίπου 200 γενιές (γύρους) κι ενώ τόσο το TIT FOR TAT όσο και οι άλλες πετυχημένες καλές στρατηγικές αύξαναν τα ποσοστά εκπροσώπησής τους στον γενικό πληθυσμό, η HARRINGTON πήγαινε επίσης καλά. Αυτό γιατί στην αρχή του τουρνουά η HARRINGTON μπορούσε ακόμα να βρει «αφελείς» στρατηγικές τις οποίες εξαπατούσε και κέρδιζε αποδόσεις 5. Καθώς όμως οι γύροι προχωρούσαν οι αφελείς στρατηγικές δεν τα πήγαιναν καλά και άρχισαν να εξαφανίζονται από τον πληθυσμό. Εκεί λοιπόν και η HARRINGTON έπαψε να βρίσκει θύματα και η εκπροσώπησή της στον γενικό πληθυσμό βυθίστηκε. Απέναντι σε τιμωρητικές στρατηγικές η εκμεταλλευτική HARRINGTON τα πήγε άσχημα και μη έχοντας πια θύματα να απομυζήσει, έτεινε προς εξαφάνιση.

Ποια χαρακτηριστικά καθιστούν το TIT FOR TAT τόσο πετυχημένη στρατηγική; Ο Axelrod 2006 ξεχωρίζει μερικά βασικά χαρακτηριστικά του που βοηθούν στην εξελικτική του επιτυχία:

1. Η «καλοσύνη» του. Όντας καλή στρατηγική (δηλαδή μη επιτιθέμενο ποτέ πρώτο) TIT FOR TAT απέφευγε περιττές συγκρούσεις με άλλες τιμωρητικές στρατηγικές.
2. Η καθαρότητά του. Το TIT FOR TAT είναι τελείως ξεκάθαρο σαν στρατηγική. Στρατηγικές που προσπαθούσαν να δοκιμάσουν τους αντιπάλους τους, διάβαζαν εύκολα και σωστά το TIT FOR TAT και απέφευγαν περαιτέρω άχρηστες συγκρούσεις μαζί του.
3. Είναι συγχωρητικό. Ενώ δεν αφήνει κανέναν να το εκμεταλλευτεί περισσότερο από μία φορά, το TIT FOR TAT μπορεί και συγχωρεί τυχαία λάθη. Έτσι παραδείγματος



Σχήμα 2.13: Πορεία στρατηγικών μετά από 1000 γύρους στο τουρνουά του Axelrod 2006

χάριν μπορούσε να συνεργαστεί στο μέλλον ακόμα και με στρατηγικές που κατά λάθος ή κατά τύχη αποσκιρτούσαν. Αντίθετα το απόλυτα τιμωρητικό FRIEDMAN έχανε την δυνατότητα τέτοιας αμοιβαίας επωφελούς μελλοντικής συνεργασίας.

Ποια είναι η σημασία των τουρνουά του Axelrod; Ο Axelrod με αυτό το πολύ απλό στήσιμο μπόρεσε να μας δώσει καλή εικόνα του πώς μπορεί να προκύψει εξελικτικά σε κοινωνίες πνεύμα συνεργασίας ακόμα και σε μη συνεργατικό περιβάλλον όπως η μη συνεργατική θεωρία παιγνίων. Μας δίνει μια βαθιά διαίσθηση για το τί χαρακτηριστικά θα περιμέναμε να έχει ένας πληθυσμός στον οποίο αναπτύσσεται το ένστικτο της συνεργασίας. Μπορούμε πιθανώς να ερμηνεύσουμε τους ψυχολογικούς μηχανισμούς που μας οδηγούν σε συνεργασίας, τιμωρία ή και συγχώρεση υπό εξελικτικό πρίσμα. Γιατί αισθανόμαστε θυμό ή αγανάκτηση με ανθρώπους που αθετούν τις υποσχέσεις τους, ή συμπόνοια και συγχώρεση για όσους κατανοούν το λάθος τους; Μήπως αυτοί είναι ψυχολογικοί μηχανισμοί των οποίων η ανάπτυξη ευνοήθηκε ακριβώς γιατί βοήθησαν την συνεργασία και τις αυξημένες αποδόσεις για τους πληθυσμούς που μπόρεσαν να την διατηρήσουν ακόμα κι αν είχαν κίνητρο αποσκίρτησης;

2.5 Ερωτήσεις επανάληψης – Ασκήσεις

2.1. Ποιοι παράγοντες βοηθούν στην ανάπτυξη συνεργασίας σε καταστάσεις στρατηγικής αλληλεπίδρασης στις οποίες οι συμμετέχοντες έχουν κίνητρο να παρεκκλίνουν από την συνεργασία;

2.2. «Η οπισθογενής επαγωγή προϋποθέτει μια μη ρεαλιστική ικανότητα των παιχτών όχι μόνο να βλέπουν πολύ μακρυά στο μέλλον αλλά και να έχουν αναλυτική δυνατότητα να κάνουν πολύπλοκους υπολογισμούς που οι περισσότεροι άνθρωποι δεν έχουν. Γιαυτό και ως εργαλείο ανάλυσης της πραγματικότητας είναι ουσιαστικά άχρηστη». Συζητήστε.

2.3. «Το παίγνιο του τελεσιγράφου αποτυγχάνει να προβλέψει ικανοποιητικά τόσο την στρατηγική ισορροπίας του παίκτη 1 όσο και την στρατηγική ισορροπίας του παίκτη 2». Συζητήστε.

2.4. «Η έλλειψη ορθολογικότητας των παικτών που συχνά χρησιμοποιείται ως κριτική κατά της χρησιμότητας της θεωρίας παιγνίων στην ανάλυση πραγματικών καταστάσεων βασίζεται στο ότι για μικρά ποσά οι παίκτεις έχουν την πολυτέλεια να επιλέγουν με κριτήριο συναισθηματικά ή ηθικά κίνητρα. Καθώς όμως οι αποδόσεις αυξάνουν θα περιμένουν οι προβλέψεις της θεωρίας παιγνίων να ακολουθούνται πιο πιστά». Συζητήστε.

2.5. Τί είναι εξελικτικά σταθερή στρατηγική και πώς μπορεί να μας βοηθήσει να δώσουμε μια πιο αποδεκτή διαισθητικά λύση στο δίλημμα του κρατουμένου;

2.6. Πώς μας βοηθά η εξελικτική θεωρία παιγνίων να καταλάβουμε τις συνθήκες μέσα από τις οποίες μπορεί να προκύψει συνεργασία μέσα σε μη συνεργατικό πλαίσιο ανάλυσης;

2.7. Έστω το παίγνιο (που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο) σε στρατηγική μορφή:

	b_1	b_2	b_3
a_1	10, 10	2, 12	0, 13
a_2	12, 2	5, 5	0, 0
a_3	13, 0	0, 0	1, 1

(α΄) Θεωρήστε ότι το παίγνιο επαναλαμβάνεται με άπειρο ορίζοντα με κοινό συντελεστή προεξόφλησης δ για τους δύο παίκτες. Βρείτε όσες τέλειες ισορροπίες υποπαιγνίου για το άπειρα επαναλαμβανόμενο παίγνιο μπορείτε.

(β΄) Βρείτε τον ελάχιστο συντελεστή προεξόφλησης για τον οποίον οι παίκτες θα μπορούν να συντηρήσουν το προφίλ $a_1 b_1$ ως τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου σε κάθε στάδιο για το άπειρα επαναλαμβανόμενο παίγνιο.

(γ΄) Μπορεί το προφίλ $a_1 b_2$ να προκύψει ως τέλεια ισορροπία υποπαιγνίου σε κάθε στάδιο του άπειρα επαναλαμβανόμενου παιγνίου; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

2.8. Έστω η παραλλαγή του παιγνίου hawk and dove που παρουσιάζεται σε στρατηγική μορφή στον παρακάτω πίνακα: Μπορεί η στρατηγική (D, D) να προκύψει ως τέλεια

	D	H
D	4,4	1,6
H	6,1	-3,-3

ισορροπία υποπαιγνίου του απείρως επαναλαμβανόμενου υποπαιγνίου και με τί συντελεστή προεξόφλησης;