Μοντέλα Βελτιστοποίησης σε Αγορές Ηλεκτρικής Ενέργειας

ΑΝΤΩΝΗΣ ΠΑΠΑΒΑΣΙΛΕΙΟΥ

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Οι αναγνώστες στους οποίους απευθύνονται οι παρούσες σημειώσεις είναι φοιτητές και ερευνητές με ένα υπόβαθρο στην επιχειρησιακή έρευνα οι οποίοι ενδιαφέρονται να μάθουν περισσότερα ή να διεξάγουν έρευνα στο χώρο των αγορών ηλεκτρικής ενέργειας. Οι αναγνώστες ωφελούνται από ένα υπόβαθρο σε επιχειρησιακή έρευνα. Το υπόβαθρο στα οικονομικά ή στα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας δεν είναι απαραίτητα. Η εκμάθηση του υλικού στηρίζεται στην επίλυση προβλημάτων σε υπολογιστή χρησιμοποιώντας μια γλώσσα μαθηματικού προγραμματισμού (όπως η AMPL ή η GAMS). Μια βασική έκθεση με γλώσσες μαθηματικού προγραμματισμού είναι συνεπώς απαραίτητη.

Οι σημειώσεις έχουν αναπτυχθεί με σκοπό να εξυπηρετήσουν τις ανάγκες δύο κατηγοριών αναγνωστών: (i) αναγνώστες με υπόβαθρο σε συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας που ενδιαφέρονται να εμβαθύνουν στο αντικείμενο των αγορών ηλεκτρικής ενέργειας, και επιθυμούν μια εισαγωγή στα εργαλεία του μαθηματικού προγραμματισμού που είναι απαραίτητα, και (ii) αναγνώστες με υπόβαθρο στην επιχειρησιακή έρευνα οι οποίοι δεν έχουν προγενέστερη γνώση των συστημάτων και αγορών ηλεκτρικής ενέργειας.

Το κεφάλαιο 1 παρέχει μια εισαγωγική συζήτηση σχετικά με την οικονομική ερμηνεία των μοντέλων μαθηματικού προγραμματισμού για τις αγορές ηλεκτρικής ενέργειας, με βάση συζήτησης το πρόβλημα βέλτιστης επέκτασης ισχύος (capacity expansion[1]) μονάδων παραγωγής. Εδραιώνεται ένας σύνδεσμος μεταξύ του προβλήματος βέλτιστης επέκτασης ισχύος και του προβλήματος ανεπαρκών κερδών (missing money), προκειμένου να διαφανεί η συνάφεια μεταξύ μοντελοποίησης και ανάλυσης ενεργειακής πολιτικής.

Το κεφάλαιο 2 καλύπτει εισαγωγικές έννοιες του γραμμικού προγραμματισμού και της δυϊκότητας. Το υλικό που σχετίζεται με το γραμμικό προγραμματισμό καλύπτεται συνοπτικά, ενώ το υλικό που σχετίζεται με τη δυϊκότητα αναπτύσσεται αυθυπόστατα. Οι συνθήκες KKT, που χρησιμοποιούνται εκτενώς στις σημειώσεις, προκύπτουν ως συνέπεια της θεωρίας δυϊκότητας.

Το κεφάλαιο 3 παρέχει μια σύνοψη της λειτουργίας συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας και των αγορών ηλεκτρικής ενέργειας. Ένα ελάχιστο υπόβαθρο δίνεται όσον αφορά τη λειτουργία συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας, που καλύπτει όλη την εφοδιαστική αλυσίδα από την παραγωγή, μεταφορά και διανομή, μέχρι την κατανάλωση ηλεκτρισμού. Ο χρονισμός της λήψης αποφάσεων στη λειτουργία συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας κατηγοριοποιείται μεταξύ βραχυπρόθεσμης, μεσοπρόθεσμης και μακροπρόθεσμης λειτουργίας. Η κατηγοριοποίηση καθοδηγεί την οργάνωση του υλικού στα μετέπειτα κεφάλαια. Εισάγονται οι αγορές ηλεκτρικής ενέργειας, οι οποίες συνδέονται στενά με τη λειτουργία των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας. Σημαντικά διλήμματα σχεδιασμού αγορών εισάγονται, και συμπεριλαμβάνουν το δίλημμα μεταξύ δημοπρασιών με απλές (exchanges) και σύνθετες προσφορές (pools), καθώς και το σχεδιασμό δημοπρασιών. Σκιαγραφείται το σχεδιάγραμμα μιας τυπικής αγοράς ηλεκτρισμού, το οποίο αναλύεται λεπτομερέστερα στα μετέπειτα κεφάλαια.

Τα επόμενα 4 κεφάλαια καλύπτουν τη λειτουργία των βραχυπρόθεσμων αγορών ηλεκτρισμού, από τη λειτουργία πραγματικού χρόνου μέχρι τη λειτουργία μερικά λεπτά πριν τον πραγματικό χρόνο. Το κεφάλαιο 4 εισάγει το απλούστερο δυνατό μοντέλο αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας, όπου εμπορεύεται μόνο ενέργεια. Αφού οριστεί η ανταγωνιστική ισορροπία αγοράς, η ερμηνεία του

[1] Για ένα λεξικό τεχνικής ορολογίας από την Αγγλική στην Ελληνική, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο παράρτημα Α.

μοντέλου οικονομικής κατανομής ως ανταγωνιστική ισορροπία αγοράς αναπτύσσεται λεπτομερώς. Αυτή η ερμηνεία γενικεύεται στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου, όπου εδραιώνεται η ισοδυναμία μεταξύ ανταγωνιστικής ισορροπίας αγοράς και βελτιστοποίησης. Το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιείται επανειλημμένα στις σημειώσεις για να αναπτυχθούν οικονομικές ερμηνείες μοντέλων αυξανόμενης πολυπλοκότητας.

Το κεφάλαιο 5 προσθέτει ένα επίπεδο λεπτομέρειας στο μοντέλο οικονομικής κατανομής, εισάγοντας το δίκτυο μεταφοράς, το οποίο οδηγεί στο μοντέλο βέλτιστης ροής ισχύος. Το κεφάλαιο παρουσιάζει εναλλακτικά ισοδύναμα γραμμικοποιημένα μοντέλα των εξισώσεων που περιγράφουν τος φυσικούς νόμους οι οποίοι κυβερνούν τη ροή ισχύος στο δίκτυο. Συζητάται η οικονομική ερμηνεία του προβλήματος βέλτιστης ροής ισχύος, και συνδέεται με το λεγόμενο σχεδιασμό κομβικής οριακής τιμολόγησης (locational marginal pricing), ο οποίος σχεδιασμός συγκρίνεται με το ζωνικό σχεδιασμό.

Το κεφάλαιο 6 εισάγει περαιτέρω λεπτομέρεια στο μοντέλο οικονομικής κατανομής εισάγοντας εφεδρείες, οι οποίες χρησιμοποιούνται για να λειτουργήσει το σύστημα με ασφάλεια σε συνθήκες αβεβαιότητας. Η ταυτόχρονη και ετεροχρονισμένη αγορά εφεδρειών συζητάται και οι δύο σχεδιασμοί συγκρίνονται, και συζητάται η ενεργοποίηση εφεδρειών στις αγορές εξισορρόπησης.

Το κεφάλαιο 7 ολοκληρώνει τη μοντελοποίηση της βραχυπρόθεσμης λειτουργίας εισάγοντας τη δέσμευση μονάδων (unit commitment), που είναι ο ημερήσιος και διημερήσιος προγραμματισμός μονάδων παραγωγής. Η δυαδική φύση (εντός ή εκτός λειτουργίας) αυτού του προγραμματισμού δημιουργεί δυσκολίες στην οικονομική ερμηνεία του μοντέλου, καθώς και στο σχεδιασμό μηχανισμών οι οποίοι να ανακτούν τα πάγια κόστη λειτουργίας των μονάδων παραγωγής. Με την ευκαιρία του προβλήματος δέσμευσης μονάδων, αναλύεται το δίλημμα μεταξύ δημοπρασιών με απλές και σύνθετες προσφορές.

Το κεφάλαιο 8 εστιάζει σε μεσοπρόθεσμες (μήνες έως έτη πριν τον πραγματικό χρόνο) focuses on medium-term (month-ahead and year-ahead) πτυχές των αγορών ηλεκτρικής ενέργειας, συγκεκριμένα τη διαχείριση ρίσκου. Διάφορα χρηματοοικονομικά παράγωγα που χρησιμποιούνται ευρέως στις αγορές ηλεκτρικής ενέργειας ορίζονται, συμπεριλαμβανομένων των προθεσμιακών συμβολαίων (forward contracts), των συμβολαίων μελλοντικής εξλπήρωσης (futures contracts), των χρηματοοικονομιών δικαιωμάτων μεταφοράς (financial transmission rights), των επιλογών αγοράς (call options), και συνδυασμών αυτών. Η χρήση αυτών των παραγώγων για τη διαχείρηση ρίσκου στην παραγωγή, μεταφορά, και κατανάλωση ηλεκτρισμού επεξηγείται με τη χρήση παραδειγμάτων.

Τα τελευταία δύο κεφάλαια εστιάζουν σε μακροπρόθεσμα (έτη πριν τον πραγματικό χρόνο) προβλήματα αποφάσεων. Το κεφάλαιο 9 εστιάζει σε μηχανισμούς που μπορούν να ενεργοποιήσουν την απόκριση ζήτησης. Αυτό κατηγοριοποιείται ως μαρκτοπρόθεσμο πρόβλημα αποφάσεων διότι, σε αντίθεση με εξειδεικευμένες εταιρείες παραγωγής και παροχής ηλεκτρισμού, οι καταναλωτές είθισται να μην είναι διατεθιμένοι ή σε θέση να αγοράζουν ηλεκτρισμοό σε βραχυπρόθεσμες χρονικές κλίμακες (σε πραγματικό χρόνο ή ημερήσια βάση), και προτιμούν να κατοχυρώνουν μακροπρόθεσμα (πολυετή) συμβόλαια. Δύο συγκεκριμένες προσεγγίσεις εξετάζονται, το νυχτερινό τιμολόγιο (time of use pricing), και η τιμολόγηση εξυπηρέτησης κατά προτεραιότητα (priority service).

Το κεφάλαιο 10 εστιάζει στο μοντέλο βέλτιστης επέκτασης χωρητικόττητας και στην ερμηνεία του πώς οι αγορές ηλεκτρικής ενέργειας υποστηρίζουν την αποζημίωση του κόστους επένδυσης σε μονάδες παραγωγής. Το κεφάλαιο κατόπιν πραγματεύεται διάφορους εναλλακτικούς σχεδιασμούς που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάκτηση του κόστους επένδυσης, συμπεριλαμβανομένων των μηχανισμών αποζημίωσης χωρητικότητας (capacity remuneration mechanisms) και παραλλαγές των αγορών επικουρικών υπηρεσιών.

Κάποια βασική γνώση καλύπτεται στα παραρτήματα. Το κεφάλαιο Α του παραρτήματος καλύπτει βασικές γνώσεις γραμμικού προγραμματισμού, και το κεφάλαιο Β εισάγει τη ροή φορτίου συνεχούς ρεύματος (direct current power flow). Το κεφάλαιο Γ παρέχει ένα λεξικό για τη μετάφραση αγγλικής σε ελληνική ορογλογία.

1. Εισαγωγή

Η μελέτη των αγορών ηλεκτρικής ενέργειας μέσω ποσοτικών μοντέλων αποτελεί μια πρόκληση λόγω της διεπιστημονικής εξειδίκευσης που απαιτείται. Ένα υπόβαθρο στα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας, στα οικονομικά, και στην επιχειρησιακή έρευνα είναι χρήσιμο, αν όχι απαραίτητο, για να αναπτύξει κανείς χρήσιμα ποσοτικά μοντέλα. Για ανθρώπους που εξέρχονται από ένα προπτυχιακό ή μεταπτυχιακό πρόγραμμα και ξεκινούν μια καριέρα στις αγορές ηλεκτρικής ενέργειας, η απαίτηση αυτή μπορεί να φαίνεται απαγορευτική.

Στη διάρκεια των διδακτορικών μου σπουδών, θυμάμαι να συλλέγω πληροφορίες από επιστημονικά περιοδικά και εγχειρίδια διδασκαλίας που, όταν διαβάζονταν απομονωμένα, δεν είχαν απαραίτητα ένα ξεκάθαρο μήνυμα, αλλά ήταν πολύ πιο ενδιαφέρουσες όταν (i) συλλέγονταν και συγκρίνονταν, και (ii) όταν συσχετίζονταν με τους θεσμικούς και φυσικούς περιορισμούς που κυβερνούν τη λειτουργία των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας και των αγορών ηλεκτρισμού. Οι σημειώσεις αυτές είναι μια απόπειρα να συλλέξω όλην αυτήν την πληροφορία στην οποία θα ευχόμουν να είχα πρόσβαση πριν ξεκινήσω τις εξειδικευμένες μου σπουδές στις αγορές ηλεκτρικής ενέργειας, όχι τόσο ως μεμονωμένες πληροφορίες, αλλά ως μια σύνθεση πληροφοριών Ο πρωταρχικός στόχος αυτών των σημειώσεων είναι να σκιαγραφήσουν τη μεγαλύτερη εικόνα για έναν αναγνώστη που δεν είναι απαραίτητα ειδικός στα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας, στα οικονομικά, ή στην επιχειρησιακή έρευνα, και να παράσχουν μια κατανόηση η οποία είναι επαρκής για την εκκίνηση μια καριέρας στην ποσοτική ανάλυση αγορών ηλεκτρικής ενέργειας.

Το παρόν κεφάλαιο εισάγει τον αναγνώστη στη μελέτη των αγορών ηλεκτρικής ενέργειας μέσω μοντέλων βελτιστοποίησης. Η ενότητα 1.1 παρακινεί τη μελέτη των αγορών ηλεκτρικής ενέργειας μέσα από το πρίσμα της βελτιστοποίησης. Η ενότητα 1.2. παρέχει ένα απτό παράδειγμα συζητώντας το πρόβλημα του ανεπαρκούς κέρδους. Το παράδειγμα αποσκοπεί στο να τονίσει ότι ακόμη και σχετικά απλά μοντέλα μπορούν να δημιουργήσουν σύγχυση αν δεν υιοθετηθεί μια ολιστική οπτική στη μοντελοποίηση των αγορών ηλεκτρισμού.

1.1 Η βελτιστοποίηση συναντά την ενέργεια

Η ενεργειακή βιομηχανία έχει αποτελέσει πρωταρχικό πεδίο εφαρμογών για την επιχειρησιακή έρευνα, από γεννήσεως του τομέα της επιχειρησιακής έρευνας. Πολλαπλές εφαρμογές στις αγορές ηλεκτρικής ενέργειας απαιτούν ανεπτυγμένα μοντέλα λήψης αποφάσεων και οικονομικής μοντελοποίησης, λόγω της μεγάλης κλίμακας και των σύνθετων λειτουργιών των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας. Τέτοιες εφαρμογές περιλαμβάνουν (i) επιχειρησιακές αποφάσεις όπως ο βέλτιστος προγραμματισμός μονάδων παραγωγής, η διαχείριση πόρων, και η ένταξη ανανεώσιμων πηγών ενέργειας στα συστήματα ηλεκτρισμού, (ii) στρατηγικές αποφάσεις όπως η διαχείριση ρίσκου και η βέλτιστη διστασιολόγηση και επέκταση του συστήματος, και (iii) ανάλυση ενεργειακής πολιτικής όπως η ανάλυση τιμολόγησης και κατανομής κοινωνικού ωφέλους, ή η ανάλυση ενεργειακών πολιτικών, ανάμεσα σε πληθώρα εφαρμογών. Η ικανότητα της βιομηχανίας ενέργειας να υιοθετεί εξελιγμένους αλγορίθμους βελτιστοποίησης, όπως ο αλγόριθμος διακλάδωσης και φραγής, η χλάρωση κατά Lagrange, και ο δυναμικός προγραμματισμός, αποτελεί απόδειξη ότι ο ενεργειακός τομέας διψά για μοντέλα που είναι όχι μόνο ικανά να απεικονίζουν τη σύνθετη λειτουργία των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας αλλά μπορούν επίσης να εφαρμόζονται σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας παραμένοντας υπολογιστικά προσεγγίσιμα.

Η επιχειρησιακή έρευνα προορίζεται να παραμένει διηνεκώς συναφής με τη λειτουργία των συστημάτων ηλεκτρισμού. Η απελευθέρωση των αγορών ηλεκτρισμού, η μεγάλης κλίμακας διείσδυση ανανεώσιμων πηγών ενέργειας, ο συντονισμός των αγορών, η επέκταση των περιβαλλοντικών στόχων, και η ανάπτυξη ευφυών δικτύων και απόκρισης ζήτησης, αποτελούν παραδείματα της πληθώρας αλλαγών, οι οποίες καθοδηγούνται από ενεργειακή πολιτική, και οι οιποίες εμπνέουν ερωτήσεις που μπορούν να προσεγγιστούν με ενδιαφέροντα τρόπο από την επιχειρησιακή έρευνα. Επιπλέον, η εκπληκτική ανάπτυξη υπολογιστικής ισχύος υποδεικνύει ότι η ερευνητική κοινότητα θα είναι ικανή να ορίζει μοντέλα αυξανόμενης κλίμακας και να απαντά σε ερωτήματα αυξανόμενης πολυπλοκότητας.

Όπως υποδεικνύει ο τίτλος των σημειώσεων, το υλικό που παρουσιάζεται σε αυτές τις σημειώσεις επικεντρώνεται σε μοντέλα, όχι αλγορίθμους. Επιπλέον, οι σημειώσεις επικεντρώνονται σε μοντέλα βελτιστοποίησης, όχι σε μοντέλα οικονομικής ισορροπίας ττα οποία δεν μπορούν να περιγραφούν ισοδύναμα ως μοντέλα βελτιστοποίησης. Συνεπώς, οι υποθέσεις που υιοθετούνται όσον αφορά τη συμπεριφορά των πρακτόρων που συμμετέχουν στην αγορά θα είναι σχετικά απλές. Συγκεκριμένα, ερωτήματα στρατηγικής συμπεριφοράς δε θα αναλυθούν εις βάθος. Αν και τα μοντέλα βελτιστοποίησης ενδεχομένως να υπεραπλουστεύουν σημαντικές πρτυχές της συμπεριφοράς των πρακτόρων της αγοράς, παρμένουν επιλύσιμα σε συστήματα ρεαλιστικής κλίμακας, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δώσουν απαντήσεις σε τεράστιο εύρος ενδιαφερόντων ερωτήσεων, και εξυπηρετούν ως πολύ χρήσιμη βάση σύγκρισης με πιο σύνθετα μοντέλα τα οποία υποθέτουν στρατηγική συμπεριφορά.

Οι αναγνώστες στους οποίους στοχεύουν οι σημειώσεις ανήκουν σε δύο κατηγορίες: αναγνώστες που ενδιαφέρονται για τη λειτουργία των αγορών ηλεκτρισμού και των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας, και αναγνώστες με ένα υπόβαθρο σε επιχειρησιακή έρευνα οι οποίοι ενδιαφέρονται να εμπνευστούν από μια πληθώρα εφαρμογών της επιχειρησιακής έρευνας στον τομέα της ενέργειας.

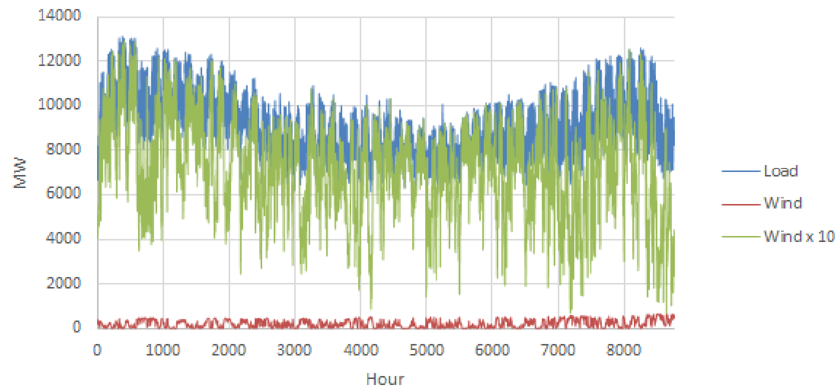
1.2 Ένα παράδειγμα: ανεπαρκή κέρδη

Σε αυτήν την ενότητα, αναλύεται ένα απλό μοντέλο επέκτασης ισχύος. Το απλό αυτό μοντέλο όχι μόνο αναδεικνύει μία κορυφαία πρόκληση ενεργειακής πολιτικής που αντιμετωπίζουν οι αγορές ηλεκτρικής ενέργειας, αλλά οδηγεί σε πλήθος ενδιαφερόντων ερωτήσεων σε σχέση με τη μοντελοποίηση.

Καμπύλες διαλογής

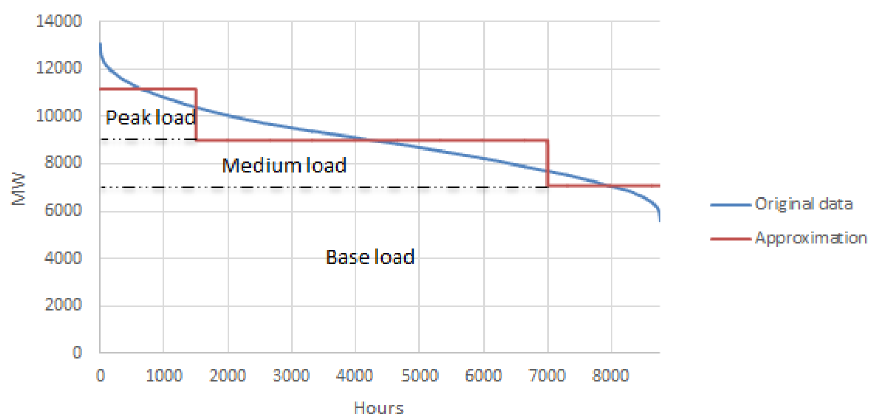
Η χρονολογική εξέλιξη του φορτίου και της αιολικής παραγωγής στο Βέλγιο το 2013 παρουσιάζεται στο Σχήμα 1. Το καθαρό φορτίο της χώρας υπολογίζεται αφαιρώντας το συνολικό φορτίο από τη συνολική αιολική παραγωγή. Οργανώντας τη χρονοσειρά καθαρού φορτίου σε φθίνουσα σειρά, υπολογίζουμε την καμπύλη διάρκειας φορτίου του συστήματος, η οποία παρουσιάζεται στο Σχήμα 2. Η καμπύλη αυτή περιγράφει τον αριθμό των ωρών μέσα στο έτος που το φορτίο ήταν μεγαλύτερο ή ίσο από ένα ορισμένο επίπεδο. Για παράδειγμα, το καθαρό φορτίο ήταν μεγαλύτερο ή ίσο από 10000 MW για 2000 ώρες.

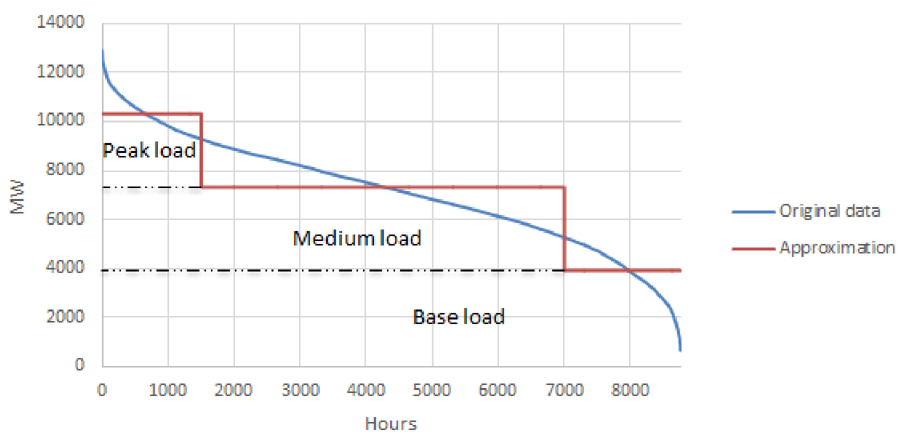
Σχήμα 1: Η χρονολογική εξέλιξη του φορτίου και της αιολικής παραγωγής στο Βέλγιο το 2013.



.

Σχήμα 2: Άνω γράφημα: η καμπύλη διάρκειας φορτίου του Βελγίου το 2013, και μια βαθμωτή προσέγγιση. Κάτω γράφημα: η καμπύλη διάρκειας φορτίου αν η αιολική παραγωγή αυξηθεί κατά 10 φορές.





Χρησιμοποιώντας την καμπύλη διάρκειας φορτίου, μπορούμε να διαχωρίσουμε το φορτίο σε οριζόντια στρώματα, αντί χρονολογικά (το οποίο ανταποκρίνεται σε κάθετα στρώματα). Το γράφημα παρουσιάζει μια βαθμωτή προσέγγιση της καμπύλης διάρκειας φορτίου. Σύμφωνα με αυτήν την προσέγγιση, το φορτίο βάσης ανταποκρίνεται στη χαμηλότερη οριζόντια λωρίδα του γραφήματος, και αντιστοιχεί σε φορτίο 7086 MW. Αυτό είναι φορτίο που διαρκεί για όλο το έτος. Η μεσαία οριζόντια λωρίδα ανταποκρίνεται σε φορτία μεταξύ 7086 MW και 9004 MW. Αυτά τα φορτία διαρκούν για 7000 ώρες. Το φορτίο αιχμής ανταποκρίνεται στην ανώτερη οριζόντια λωρίδα, και κυμαίνεται μεταξύ 9004 MW και 11169 MW. Αυτό το φορτίο διαρκεί για 1500 ώρες.

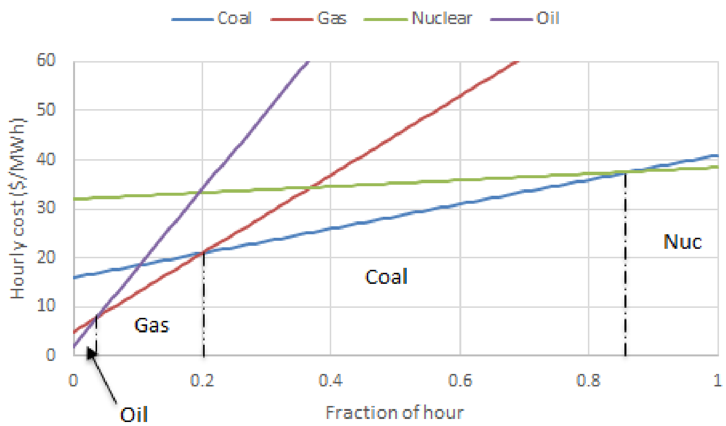
Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει το σύνολο τεχνολογιών οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξυπηρετηθεί η ζήτηση. Το κόστος καυσίμου ανταποκρίνεται στο μεταβλητό κόστος κάθε μονάδας, και είναι ανάλογο της ενέργειας που παράγεται. Το κόστος επένδυσης είναι ανεξάρτητο του πόση ενέργεια παράγεται και είναι ανάλογο της χωρητικότητας του σταθμού παραγωγής. Το κόστος επένδυσης έχει αποσβεστεί στον πίνακα ώστε να ανταποκρίνεται στην ωριαία χρηματορροή η οποία απαιτείται ώστε να επενδυθεί 1 MW χωρητικότητας. Το εφ'άπαξ και το αποσβεσμένο κόστος επένδυσης συζητώνται εκτενέστερα στο κεφάλαιο 3.

Πίνακας 1: Το σύνολο επιλογών για την κάλυψη της ζήτησης.

Τεχνολογία	Κόστος καυσίμου (€/MWh)	Κόστος επένδυσης (€/MWh)
Άνθρακας	25	16
Πετρέλαιο	80	5
Πυρηνικά	6.5	32
Φυσικό αέριο	160	2

Το πρόβλημα βέλτιστης επένδυσης μπορεί να οριστεί ως εξής: βρείτε το μίγμα τεχνολογιών οι οποίες πρέπει να κατασκευαστούν έτσι ώστε να καλυφθεί η ζήτηση με ελάχιστο συνολικό κόστος, το οποίο είναι το άθροισμα του μεταβλητού και του παγίου κόστους. Η γραφική επίλυση του προβλήματος προκύπτει από τις καμπύλες επιλογής στο Σχήμα 3. Το συνολικό κόστος χρήσης 1 MW κάθε τεχνολογίας εξαρτάται από το διάστημα χρόνου που χρησιμοποιείται η κάθε τεχνολογία. Προκειμένου να προσδιοριστεί η βέλτιστη επένδυση, είναι συνεπώς χρήσιμο να αντιμετωπίσουμε το φορτίο ως μια συλλογή από οριζόντιες λωρίδες. Η μόνη διαφορά ανάμεσα στις λωρίδες είναι η διάρκειά τους, και αυτό θα καθορίσει ποια τεχνολογία πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να εξυπηρετηθεί κάθε οριζόντια λωρίδα. Το φορτίο βάσης πρέπει να εξυπηρετηθεί από μια τεχνολογία με χαμηλό μεταβλητό κόστος (ακόμη και αν το κόστος επένδυσης είναι σχετικά υψηλό), ενώ το φορτίο αιχμής πρέπει να εξυπηρετείται από μια τεχνολογία με χαμηλό κόστος επένδυσης (ακόμη κι αν το μεταβλητό κόστος είναι σχετικά υψηλό).

Σχήμα 3: Η καμπύλη επιλογής περιγράφει το συνολικό ωριαίο κόστος κάθε τεχνολογίας ως συνάρτηση του ποσοστού του χρόνου που η τεχνολογία παράγει ενέργεια.



Το ακριβές ποσοστό του χρόνου για το οποίο πρέπει να λειτουργεί η κάθε τεχνολογία βρίσκεται από τον κάτω φάκελο της καμπύλης συνολικού κόστους:

- Για το πετρέλαιο: $2 + 160 \cdot f \leq 5 + 80 \Leftrightarrow f \leq 0.0375$. Αυτό ανταποκρίνεται σε 0-328 ώρες.
- Για το φυσικό αέριο: $f > 0.0375$ και $5 + 80 \cdot f \leq 16 + 25 \cdot f \Leftrightarrow f \leq 0.2$. Αυτό ανταποκρίνεται σε 328-1752 ώρες.
- Για τον άνθρακα: $f > 0.2$ και $16 + 25 \cdot f \leq 32 + 6.5 \cdot f \Leftrightarrow f \leq 0.8649$. Αυτό ανταποκρίνεται σε 1752-7576 ώρες.
- Για πυρηνικά: $0.8649 \leq f \leq 1$. Αυτό ανταποκρίνεται σε 7576-8760 ώρες.

Η καμπύλη διάρκειας φορτίου καταδεικνύει ότι αν ο στόχος είναι να ικανοποιείται πάντα το φορτίο, τότε το σχέδιο επέκτασης του συστήματος με το ελάχιστο κόστος είναι ως εξής:

- Το φορτίο βάσης αποδίδεται στα πυρηνικά: 7086 MW
- Το μέσο φορτίο αποδίδεται στον άνθρακα: 1918 MW
- Το φορτίο αιχμής αποδίδεται στο φυσικό αέριο: 2165 MW
- Δεν αποδίδεται φορτίο στο πετρέλαιο: 0 MW

Τα αποτελέσματα αυτά ανταποκρίνονται στη βαθμωτή προσέγγιση της καμπύλης διάρκειας φορτίου. Αν είχε αντ'αυτού χρησιμοποιηθεί η πραγματική καμπύλη διάρκειας φορτίου, θα υπήρχε και επένδυση σε γεννήτριες πετρελαίου για την εξυπηρέτηση του φορτίου αιχμής.

Βραχυπρόθεσμη και μακροπρόθεσμη ισορροπία

Ας αναρωτηθούμε πώς θα εξελιχθεί η τιμή του ηλεκτρισμού στο σύστημα. Έστω ότι οι παραγωγή δε συμπεριφέρονται στρατηγικά, και δέχονται την τιμή ως δεδομένη, με την έννοια ότι θεωρούν πως οι δικές τους αποφάσεις δεν έχουν κάποια επίδραση στην τιμή της αγοράς. Η *ανταγωνιστική ισορροπία της αγοράς*, η οποία ορίζεται επακριβώς στο κεφάλαιο 4, είναι ένας συνδυασμός τιμών αγοράς και ποσότητας παραγωγής ηλεκτρισμού τέτοιος ώστε κανένας παραγωγός να μπορεί να ωφεληθεί από μια αλλαγή στην ποσότητα παραγωγής του, και με τη συνολική προσφορά να καλύπτει τη συνολική ζήτηση.

Η ανταγωνιστική ισορροπία δεν είναι απαραίτητα μοναδική. Αν έχει ήδη αποφασιστεί ένα μίγμα τεχνολογιών στην αγορά, *μία* δυνατή τιμή που θα μπορούσαμε να διαλέξουμε για να βρούμε μια οικονομική ισορροπία είναι είναι το οριακό κόστος καυσίμου της *οριακής μονάδας*, δηλαδή η πιο ακριβή μονάδα η οποία παράγει ενέργεια. Για να επαληθεύσουμε ότι αυτή είναι τιμή ισορροπίας, παρατηρούμε ότι σε αυτήν την τιμή, για κάθε ώρα του έτους, (i) η οριακή μονάδα εξυπηρετεί την οριζόντια λωρίδα που ανταπορίνεται στη χωρητικότητά της, (ii) οι πιο ακριβές μονάδες είναι εκτός λειτουργίας, και (iii) οι φθηνότερες μονάδες εξυπηρετούν την οριζόντια λωρίδα που ανταποκρίνεται στη χωρητικότητά τους. Καμία μονάδα δεν μπορεί να αποκομίσει θετικό κέρδος από μια αλλαγή στην παραγωγή της, και η συνολική προσφορά ισούται με τη συνολική ζήτηση.

Έστω ότι το βέλτιστο μίγμα γεννητριών το οποίο υπολογίστηκε προηγουμένως (7086 MW πυρηνικών, 1918 MW άνθρακα, και 2165 MW φυσικού αερίου) έχει *ήδη* αποφασιστεί. Τότε, η τιμή αγοράς στην ανταγωνιστική ισορροπία που καθορίζεται από το οριακό κόστος της οριακής μονάδας[2] ισούται με 6.5 €/MWh στις ώρες του φορτίου βάσης, 25 €/MWh στις ώρες του μέσου φορτίου, και 80 €/MWh στις ώρες του φορτίου αιχμής.

Με αυτά τα δεδομένα, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το κέρδος κάθε τεχνολογίας. Οι πυρηνικές μονάδες έχουν μηδενικά κέρδη όταν είναι οριακές, έχουν ένα περιθώριο κέρδους 18.5 €/MWh όταν ο άνθρακας είναι οριακός (το οποίο διαρκεί 68.5% του έτους), και έχουν ένα περιθώριο κέρδους 73.5 €/MWh όταν το φυσικό αέριο είναι οριακό (το οποίο διαρκεί 17.1% του έτους). Αυτό ανταποκρίνεται σε ένα μέσο ωριαίο κόστος ίσο με $0.685 \cdot 18.5 + 0.171 \cdot 73.5 = 25.3$ €/MWh. Παρομοίως, ο άνθρακας κερδίζει κατά μέσο όρο $0.171 \cdot 55 = 9.4$ €/MWh και το φυσικό αέριο κερδίζει κατά μέσο όρο 0 €/MWh.

Η ανάλυση αυτή οδηγεί σε ένα φαινομενικό παράδοξο: φαίνεται πως αυτό που ορίστηκε (ατύπως) ως ανταγωνιστική ισορροπία οδηγεί σε μια κατάσταση όπου καμία τεχνολογία δεν μπορεί να επιβιώσει στην αγορά, με την έννοια του να καλύπτει το κόστος επένδυσης! Πιο συγκεκριμένα, αν συγκρίνουμε τη μέση κερδοφορία της κάθε τεχνολογίας με το αντίστοιχο κόστος επένδυσης, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι πυρηνικές μονάδες χάνουν 6.8 € ανά ώρα για κάθε MW χωρητικότητας, οι μονάδες άνθρακα χάνουν 6.6 €/MWh, και οι μονάδες φυσικού αερίου χάνουν 5.0 €/MWh. Καμία από αυτές τις μονάδες δεν επιτυγχάνει επαρκές κέρδος στην αγορά για να επιβιώσει μακροπρόθεσμα. Συγκεκριμένα, η χωρητικότητα μιας πυρηνικής μονάδας είναι κατά κανόνα τουλάχιστον 1000 MW, το οποίο σημαίνει ότι μια τέτοια επένδυση θα υφίστατο οικονομικές ζημιές ίσες με 6750 € ανά ώρα! Τα αποτελέσματα αυτά δεν είναι συγκυριακά, δηλαδή δεν είναι αποτέλεσμα των συγκεκριμένων αριθμών που έχουμε επιλέξει για το αριθμητικό παράδειγμα. Οποιαδήποτε επιλογή καμπύλης διάρκειας φορτίου, κόστους καυσίμου, και κόστους επένδυσης οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα (κάποιες τεχνολογίες δεν επιτυγχάνουν επαρκές κέρδος ώστε να καλύψουν το κόστος επένδυσης) αν ο ηλεκτρισμός τιμολογείται στο οριακό κόστος της οριακής μονάδας. Ο αναγνώστης μπορεί να το επαληθεύσει αυτό άμεσα θεωρόντας την μονάδα αιχμής: αν επιβληθεί ένα όριο στην τιμή της αγοράς που είναι ίσο με το οριακό κόστος της πιο ακριβής τεχνολογίας, τότε οι *μονάδες αιχμής* (δηλαδή οι μονάδες που εξυπηρετούν το φορτίο αιχμής) δεν είναι ποτέ σε θέση να επιτύχουν κέρδη που να καλύπτουν τα κόστη επένδυσης.

Προκειμένου να επιλυθεί το φαινομενικό παράδοξο που ανακύπτει στο παράδειγμα, είναι σημαντικό να διαχωρίσουμε μια βραχυπρόθεσμη ισορροπία από μια μακροπρόθεσμη ισορροπία. Σε μια βραχυπρόθεσμη ισορροπία, οι χωρητικότητες των μονάδων θεωρούνται αμετάβλητες, υπό την έννοια ότι έχουν ήδη αποφασιστεί. Σε μια μακροπρόθεσμη ισορροπία, οι χωρητικότητες των μονάδων αποτελούν μέρος της απόφασης των παραγωγών. Σε αυτήν την περίπτωση, η τιμή που

[2] Επιστρέφοντας στο ότι η τιμή ισορροπίας δεν είναι απαραίτητα μοναδική, αφήνεται στον αναγνώστη να επιβεβαιώσει ότι και οι ακόλουθες τιμές αγοράς είναι επίσης τιμές ισορροπίας αν το μίγμα τεχνολογιών στο σύστημα έχει *ήδη* αποφασιστεί (7086 MW πυρηνικών, 1918 MW άνθρακα, και 2165 MW φυσικού αερίου): (i) οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα από 6.5 €/MWh έως 25 €/MWh για τις ώρες φορτίου βάσης, (ii) οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα από 25 €/MWh έως 80 €/MWh για τις ώρες μέσου φορτίου, και (iii) οποιαδήποτε τιμή ίση με ή μεγαλύτερη των 80 €/MWh για τις ώρες φορτίου αιχμής.

ορίστηκε προηγουμένως ως η οριακή τιμή της οριακής μονάδας δεν αποτελεί πλέον τιμή ισορροπίας, διότι με αυτήν την τιμολόγηση οι παραγωγοί δεν επιθυμούν να επενδύσουν στη βέλτιστη χωρητικότητα. Απεναντίας (και αυτό αποδεικνύεται στο κεφάλαιο 10), οι τιμές στη μακροπρόθεσμη ισορροπία θα πρέπει να ανέλθουν πάνω από το οριακό κόστος για ορισμένες ώρες μέσα στο χρόνο, προκειμένου να δώσουν κίνητρο στους επενδυτές να κατασκευάσουν μονάδες.

Το παράδειγμα αυτό στοχεύει στο να βάλει τον αναγνώστη να αναρωτηθεί τι καθιστά μια οικονομική ισορροπία. Η έννοια ορίζεται επακριβώς στη συνέχεια των σημειώσεων. Σε αυτό το στάδιο, αρκεί να σημειώσουμε ότι είναι μια έννοια που είναι ιδιαιτέρως ισχυρή στο να επεξηγεί τη συμπεριφορά των συμμετεχόντων στην αγορά, και ότι πρέπει να ορίζεται προσεκτικά ώστε να αποφεύγονται φαινομενικά παράδοξα όπως αυτό που μόλις συζητήσαμε.

Πλαφόν τιμών προσφοράς και το πρόβλημα των ανεπαρκών κερδών

Οι αγορές ηλεκτρισμού είναι ευάλωτες στη στρατηγική συμπεριφορά των συμμετεχόντων. Η δεσπόζουσα θέση (market power) καταχράται από τους παραγωγούς όταν αυτοί διατηρούν τις μονάδες τους εκτός της αγοράς προκειμένου να αυξήσουν *επικερδώς* τις τιμές της αγοράς πάνω από τα επίπεδα της ανταγωνιστικής αγοράς. Η ανίχνευση της κατάχρησης δεσπόζουσας θέσης είναι ιδιαιτέρως δύσκολη, γιατί είναι δύσκολο να διαχωριστεί η αύξηση τιμών ως αποτέλεσμα στρατηγικής συμπεριφοράς από την αύξηση τιμών λόγω πραγματικής σπανιότητας σε χωρητικότητα. Προκειμένου να αποτραπεί η χειραγώγηση της αγοράς, οι ρυθμιστικές αρχές ενέργειας επιβάλουν *ανώτατα όρια (πλαφόν) τιμής προσφοράς* (offer price cap) τα οποία περιορίζουν την τιμή στην οποία οι παραγωγοί μπορούν να διαθέσουν τις μονάδες τους στην αγορά. Υπάρχουν επίσης ανώτατα όρια τιμής αγοράς (market price cap), τα οποία περιορίζουν την τιμή στην οποία εκκαθαρίζει η αγορά. Η παρούσα συζήτηση εστιάζεται σε ανώτατα όρια στις τιμές προσφοράς.

Η άνοδος της τιμής της αγοράς πάνω από το οριακό κόστος θα μπορούσε (ενδεχομένως εσφαλμένα) να ερμηνευτεί ως αποτέλεσμα στρατηγικής συμπεριφοράς. Στην περίπτωση του παραδείγματος που εξετάσαμε, έστω ένα πλαφόν στην τιμή προσφοράς ίσο με 80 €/MWh. Αυτή η επιλογή είναι μια θανάσιμη κίνηση σχεδιασμού αγοράς: οι επενδυτές δε θα επενδύσουν ποτέ σε μονάδες φυσικού αερίου αν η τιμή της αγοράς δεν μπορεί να ανέλθει άνω των 80 €/MWh, και έχουμε ήδη δείξει προηγουμένως ότι οι μονάδες φυσικού αερίου πρέπει να είναι μέρος του μακροπρόθεσμου μίγματος τεχνολογιών σε αυτό το παράδειγμα. Το παράδειγμα αναδεικνύει το πρόβλημα ανεπαρκών κερδών, το οποίο ανακύπτει όταν οι τιμές της αγοράς περιορίζονται λόγω ανωτάτων ορίων στις τιμές προσφοράς ή εκκαθάρισης, το οποίο οδηγεί σε οικονομικές απώλειες για τους παραγωγούς και σμίκρυνση των επενδύσεων.

Έστω τώρα ότι η πραγματική αιολική παραγωγή είναι 10 φορές μεγαλύτερη από αυτήν που υποθέσαμε προηγουμένως όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Η νέα καμπύλη διάρκειας φορτίου παρουσιάζεται στο Σχήμα 2. Μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι η καμπύλη διάρκειας φορτίου τώρα γίνεται λιγότερο επίπεδη, και υπάρχουν ώρες που το καθαρό φορτίο του συστήματος είναι σχεδόν ίσο με το μηδέν. Με τη νέα καμπύλη διάρκειας φορτίου, η απαιτούμενες επενδύσεις σε άνθρακα και φυσικό αέριο επίσης αυξάνονται[3]. Έχουμε ήδη εξηγήσει πως ένα πλαφόν στα 80 €/MWh συνεπάγεται ότι δε θα υπάρξουν εθελοντικές επενδύσεις σε μονάδες φυσικού αερίου σε ένα οικονομικά ανταγωνιστικό περιβάλλον.Παρατηρήστε την ένταση: η αυξημένη διείσδυση ανανεώσιμων πηγών ενέργειας αυξάνει την απαιτούμενη χωρητικότητα σε φυσικό αέριο στο

[3] Η αναφορά σε άνθρακα και φυσικό αέριο είναι καθαρά ενδεικτική, καθώς η ανάλυσή μας δε λαμβάνει υπόψη τις περιβαλλοντικές επιπτώσεις των διαφορετικών τεχνολογιών. Μπορείτε να σκεφτείτε τον άνθρακα και το φυσικό αέριο ως ετικέτες για τις ανάγκερ του παραδείγματος. Αυτό που έχει σημασία για το παράδειγμα είναι το κόστος καυσίμου και το κόστος επένδυσης των τεχνολογιών.

βέλτιστο μίγμα, ενώ το ανώτατο όριο τιμής εγγυάται ότι σε συνθήκες ανταγωνισμού η συγκεκριμένη τεχνολογία δε θα κατασκευαστεί. Στην πραγματικότητα, η ανάγκη για τεχνολογίες αιχμής είναι ακόμη μεγαλύτερη, γιατί αυτές οι μονάδες έχουν κατά κανόνα πιο ευέλικτα χαρακτηριστικά λειτουργίας. Τα χαρακτηριστικά αυτά έχουν αγνοηθεί στην παρούσα συζήτηση, και παρουσιάζονται με μεγαλύτερη λεπτομέρεια όταν αναπτύσσεται το πρόβλημα δέσμευσης μονάδων στο κεφάλαιο 7.

Βιβλιογραφία

Κεφάλαιο 1.1: Η δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν μοντέλα ισορροπίας για να αναλυθούν απελευθερωμένες αγορές ηλεκτρισμού και φυσικού αερίου αναπτύσσεται από τον (Smeers, 1997).

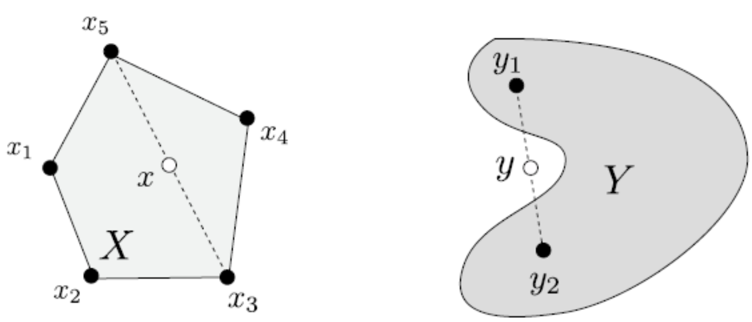
Κεφάλαιο 1.2: Ο (Shanker, 2003) όρισε τον όρο “missing money” (ανεπαρκή κέρδη) ο οποίος θα δημιουργούσε μετέπειτα τη βάση συζητήσεων για ανεπαρκείς επενδύσεις σε μονάδες παραγωγής: τα ανεπαρκή κέρδη ανακύπτουν όταν η αγορά αποζημιώνει ανεπαρκώς ένα αγαθό ή μια υπηρεσία. Ο (Hogan, 2005) ανέπτυξε την ιδέα, και εξηγεί ότι τα ανεπαρκή κέρδη είναι μια ατέλεια της αγοράς που είναι αποτέλεσμα της ρυθμιστικής παρέμβασης όπου τίθεται ένα άνω όριο (πλαφόν) στις τιμές ηλεκτρισμού σε μια απελευθερωμένη αγορά ηλεκτρισμού. Η (Fabra, 2018) αναπτύσσει μια ενδιαφέρουσα συζήτηση σχετικά με τη σχέση μεταξύ ορίων τιμών, κατάχρησης δεσπόζουσας θέσης και μηχανισμών αποζημίωσης ισχύος.

2. Μαθηματικό υπόβαθρο

Το παρόν κεφάλαιο καλύπτει μαθηματικό υπόβαθρο το οποίο είναι αναγκαίο για τη συνέχεια. Οι ενότητες και αναπτύσσουν τη δυϊκότητα και τις συνθήκες ΚΚΤ ως αυθυπόστατο υλικό. Η ενότητα παρέχει μια ερμηνεία των δυϊκών πολλαπλασιαστών ως ευαισθησίες. Η ερμηνεία αυτή χρησιμοποιείται επανειλημμένα στις σημειώσεις προκειμένου ο αναγνώστης να αποκτήσει μια διαίσθητική κατανόηση των μοντέλων. Πριν αναπτυχθούν τα αποτελέσματα δυϊκότητας, ανακαλούνται μερικοί ορισμοί. Για αναγνώστες που δεν έχουν πρότερη έκθεση στο γραμμικό, και γενικότερα μαθηματικό, προγραμματισμό, μια εισαγωγή παρατίθεται στο παράρτημα Β.

Έστω ένα σύνολο σημείων $x_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, n$. Ένας **κυρτός συνδυασμός** αυτών των σημείων είναι ένα σημείο $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, όπου $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ και $\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$. Το σύνολο X είναι **κυρτό σύνολο** οποιοδήποτε κυρτό συνδυασμό σημείων $x_i \in X$. Γεωμετρικά, ένας κυρτός συνδυασμός δύο σημείων είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο σημεία. Ένα σύνολο είναι μη κυρτό αν δεν περιέχει όλους τους κυρτούς συνδυασμούς σημείων του. Οι έννοιες αυτές απεικονίζονται γραφικά στο Σχήμα 4.

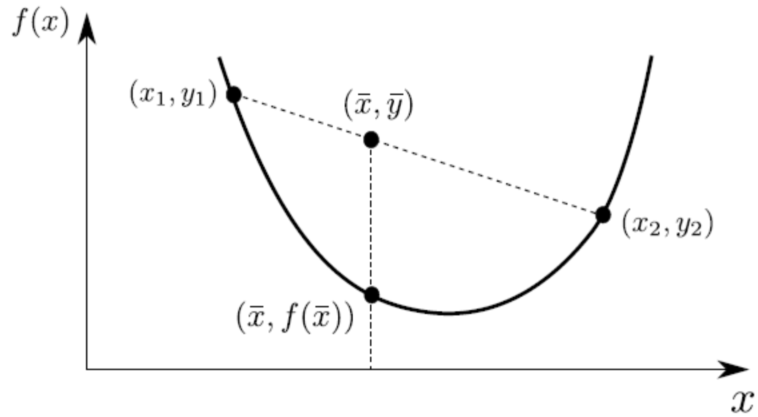
Σχήμα 4: Έστω σημεία $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}^2$. Το σημείο x είναι κυρτός συνδυασμός των x_3 και x_5 γιατί μπορεί να εκφραστεί ως $x = 0.5x_3 + 0.5x_5$. Το σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι κυρτό γιατί οποιοδήποτε σημείο που μπορεί να εκφραστεί ως κυρτός συνδυασμός ξεχωριστών σημείων που ανήκουν στο X ανήκει στο X. Το σύνολο $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ δεν είναι κυρτό, γιατί υπάρχουν κυρτοί συνδυασμοί σημείων στο Y που δεν ανήκουν στο Y, για παράδειγμα το $y = 0.5y_1 + 0.5y_2$ δεν ανήκει στο Y.



Η συνάρτηση f είναι **κυρτή συνάρτηση** αν για όλα τα $0 \leq \lambda \leq 1$ και για οποιαδήποτε x_1, x_2 έχουμε $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_1) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. Η συνάρτηση f είναι **κοίλη συνάρτηση** αν η $-f$ είναι κυρτή. Ο ορισμός μιας κυρτής συνάρτησης παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 5.

Σχήμα 5: Γραφική αναπαράσταση μιας κυρτής συνάρτησης με πεδίο ορισμού που ανήκει στο $\mathbb{R}$. Έστω σημεία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $y_1 = f(x_1)$ και $y_2 = f(x_2)$. Η συνάρτηση f είναι κυρτή διότι, για οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 και για οποιαδήποτε επιλογή

$0 \le \lambda \le 1$, η τιμή της συνάρτησης στο $\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $f(\bar{x})$, είναι μικρότερη ή ίση από τον κυρτό συνδυασμό $\bar{y} = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$.



Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι το πρόβλημα του να βρεθεί το ελάχιστο μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\min f(x)$$

$$\text{subject to } x \in X$$

Το σύνολο X είναι το **εφικτό σύνολο** του προβλήματος. Η συνάρτηση f είναι η **αντικειμενική συνάρτηση** του προβλήματος. Οποιοδήποτε $x \in X$ είναι **εφικτή λύση**. Οποιοδήποτε διάνυσμα $x^* \in X$ τέτοιο ώστε $f(x^*) \le f(x)$ για οποιοδήποτε $x \in X$ είναι μια **βέλτιστη λύση**. Το “subject to” συντομογραφείται σε “s.t.”, ή παραλείπεται, στη συνέχεια. Ένα **πρόβλημα κυρτής βελτιστοποίησης** είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με κυρτή αντικειμενική συνάρτηση και με κυρτό σύνολο εφικτών λύσεων.

2.1 Δυϊκότητα

Η θεωρία της δυϊκότητας βασίζεται στην ιδέα του να επιτρέψουμε κάποιους από τους περιορισμούς ενός προβλήματος βελτιστοποίησης να παραβιαστούν έναντι ενός τιμήματος. Αυτό οδηγεί στον ορισμό ενός νέου προβλήματος βελτιστοποίησης, το οποίο ονομάζεται δυϊκό πρόβλημα, και του οποίου η βέλτιστη λύση επιδέχεται μιας θεμελιώδους οικονομικής ερμηνείας ως η τιμή ισορροπίας της αγοράς (ο ακριβής ορισμός της οικονομικής ισορροπίας δίνεται στο επόμενο κεφάλαιο). Προκειμένου να ορίσουμε το δυϊκό πρόβλημα, ορίζουμε πρώτα τη συνάρτηση Lagrange.

Έστω το εξής πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$p^* = \min f_0(x)$$

$$\text{s.t. } f_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m$$

$$h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$$

$$x \in dom\ f_0 \subseteq \mathbb{R}^n$$

όπου το **πεδίο ορισμού** μιας συνάρτησης f, $dom\ f$, είναι το σύνολο όπου η f είναι ορισμένη.

Είναι ξεκάθαρο ότι για να είναι ένα διάνυσμα x υποψήφιο για να είναι βέλτιστο πρέπει να ανήκει στο $dom\, f$. Οι m περιορισμοί ανισότητας, $f_i(x) \leq 0$, και οι p περιορισμοί ισότητας, $h_i(x) = 0$, περιορίζουν περαιτέρω το εφικτό σύνολο των διανυσμάτων.

Ας υποθέσουμε, τώρα, τι θα συμβεί αν *χαλαρώσουμε* τους περιορισμούς ανισότητας και ισότητας: ας μας επιτραπεί δηλαδή να τους παραβιάσουμε, αλλά με μια ποινή για την παραβίασή τους. Αυτή η ιδέα οδηγεί στον ορισμό της **συνάρτησης Lagrange**, της οποίας το πεδίο ορισμού είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$:

$$L(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(x)$$

Η συνάρτηση Lagrange μπορεί να ερμηνευτεί ως μια νέα αντικειμενική συνάρτηση, η οποία προσθέτει στην αρχική αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος f_0 ένα σταθμισμένο άθροισμα των περιορισμών οι οποίοι χαλαρώνονται. Τα βάρη λ_i (για περιορισμούς ανισότητας) και (για περιορισμούς ισότητας) ορίζονται ως **πολλαπλασιαστές Lagrange**, και ερμηνεύονται ως οι συντελεστές της ποινής που υφιστάμεθα για την παραβίαση των εν λόγω περιορισμών.

Στο υπόλοιπο αυτών των σημειώσεων, οι πολλαπλασιαστές που ανταποκρίνονται σε ένα σύνολο περιορισμών θα τοποθετούνται στα αριστερά των αντίστοιχων περιορισμών στον ορισμό του προβλήματος, ακολουθώντας την εξής σημειολογία:

$$\min f_0(x)$$

$$\text{s.t.}\, x \in dom\ f_0 \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda_i): f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$$

$$(\nu_i): h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$$

Έστω τώρα ότι οι πολλαπλασιαστές Lagrange διατηρούνται σταθερή σε δεδομένες τιμές. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την ακόλουθη **δυϊκή συνάρτηση Lagrange**:

$$g(\lambda, \nu) = min_{x \in dom\ f_0} L(x, \lambda, \nu)$$

$$= min_{x \in dom\ f_0} (f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(x))$$

Σημειώνουμε ότι η δυϊκή συνάρτηση $g(\lambda, \nu)$ μπορεί να είναι ίση με $-\infty$ για κάποιες τιμές των λ, ν. Οι τιμές των (λ, ν) στις οποίες η δυϊκή συνάρτηση δεν είναι ίση με $-\infty$ αντιστοιχούν στο πεδίο ορισμού της δυϊκής συνάρτησης.

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η δυϊκή συνάρτηση παρέχει ένα κάτω όριο του αρχικού προβλήματος βελτιστοποίησης, υπό την προϋπόθεση ότι $\lambda \geq 0$. Για να γίνει κατανοητός ο λόγος, παρατηρούμε ότι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης Lagrange (που ορίζει τη δυϊκή συνάρτηση) επιτρέπει την παραβίαση των περιορισμών τους οποίους έχουμε χαλαρώσει, αλλά αν αυτοί οι περιορισμού εν τέλει δεν παραβιαστούν από ένα εφικτό διάνυσμα x τότε το γεγονός ότι δεν παραβιάζονται προσδίδει ένα "bonus" στη συνάρτηση Lagrange όταν $\lambda \geq 0$, υπό την έννοια ότι η συνάρτηση L έχει μια τιμή που είναι χαμηλότερη από το $f_0(x)$. Το επιχείρημα αναπτύσσεται με ακρίβεια στην επόμενη πρόταση:

Πρόταση 2.1: Αν $\lambda \geq 0$ τότε $g(\lambda, \nu) \leq p^*$.

Απόδειξη

Έστω διάνυσμα $\bar{x}$ τέτοιο ώστε . Για $\lambda \geq 0$,

$$f_0(\bar{x}) \geq L(\bar{x}, \lambda, \nu) \geq min_{x \in dom\, f_0} L(x, \lambda, \nu) = g(\lambda, \nu).$$

Ελαχιστοποιώντας για όλα τα $\bar{x}$ τέτοια ώστε $f_i(\bar{x}) \leq 0$ και $h_i(\bar{x}) = 0$ δίνει την επιθυμητή ανισότητα, $p^* \geq g(\lambda, \nu)$.

■

Παράδειγμα 2.1: Η συνάρτηση f είναι **προσθετικά διαχωρίσιμη** αν μπορεί να γραφτεί ως $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n)$. Έστω ένα σύνολο από πράκτορες G με συναρτήσεις κόστους $f_g(x_g)$, όπου x_g είναι το διάνυσμα αποφάσεων του κάθε πράκτορα. Ως σύνολο, οι πράκτορες καλούνται να αποφασίσουν για δραστηριότητες σεβόμενοι τους ακόλουθους προσθετικά διαχωρίσιμους περιορισμούς, $\sum_{g \in G} h1_g(x_g) = 0$. Επιπλέον, κάθε πράκτορας καλείται να υπακούσει τους ιδιωτικούς περιορισμούς $h2_g\left(x_g\right) \leq 0$. Διατυπώνεται συνεπώς το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\min \sum_{g \in G} f_g\left(x_g\right)$$

$$\text{s.t.}\, h2_g\left(x_g\right) \leq 0, g \in G$$

$$(\lambda): \sum_{g \in G} h1_g\left(x_g\right) = 0 \qquad (2.1)$$

Χαλαρώνοντας τους περιορισμούς (2.1), προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση Lagrange:

$$L(x, \lambda) = \sum_{g \in G} (f_g\left(x_g\right) + \lambda^T h1_g\left(x_g\right)),$$

όπου λ είναι το διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange που αντιστοιχεί στος περιορισμούς τους οποίους έχουμε χαλαρώσει. Η δυϊκή συνάρτηση εκφράζεται ως

$$g(\lambda) = \sum_{g \in G} min_{x_g : h2_g(x_g) \leq 0}((f_g\left(x_g\right) + \lambda^T h1_g\left(x_g\right))).$$

Σημειώνεται ότι ο υπολογισμός της $g(\lambda)$ για δεδομένο λ μπορεί να επιτευχθεί με την επίλυση $|G|$ $ανεξάρτητων$ προβλημάτων βελτιστοποίησης.

■

Η δυϊκή συνάρτηση $g(\lambda, \nu)$ είναι *πάντοτε* μια κοίλη συνάρτηση, ακόμη και αν οι $f_0(x), f_i(x)$ ή $h_i(x)$ δεν είναι κυρτές συναρτήσεις.

Πρόταση 2.2: Η συνάρτηση $g(\lambda, \nu)$ είναι κοίλη.

Απόδειξη: Έστω οποιαδήποτε (λ_1, ν_1), (λ_2, ν_2). Έστω $\alpha \in [0,1]$. Τότε,

$$g(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2, \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2)$$

$$= \min_{x \in dom\, f_0}\left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \alpha\lambda_{1,i} f_i(x) + (1-\alpha)\lambda_{2,i} f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \alpha\nu_{1,i} h_i(x) + (1-\alpha)\nu_{2,i} h_i(x)\right)$$

$$\geq \alpha \min_{x \in dom\, f_0}\left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{1,i} f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_{1,i} h_i(x)\right)$$

$$+(1-\alpha) \min_{x \in dom\, f_0}\left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{2,i} f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_{2,i} h_i(x)\right)$$

$$= \alpha g(\lambda_1, \nu_1) + (1-\alpha) g(\lambda_2, \nu_2)$$

■

Είναι φυσικό να μεγιστοποιήσουμε τη δυϊκή συνάρτηση προκειμένου να υπολογίσουμε το μεγαλύτερο δυνατό κάτω όριο από τη χαλάρωση του αρχικού προβλήματος. Αυτό οδηγεί στη διατύπωση του **δυϊκού προβλήματος Lagrange**:

$$d^* = \max g(\lambda, \nu)$$

$$\text{s.t.}\, \lambda \geq 0$$

Εν γένει, το πρόβλημα αυτό επιλύεται ευκολότερα από το αρχικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, διότι η δυϊκή συνάρτηση είναι κοίλη και υπάρχει πληθώρα αποδοτικών αλγορίθμων για την ελαχιστοποίηση κυρτών συναρτήσεων (ή τη μεγιστοποίηση κοίλων συναρτήσεων) σε κυρτά σύνολα. Πιο σημαντικό ακόμη, από άποψης μοντελοποίησης, η βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος συχνά συνοδεύεται από ενδιαφέρουσες οικονομικές ερμηνείες.

Εφόσον $g(\lambda, \nu) \leq p^*$ για οποιαδήποτε λ, ν, αυτό συνεπάγεται ότι $p^* \geq d^*$. Αυτή η ανισότητα ονομάζεται **ασθενής δυϊκότητα** και ισχύει για οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποίησης, είτε είναι κυρτό είτε όχι. Από υπολογιστικής άποψης, το d^* οδηγεί σε ορισμένες περιπτώσεις σε μη προφανή όρια για δύσκολα προβλήματα βελτιστοποίησης. Η **ισχυρή δυϊκότητα** ισχύει όταν $p^* = d^*$, αλλά είναι μια ιδιότητα που δεν ισχύει για οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποίησης. Όταν ισχύει η ισχυρή δυϊκότητα, τότε η επίλυση του πρωταρχικού προβλήματος βελτιστοποίησης ισοδυναμεί με την επίλυση του δυϊκού προβλήματος μεγιστοποίησης. Η ισχυρή δυϊκότητα ισχύει κατά κανόνα για κυρτά προβλήματα βελτιστοποίησης. Οι συνθήκες οι οποίες εγγυώνται την ισχυρή δυϊκότητα ονομάζονται προσόντα περιορισμών (constraint qualifications). Η διαφορά $p^* - d^*$, είτε μηδενική είτε αυστηρώς θετική, ορίζεται ως το **κενό δυϊκότητας** μιας χαλάρωσης ενός προβλήματος βελτιστοποίησης.

Παράδειγμα 2.2: Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τους μνημονικούς κανόνες για το δυϊκό ενός γραμμικού προγράμματος. Αποδείξτε τους μνημονικούς κανόνες του πίνακα.

Πίνακας 2: Μνημονικός πίνακας δυϊκότητας γραμμικού προγραμματισμού.

Πρωταρχικό	Ελαχιστοποίηση	Μεγιστοποίηση	Δυϊκό
Περιορισμοί	$\geq b_i$	≥ 0	Μεταβλητές
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	Ελεύθερες	
Μεταβλητές	≥ 0	$\leq c_j$	Περιορισμοί
	≤ 0	$\geq c_j$	
	Ελεύθερες	$= c_j$	

Λύση

Παρατηρούμε πρώτα ότι οποιοδήποτε γραμμικό πρόγραμμα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\min c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + c_3^T x_3$$

$$(\lambda_1): A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \geq b_1$$

$$(\lambda_2): A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \leq b_2$$

$$(\lambda_3): A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 = b_3$$

$$(\sigma_1): x_1 \geq 0$$

$$(\sigma_2): x_2 \leq 0$$

Αυτό οδηγεί στην εξής συνάρτηση Lagrange:

$$L(x, \lambda, \sigma) = \sum_{j=1}^{3} c_j^T x_j - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^T \left(\sum_{j=1}^{3} A_{ij} x_j - b_i \right) - \sum_{j=1}^{2} \sigma_j^T x_j$$

Προκειμένου η συνάρτηση $L(x, \sigma, \lambda)$ να είναι κάτω όριο στη βέλτιστη λύση του πρωταρχικού προβλήματος, πρέπει να ισχύουν οι εξής ανισότητες: $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \leq 0, \sigma_1 \geq 0$ και $\sigma_2 \leq 0$. Επιπλέον, εφόσον οι x_j είναι ελεύθερες μεταβλητές στο χαλαρωμένο πρόβλημα (μιας και οι τελευταίοι δύο περιορισμοί του πρωταρχικού προβλήματος έχουν χαλαρώσει), η δυϊκή συνάρτηση $g(\lambda, \sigma)$ θα είναι πεπερασμένη αν και μόνον αν

$$c_j^T - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^T A_{ij} - \sigma_j^T = 0, j = 1,2$$

$$c_3^T - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^T A_{i3} = 0$$

Σε αυτό το πεδίο ορισμού, η δυϊκή συνάρτηση γίνεται ίση με $g(\lambda, \sigma) = \sum_{i=1}^{3} b_i^T \lambda_i$. Λαμβάνοντας υπόψη το πρόσημο του σ, το δυϊκό πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως

$$\max b_1^T \lambda_1 + b_2^T \lambda_2 + b_3^T \lambda_3$$

$$\text{s.t. } A_{11}^T \lambda_1 + A_{21}^T \lambda_2 + A_{31}^T \lambda_3 \le c_1$$

$$A_{12}^T \lambda_1 + A_{22}^T \lambda_2 + A_{32}^T \lambda_3 \ge c_2$$

$$A_{13}^T \lambda_1 + A_{23}^T \lambda_2 + A_{33}^T \lambda_3 = c_3$$

$$\lambda_1 \ge 0$$

$$\lambda_2 \le 0$$

το οποίο αποδεικνύει ότι ισχύουν οι μνημονικοί κανόνες που παρουσιάζει ο Πίνακας 2.

■

Πίνακας 3: Η λίστα των γεννητριών για το παράδειγμα 2.3.

Γεννήτρια	Κόστος εκκίνησης (€)	Οριακό κόστος (€/MWh)	Χωρητικότητα (MW)
Χαμηλού κόστος	500	0	20
Μέσου κόστους	1000	10	100
Υψηλού κόστους	2000	80	100

Παράδειγμα 2.3: Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει τρεις γεννήτριες με διαφορετικά τεχνικά και οικονομικά χαρακτηριστικά. Ο στόχος είναι να ικανοποιηθεί μια ζήτηση 200 MW με ελάχιστο κόστος. Κάθε γεννήτρια μπορεί να ενεργοποιηθεί με ένα ορισμένο κόστος εκκίνησης, και είναι απαραίτητο να ενεργοποιηθεί μια γεννήτρια προκειμένου να παράγει ισχύ. Η ισχύς που παράγει μια γεννήτρια δεν μπορεί να υπερβαίνει τη χωρητικότητα της γεννήτριας. Έστω p_i η ισχύς που παράγει η γεννήτρια i και u_i η δυαδική μεταβλητή που υποδεικνύει αν η γεννήτια i έχει ενεργοποιηθεί ή όχι. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\min 500 \cdot u_1 + 1000 \cdot u_2 + 10 \cdot p_2 + 2000 \cdot u_3 + 80 \cdot p_3$$

$$\text{s.t. } 0 \le p_1 \le 20 \cdot u_1$$

$$0 \le p_2 \le 100 \cdot u_2$$

$$0 \le p_3 \le 100 \cdot u_3$$

$$(\lambda): p_1 + p_2 + p_3 = 200, (2.2)$$

$$u_i \in \{0,1\}$$

Η δυϊκή συνάρτηση υπολογίζεται χαλαρώνοντας τον περιορισμό (2.2), και μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$g(\lambda) = \min 500 \cdot u_1 + 1000 \cdot u_2 + 10 \cdot p_2 + 2000 \cdot u_3 + 80 \cdot p_3 - \lambda \cdot (p_1 + p_2 + p_3 - 200)$$

$$\text{s.t.}\, p_1 \leq 20 \cdot u_1, p_2 \leq 100 \cdot u_2, p_3 \leq 100 \cdot u_3$$

$$p_i \geq 0, u_i \in \{0,1\}$$

Έχοντας χαλαρώσει τον περιπλέκοντα περιορισμό (2.2), ο υπολογισμός της δυϊκής συνάρτησης μπορεί να αποσυντεθεί σε ένα υποπρόβλημα ανά γεννήτρια:

$$g(\lambda) = g_1(\lambda) + g_2(\lambda) + g_3(\lambda) + 200 \cdot \lambda$$

όπου

$$g_1(\lambda) = \min\{500 \cdot u_1 - \lambda \cdot p_1, 0 \leq p_1 \leq 20 \cdot u_1, u_1 \in \{0,1\}\}$$

$$g_2(\lambda) = \min\{1000 \cdot u_2 + (10 - \lambda) \cdot p_2, 0 \leq p_2 \leq 100 \cdot u_2, u_2 \in \{0,1\}\}$$

$$g_3(\lambda) = \min\{2000 \cdot u_3 + (80 - \lambda) \cdot p_3, 0 \leq p_3 \leq 100 \cdot u_3, u_3 \in \{0,1\}\}$$

Εστιάζουμε στον υπολογισμό της συνάρτησης $g_1(\lambda)$. Για $\lambda \geq 25$, η βέλτιστη λύση είναι να ενεργοποιηθεί η γεννήτρια και να παράγει στο τεχνικό όριο ($u_1^* = 1, p_1^* = 20$). Για $\lambda < 25$ η γεννήτρια πρέπει να μείνει απενεργοποιημένη ($u_1^* = 0, p_1^* = 0$):

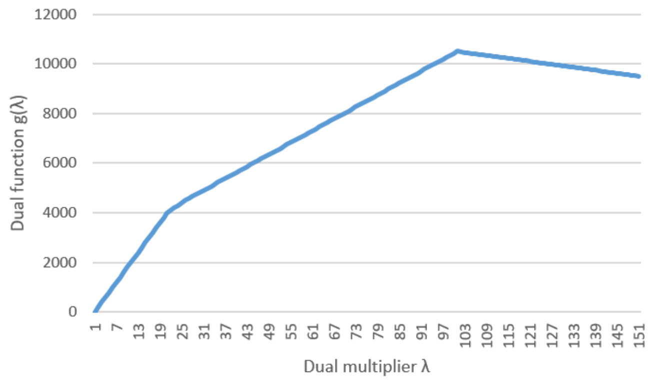
$$g_1(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \leq 25 \\ 500 - 20 \cdot \lambda, & \lambda > 25 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η $g_1(\lambda)$ είναι κοίλη συνάρτηση. Ακολουθώντας μια παρόμοια διαδικασία για την g_2 και g_3, η ακόλουθη έκφραση μπορεί να διατυπωθεί για τη συνάρτηση g:

$$g(\lambda) = \begin{cases} 200 \cdot \lambda, & \lambda \leq 20 \\ 2000 + 100 \cdot \lambda, & 20 < \lambda \leq 25 \\ 2500 + 80 \cdot \lambda, & 25 < \lambda \leq 100 \\ 12500 - 20 \cdot \lambda, & 100 < \lambda \end{cases}$$

Η συνάρτηση παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 6. Παρόλο που το πρωταρχικό πρόβλημα είναι μη κυρτό (λόγω των δυαδικών μεταβλητών u_i), η δυϊκή συνάρτηση είναι κοίλη συνάρτηση του λ. Η βέλτιστη λύση του πρωταρχικού προβλήματος έχει την πρώτη γεννήτρια εκτός λειτουργίας, $u^* = (0,1,1)$, και χρησιμοποιεί τις γεννήτριες 2 και 3 για την παραγωγή ισχύος, $p^* = (0,100,100)$, το οποίο οδηγεί σε κόστος $p^* = 12000$. Από το Σχήμα 6, η βέλτιστη δυϊκή αντικειμενική συνάρτηση είναι $d^* = 10500$. Η ισχυρή δυϊκότητα δεν ισχύει για αυτό το πρόβλημα.

Σχήμα 6: Η δυϊκή συνάρτηση g(λ) του παραδείγματος 2.3



■

2.2 Συνθήκες KKT

Η ενότητα αυτή εισάγει τις συνθήκες Karush Kuhn Tucker (KKT). Οι συνθήκες KKT είναι μαθηματικές συνθήκες οι οποίες χαρακτηρίζουν τη βέλτιστη λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης. Οι συνθήκες αυτές είναι το βασικό εργαλείο με το οποίο αναλύονται τα μοντέλα που παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια. Πριν προχωρήσουμε στη συζήτηση των συνθηκών KKT, ορίζουμε πρώτα το **τελεστή συμπληρωματικότητας**, ο οποίος υποδεικνύεται με το σύμβολο $\perp$. Δοθέντων δύο πραγματικών αριθμών $a, b \in \mathbb{R}$, η συνθήκη $a \perp b$ είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $a \cdot b = 0$. Ο τελεστής στην περίπτωση διανυσμάτων υποδεικνύει συμπληρωματικότητα ανά στοιχείο του διανύσματος: δοθέντων δύο διανσυμάτων $x, y \in \mathbb{R}^n$, το $x \perp y$ είναι ισοδύναμο με $x_i \cdot y_i = 0$ για $i = 1, \dots, n$. Τέλος, η ακόλουθη συντομογραφία χρησιμοποιείται όταν περιγράφουμε τις συνθήκες KKT: δοθέντων δύο διανσυμάτων $x, y \in \mathbb{R}^n$, το $0 \leq x \perp y \geq 0$ είναι ισοδύναμο με τις ακόλουθες τρεις συνθήκες: $x \geq 0, y \geq 0$ και $x \perp y$.

Θεωρούμε πάλι το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\min f_0(x)$$

$$\text{s.t.}\, x \in dom\, f_0 \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda_i): f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$$

$$(\nu_i): h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$$

Πρόταση 2.3: Έστω ότι ισχύει η ισχυρή δυϊκότητα με x^* βέλτιστο για το πρωταρχικό πρόβλημα, και λ^*, ν^* βέλτιστα για το δυϊκό πρόβλημα. Τότε:

- Το x^* ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση Lagrange $L(x, \lambda^*, \nu^*)$
- $\lambda_i^* \cdot f_i(x^*) = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$

Απόδειξη: Η ισχυρή δυϊκότητα συνεπάγεται ότι:

$$f_0(x^*) = g(\lambda^*, \nu^*) = \min_{x \in dom\, f_0}(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* h_i(x))$$

$$\leq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* h_i(x^*) \leq f_0(x^*)$$

Η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια της ισχυρής δυϊκότητας. Η δεύτερη ισότητα ισχύει εξ'ορισμού της δυϊκής συνάρτησης. Η πρώτη ανισότητα ισχύει επειδή το x^* δε μεγιστοποιεί απαραίτητα τη συνάρτηση Lagrange. Η δεύτερη ανισότητα ισχύει επειδή $h_i(x^*) = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, p$, $f_i(x^*) \leq 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$, και $\lambda_i^* \leq 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Εφόσον η αριστερή και η δεξιά πλευρά της παραπάνω αλυσίδας σχέσεων είναι ίσες, οι δύο παραπάνω ανισότητες ισχύουν ως ισότητες.

■

Ορισμός 2.4: Έστω ένα πρόβλημα με διαφορίσιμη αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμούς. Οι ακόλουθες τέσσερις συνθήκες ονομάζονται συνθήκες ΚΚΤ:

- Εφικτότητα του πρωταρχικού προβλήματος: $f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$
- Εφικτότητα του δυϊκού προβλήματος: $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m$
- Συμπληρωματικότητα της χαλάρωσης: $\lambda_i \cdot f_i(x) = 0, i = 1, \dots, m$
- Η παράγωγος της συνάρτησης Lagrange ως προς το x μηδενίζεται:

$$\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i \nabla h_i(x) = 0.$$

Η πρόταση 2.3 αποδεικνύει ότι οι συνθήκες ΚΚΤ είναι αναγκαίες για προβλήματα για τα οποία ισχύει η ισχυρή δυϊκότητα. Ωστόσο, εν γένει οι συνθήκες αυτές δεν είναι ικανές για να εγγυηθούν μια βέλτιστη λύση. Για κυρτά προβλήματα βελτιστοποίησης με διαφορίσιμες αντικειμενικές συναρτήσεις και περιορισμούς, οι συνθήκες ΚΚΤ είναι ικανές και επιπλέον εγγυώνται ότι το πρόβλημα έχει μηδαμινό κενό δυϊκότητας.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα παρέχει ένα χρήσιμο μνημονικό κανόνα για τη διατύπωση των συνθηκών ΚΚΤ ενός προβλήματος βελτιστοποίησης με γραμμικούς περιορισμούς.

Πρόταση 2.5: Έστω ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης με διαφορίσιμη αντικειμενική συνάρτηση f και γραμμικούς περιορισμούς:

$$\max f(x, y)$$

$$\text{s.t.}\ \ (\lambda): Ax + By \leq b$$

$$(\mu): Cx + Dy = d$$

$$(\lambda_2): x \geq 0$$

Οι συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος έχουν την εξής μορφή:

$$Cx + Dy - d = 0$$

$$0 \leq \lambda \perp Ax + By - b \leq 0$$

$$0 \leq x \perp \lambda^T A + \mu^T C - \nabla_x f(x, y)^T \geq 0$$

$$\lambda^T B + \mu^T D - \nabla_y f(x, y)^T = 0$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση Lagrange μπορεί να εκφραστεί ως

$$L(x, y, \lambda, \mu, \lambda_2) = f(x) + \lambda^T(b - Ax - By) + \mu^T(d - Cx - Dy) + \lambda_2^T x.$$

Προκειμένου η συνάρτηση Lagrange να είναι άνω όριο για τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, πρέπει να ισχύει ότι $\lambda, \lambda_2 \geq 0$. Αυτές είναι οι συνθήκες δυϊκής εφικτότητας. Οι συνθήκες συμπληρωματικότητας μπορούν να εκφραστούν ως:

$$\lambda^T(b - Ax - By) = 0 \Leftrightarrow \lambda \perp b - Ax - By$$

$$\lambda_2^T x = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 \perp x$$

Οι συνθήκες στασιμότητας εκφράζονται ως

$$\nabla_x L(x, y, \lambda, \mu, \lambda_2) = \nabla_x f(x, y)^T - \mu^T C - \lambda^T A + \lambda_2^T = 0$$

$$\nabla_y L(x, y, \lambda, \mu, \lambda_2) = \nabla_y f(x, y)^T - \mu^T D - \lambda^T B + \lambda_2^T = 0$$

Συνεπώς, οι συνθήκες στασιμότητας μπορούν να εκφραστούν ως

$$0 \leq \lambda \perp b - Ax - By \geq 0$$

$$Cx + Dy = d$$

$$0 \leq \lambda_2 \perp x \geq 0$$

$$\lambda_2^T = \lambda^T A + \mu^T C - \nabla_x f(x, y)^T$$

$$\lambda^T B + \mu^T D - \nabla_y f(x, y)^T = 0$$

Ισοδύναμα,

$$Cx + Dy = d$$

$$0 \leq \lambda \perp Ax + By - b \leq 0$$

$$0 \leq x \perp \lambda^T A + \mu^T C - \nabla_x f(x, y)^T \geq 0$$

$$\lambda^T B + \mu^T D - \nabla_y f(x, y)^T = 0$$

■

Παράδειγμα 2.4: Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα του παραδείγματος 2.3, όπου τα κόστη εκκίνησης αγνοούνται:

$$\min 10 \cdot p_2 + 80 \cdot p_3$$

$$\text{s.t.} (\mu_1): p_1 \leq 20$$

$$(\mu_2): p_2 \leq 100$$

$$(\mu_3): p_3 \leq 100$$

$$(\lambda): p_1 + p_2 + p_3 = 200$$

Οι συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος μπορούν να εκραστούν χρησιμοποιώντας τους μνημονικούς κανόνες της προηγούμενης πρότασης. Προκειμένου να εκφραστούν οι συνθήκες ΚΚΤ, είναι ευκολότερο να ξεκινήσουμε από τις ισότητες του πρωταρχικού προβλήματος:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 200 \tag{2.3}$$

Οι περιορισμοί ανισότητας επαναλαμβάνονται, και είναι συμπληρωματικοί προς τις αντίστοιχες μη αρνητικές δυϊκές μεταβλητές:

$$0 \leq \mu_1 \perp 20 - p_1 \geq 0 \tag{2.4}$$

$$0 \leq \mu_2 \perp 100 - p_2 \geq 0 \tag{2.5}$$

$$0 \leq \mu_3 \perp 100 - p_3 \geq 0 \tag{2.6}$$

Οι μη αρνητικές πρωταρχικές μεταβλητές εκφράζονται ως συμπληρωματικές προς μια *μη αρνητική* έκφραση η οποία μπορεί να εξαχθεί χρησιμοποιώντας το μνημονικό κανόνα της προηγούμενης πρότασης: (i) όποτε μια πρωταρχική μεταβλητή εμφανίζεται στην αντικειμενική συνάρτηση, *προσθέτουμε* το συντελεστή της (και *ελαχιστοποιούμε* σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης), και (ii) όποτε η πρωταρχική μεταβλητή εμφανίζεται σε ένα περιορισμό, προσθέτουμε το συντελεστή της στην έκφραση, τον οποίο πολλαπλασιάζουμε με τον αντίστοιχο δυϊκό συντελεστή:

$$0 \leq p_1 \perp \lambda + \mu_1 \geq 0 \tag{2.7}$$

$$0 \leq p_2 \perp 10 + \lambda + \mu_2 \geq 0 \tag{2.8}$$

$$0 \leq p_3 \perp 80 + \lambda + \mu_3 \geq 0 \tag{2.9}$$

Οι εξισώσεις (2.3) - (2.9) καθιστούν τις συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος βελτιστοποίησης. Σημειώνεται ότι οι τρεις τελευταίες συνθήκες μπορούν να αντικατασταθούν από τις ακόλουθες συνθήκες:

$$0 \leq p_1 \perp -\lambda + \mu_1 \geq 0 \tag{2.10}$$

$$0 \leq p_2 \perp 10 - \lambda + \mu_2 \geq 0 \tag{2.11}$$

$$0 \leq p_3 \perp 80 - \lambda + \mu_3 \geq 0 \tag{2.12}$$

εφόσον η εξίσωση (2.3) μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως $-p_1 - p_2 - p_3 = -200$. Η βέλτιστη πρωταρχική λύση του προβλήματος είναι $(p^*)^T = (20,100,80)$. Οι βέλτιστοι δυϊκοί πολλαπλασιαστές είναι ίσοι με $\lambda^* = 80$, $(\mu^*)^T = (80{,}70{,}0)$. Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει ότι τα διανύσματα ικανοποιούν τις εξισώσεις (2.3)- (2.6) και (2.10)- (2.13).

■

Σημειώνεται ότι, για πιο γενικά κυρτά προβλήματα βελτιστοποίησης όπου οι περιορισμοί και η αντικειμενική συνάρτηση είναι μη-διαφορίσιμα, τότε οι συνθήκες ΚΚΤ μπορούν να γενικευτούν αντικαθιστώντας τις παραγώγους της συνάρτησης Lagrange με τις υποπαραγώγους[4] (subgradients) στην τέταρτη συνθήκη ΚΚΤ. Αν ισχύει η ισχυρή δυϊκότητα για ένα πρόβλημα, τότε οι συνθήκες αυτές παραμένουν αναγκαίες και ικανές για μια βέλτιστη λύση.

2.3 Ευαισθησία

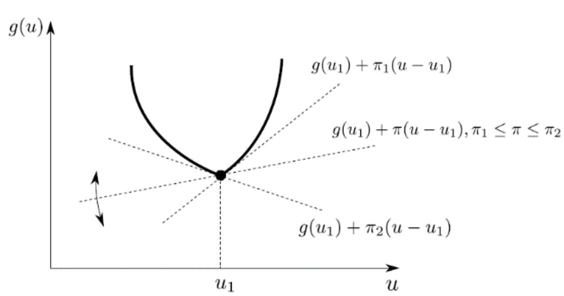
Μια σημαντική ιδιότητα των βέλτιστων δυϊκών μεταβλητών είναι ότι επιδέχονται ερμηνείας ως η ευαισθησία της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς μια μοναδιαία αλλαγή στη δεξιά πλευρά του περιορισμού στον οποίο αντιστοιχεί μια δυϊκή μεταβλητή. Το αποτέλεσμα αυτό εκφράζεται μαθηματικά στην πρόταση 2.8. Πριν διατυπώσουμε την πρόταση, είναι απαραίτητο να ορίσουμε τι νοείται ως “κλίση” μιας συνάρτησης όταν η συνάρτηση αυτή είναι μη διαφορίσιμη, εισάγωντας τις υποπαραγώγους.

Ορισμός 2.6: Έστω μια συνάρτηση g, το διάνυσμα π είναι μια υποπαράγωγος της g στο u αν

$$g(w) \geq g(u) + \pi^T(w-u) \text{ για όλα τα } w. \qquad (2.13)$$

Αν $g(w) \leq g(u) + \pi^T(w-u)$ για όλα τα w, τότε το π είναι **υπερπαράγωγος**.

Σχήμα 7: Έστω η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και παρατηρήστε ότι η συνάρτηση είναι μη διαφορίσιμη στο u_1. Τα διανύσματα π_1 και π_2 είναι και τα δύο υποπαράγωγοι στο u_1. Οποιαδήποτε γραμμή $y = g(u_1) + \pi(u - u_1)$ περνάει από το $(u_1, g(u_1))$ με κλίση $\pi \in \partial g(u_1)$ βρίσκεται κάτω από το $g(u)$ για όλα τα u, ενώ οποιαδήποτε γραμμή με διαφορετική κλίση περνάει πάνω από τη συνάρτηση $g(u)$ σε κάποιο σημείο. Το υποδιαφορικό είναι το σύνολο των υποπαραγώγων στο σημείο u_1 και συμβολίζεται ως $\partial g(u_1) = [\pi_1, \pi_2]$.



[4] Οι υποπαράγωγοι ορίζονται στην επόμενη ενότητα.

Η γεωμετρική ερμηνεία της υποπαραγώγου είναι ότι είναι διάνυσμα το οποίο ορίζει μια γραμμική υπο-προσέγγιση της συνάρτησης g, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7. Οι υποπαράγωγοι γενικεύουν την έννοια των παραγώγων για μη διαφορίσιμες συναρτήσεις. Οι υποπαράγωγοι είναι χρήσιμες για τη γενίκευση των συνθηκών ΚΚΤ στην περίπτωση μη διαφορίσιμων προβλημάτων βελτιστοποίησης, και επίσης για την εξαγωγή αποτελεσμάτων που σχετίζονται με την ευαισθησία.

Ορισμός 2.7: Το σύνολο των υποπαραγώγων της f στο u ονομάζεται **υποδιαφορικό** της g στο u, και συμβολίζεται ως $\partial \mathrm{g}(u)$.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 7, το σύνολο $\partial \mathrm{g}(u)$ είναι κλειστό και κυρτό. Όπως υποδεικνύει η διαίσθηση, αν μια συνάρτηση g είναι διαφορίσιμη σε ένα δεδομένο σημείο u, τότε $\partial \mathrm{g}(u) = \{\nabla g(u)\}$, δηλαδή το υποδιαφορικό αποτελείται από ένα μοναδικό στοιχείο, το οποίο είναι η παράγωγος της συνάρτησης στο δεδομένο σημείο. Είναι επίσης εύκολο να δείξει κανείς ότι, για κυρτές συναρτήσεις, $0 \in \partial \mathrm{g}(u)$ συνεπάγεται ότι το u είναι καθολικό ελάχιστο της g.

Ο ορισμός των υποπαραγώγων χρησιμεύει στην περιγραφή της κλίσης της ακόλουθης συνάρτησης:

$$c(u) = \min f_0(x)$$

$$\mathrm{s.t.}\, f_i(x) \leq u_i, i = 1, \dots, m$$

$$x \in dom\, f_0$$

Η συνάρτηση $c(u)$, η οποία συχνά αναφέρεται ως *συνάρτηση αξίας* ενός προβλήματος βελτιστοποίησης $\{\min f_0(x) : x \in dom\, f_0, f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$, έχει μια διαισθητική ερμηνεία. Δεδομένης μιας μικρής διαταραχής u στη δεξιά πλευρά των περιορισμών $f_i(x) \leq 0$, η συνάρτηση αξίας περιγράφει πώς επηρρεάζεται η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Συνεπώς, η κλίση της $c(u)$ στο $u = 0$ μπορεί να ερμηνευτεί ως η ευαισθησία της βέλτιστης τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης του αρχικού προβλήματος σε μια απειροελάχιστη διαταραχή της δεξιάς πλευράς των περιορισμών. Αποδεικνύεται ότι η ευαισθησία αυτή είναι ίση με τους δυϊκούς πολλαπλασιαστές του αρχικού προβλήματος, όπως αποδεικνύεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.8: Έστω $c(u)$ η συνάρτηση αξίας του ακόλουθου μαθηματικού προγράμματος:

$$c(u) = \min f_0(x)$$

$$\mathrm{s.t.}\, f_i(x) \leq u_i, i = 1, \dots, m$$

$$x \in dom\, f_0$$

και έστω ότι το σύνολο $dom\, f_0$ είναι κυρτό και ότι οι συναρτήσεις f_0, f_i είναι κυρτές.

- Η συνάρτηση $c(u)$ είναι κυρτή.
- Έστω ότι ισχύει η ισχυρή δυϊκότητα, και ας συμβολίσουμε ως λ^* το δυϊκό διάνυσμα που μεγιστοποιεί τη δυϊκή συνάρτηση $min_{x \in dom\, f_0}(f_0(x) - \lambda^T(f(x) - u))$ για $\lambda \leq 0$. Τότε $\lambda^* \in \partial c(u)$.

Απόδειξη: Για να δείξουμε ότι η $c(u)$ είναι κυρτή, έστω οποιαδήποτε u_1, u_2, και ας συμβολίσουμε ως x_1, x_2 τις βέλτιστες λύσεις της μεγιστοποίησης της συνάρτησης Lagrange όταν χρησιμοποιούμε τα u_1, u_2 στη δεξιά πλευρά του τροποποιημένου προβλήματος. Παρομοίως, έστω $\alpha \in [0,1]$ και ας συμβολίσουμε ως x_α τη βέλτιστη λύση της μεγιστοποίησης της συνάρτησης Lagrange όταν χρησιμοποιούμε το $au_1 + (1-a)u_2$ ως δεξιά πλευρά των περιορισμών στο τροποποιημένο πρόβλημα. Εφόσον $f_i(x_1) \leq u_{1,\iota}$ και $f_i(x_2) \leq u_{2,\iota}$, το γεγονός ότι η f_i είναι κυρτή συνεπάγεται ότι $f_i(ax_1 + (1-a)x_2) \leq au_1 + (1-a)u_2$. Εφόσον το σύνολο $dom\ f_0$ είναι κυρτό, συνεπάγεται ότι το διάνυσμα $ax_1 + (1-a)x_2$ είναι εφικτή λύση όταν η δεξιά πλευρά του αρχικού προβλήματος είναι $au_1 + (1-a)u_2$. Δεδομένου ότι το x_α είναι βέλτιστο ως προς τη δεξιά πλευρά $au_1 + (1-a)u_2$, συμπεραίνουμε ότι $f_0(x_\alpha) \leq f_0(ax_1 + (1-a)x_2)$. Και εφόσον η f_0 είναι κυρτή, έχουμε ότι $c(au_1 + (1-a)u_2) \leq ac(u_1) + (1-a)c(u_2)$.

Έστω οποιοδήποτε $\bar{u}$, και συμβολίζουμε ως $\bar{x}$ τη βέλτιστη λύση ως προς $\bar{u}$. Συμβολίζουμε επίσης ως $x^* \in \arg\min_{x \in dom\ f_0}(f_0(x) - (\lambda^*)^T(f(x) - u))$. Ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$c(u) = f_0(x^*) - (\lambda^*)^T(f(x^*) - u) \leq$$

$$f_0(\bar{x}) - (\lambda^*)^T(f(\bar{x}) - u) =$$

$$f_0(\bar{x}) - (\lambda^*)^T(f(\bar{x}) - \bar{u}) - (\lambda^*)^T(\bar{u} - u) \leq$$

$$f_0(\bar{x}) - (\lambda^*)^T(f(\bar{x}) - \bar{u}) =$$

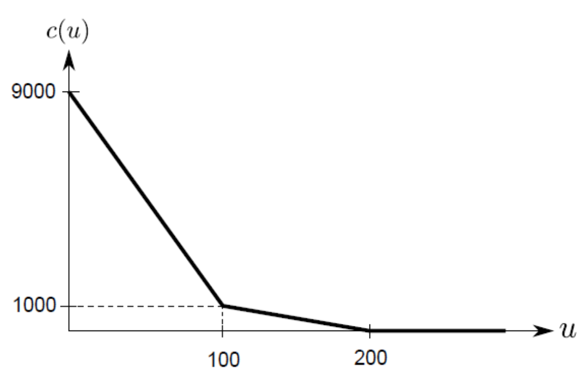
$$c(u) - (\lambda^*)^T(\bar{u} - u)$$

Η πρώτη σχέση ισχύει λόγω ισχυρής δυϊκότητας, η δεύτερη σχέση ισχύει λόγω του ορισμού του x^*, η τέταρτη σχέση ισχύει επειδή $f(\bar{x}) \leq \bar{u}$ και $\lambda^* \leq 0$, και η τελευταία σχέση ισχύει εξ'ορισμού του $\bar{x}$.

■

Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει πως η συνάρτηση $c(u)$ είναι κυρτή σε ένα απλό μαθηματικό πρόγραμμα.

Σχήμα 8: Γραφική αναπαράσταση του βέλτιστου κόστους $c(u)$ ως συνάρτηση της χωρητικότητας u της γεννήτριας 1 στο παράδειγμα 2.5.



Παράδειγμα 2.5: Έστω το πρόβλημα του παραδείγματος 2.4. Η βέλτιστη τιμή του προβλήματος ως συνάρτηση της χωρητικότητας της γεννήτριας 1 μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί αν παρατηρήσουμε ότι, στη βέλτιστη λύση, η γεννήτρια 1 χρησιμοποιείται στο μέγιστο δυνατό βαθμό, ακολουθούμενη από τη γεννήτρια 2, ακολουθούμενη από τη γεννήτρια 3. Εφόσον η χωρητικότητα της γεννήτριας 1 δεν ξεπερνά τα 100 MW, η γεννήτρια 2 χρησιμοποιείται πλήρως και η γεννήτρια 3 χρησιμοποιείται το ελάχιστο δυνατό. Συνεπώς, για χωρητικότητα της γεννήτριας 1 στην περιοχή $0 \leq u \leq 100$, έχουμε $c(u) = 10 \cdot 100 + 80 \cdot (100 - u)$. Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό, η ακόλουθη έκφραση μπορεί να εξαχθεί για τη συνάρτηση $c(u)$:

$$c(u) = \begin{cases} 9000 - 80 \cdot u, & 0 \leq u < 100 \\ 2000 - 10 \cdot u, & 100 \leq u < 200 \\ 0, & 200 \leq u \end{cases}$$

Η συνάρτηση $c(u)$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 8, και είναι κυρτή, όπως προβλέπει η θεωρία.

■

Παρατηρούμε ότι αν η συνάρτηση $c(u)$ είναι διαφορίσιμη σε ένα δεδομένο σημείο u, τότε ο δυϊκός πολλαπλασιαστής λ_i ενός ορισμένου περιορισμού είναι ίσος με $\nabla_{u_i} c(u)$, συνεπώς το λ_i είναι ίσο με την *ευαισθησία* της αντικειμενικής συνάρτησης $c(u)$ ως προς μια οριακή αλλαγή στη δεξιά πλευρά του περιορισμού που αντιστοιχεί στο λ_i.

Παράδειγμα 2.6: Υπενθυμίζουμε τη λύση των συνθηκών ΚΚΤ του παραδείγματος 2.4 (εξισώσεις (2.3)-(2.6) και (2.10)-(2.12)): $(p^*)^T = (20,100,80), \lambda^* = 80, (\mu^*)^T = (80,70,10)$. Η τιμή του λ^* έχει την εξής ερμηνεία ως ευαισθησία: αν η δεξιά πλευρά του αντίστοιχου περιορισμού, $p_1 + p_2 + p_3 = 200$, αυξηθεί κατά μία μονάδα, τότε αυτό είναι ισοδύναμο με το να πρέπει να ικανοποιηθεί μία ακόμη μονάδα ζήτησης. Εφόσον η μόνη γεννήτρια που μπορεί να αυξήσει την παραγωγή της ως απόκριση σε μια αύξηση της ζήτησης είναι η γεννήτρια 3, το επιπλέον κόστος που επιβάλλεται στο σύστημα είναι 80 €, που είναι ακριβώς η τιμή της λ^*. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος μπορούν επίσης να εκφραστούν χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.3)-(2.9), στην οποία περίπτωση η λύση του συστήματος ΚΚΤ είναι $(p^*)^T = (20,100,80), \lambda^* = -80, (\mu^*)^T = (80,70,10)$. Υπογραμμίζουμε την αλλαγή στο πρόσημο του λ^*.

■

Το προηγούμενο παράδειγμα υπογραμμίζει πως ο βέλτιστος δυϊκός πολλαπλασιαστής μπορεί να είναι ίσος με την ευαισθησία, ή το αρνητικό της ευαισθησίας, της συνάρτησης αξίας. Ως γενικός κανόνας (και όπως διαφαίνεται από την απόδειξη της πρότασης 2.8), το αν ο πολλαπλασιαστής Lagrange είναι ίσος με την ευαισθησία, ή το αρνητικό της ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ενός προβλήματος βελτιστοποίησης εξαρτάται από το πώς κατασκευάζεται η συνάρτηση Lagrange του προβλήματος. Αν ο περιορισμός $f_i(x) \leq 0$ (παρομοίως για $h_i(x) = 0$) χαλαρώνεται *αφαιρώντας* τον από τη σταθμισμένη παραβίαση του περιορισμού (δηλαδή αν η συνάρτηση Lagrange έχει τη μορφή $L(x, \lambda) = f_0(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x)$) τότε ο βέλτιστος δυϊκός πολλαπλασιαστής είναι ίσος με την ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης. Αν, κατ'αντίθεση, η σταθμισμένη παραβίαση *προστεθεί* στην αντικειμενική συνάρτηση (δηλαδή $L(x, \lambda) = f_0(x) +$

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x)$), τότε ο βέλτιστος δυϊκός πολλαπλασιαστής είναι ίσος με το αρνητικό της ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης.

Προβλήματα

2.1 Αποδείξτε ότι για κυρτά προβλήματα βελτιστοποίησης με διαφορίσιμη αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμούς, οι συνθήκες ΚΚΤ είναι ικανές, και εγγυώνται ότι τοπρόβλημα έχει μηδαμινό κενό δυϊκότητας.

2.2 Στο πρόβλημα μεγιστοποίησης της πρότασης 2.5, οι δυϊκοί πολλαπλασιαστές μ είναι (αποδείξτε τον ισχυρισμό σας):

1. ίσοι με την ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τη δεξιά πλευρά των περιορισμών $Cx - d = 0$.

2. ίσοι με την ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τη δεξιά πλευρά των περιορισμών $d - Cx = 0$.

Οι δυϊκοί πολλαπλασιαστές είναιν (αποδείξτε τον ισχυρισμό σας):

1. ίσοι με την ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης στη δεξιά πλευρά των περιορισμών $Ax - b \leq 0$

2. ίσοι με την ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης στη δεξιά πλευρά των περιορισμών $b - Ax \leq 0$

2.3 Έστω το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\max x + 2y$$

$$(\lambda_1): x \geq 0$$

$$(\lambda_2): x \leq 2$$

$$(\mu): -y = -1$$

Ποιες είναι οι συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος; Ποια είναι η λύση των συνθηκών ΚΚΤ;

2.4 Έστω το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\max f_0(x)$$

$$f(x) \leq 0$$

$$h(x) = 0$$

όπου $x \in dom\, f_0$. Ας θεωρήσουμε την ακόλουθη συνάρτηση Lagrange:

$$L(x,u,v) = f_0(x) - u^T f(x) - v^T h(x)$$

και τη σχετική δυϊκή συνάρτηση $g(u,v) = sup_{x \in dom\, f_0} L(x,u,v)$. Τότε, αν

$$x^* \in \arg\max L(x,u,v)$$

ισχύει ότι $(-f(x^*), -h(x^*)) \in \partial g(u,v)$.

2.5 Αποδείξτε την πρόταση 2.5 για την πιο γενική περίπτωση όπου οι ανισότητες $Ax + By \leq b$ αντικαθίστανται από τις ανισότητες $g_i(x,y) \leq 0$, όπου g_i κυρτές συναρτήσεις.

Βιβλιογραφία

Κεφάλαια 2.1, 2.2, 2.3.

Το υλικό που σχετίζεται με τη δυϊκότητα είναι βασισμένο στο (Boyd & Vandenberghe, 2008).

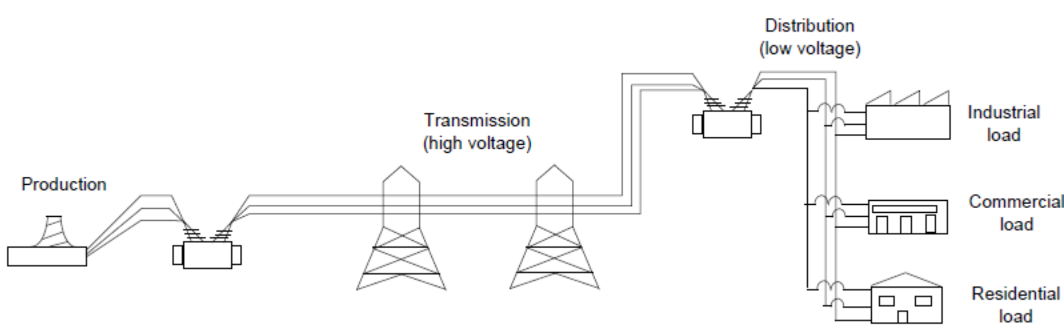
3. Λειτουργία συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας και αγορών ηλεκτρικής ενέργειας

Η ανάπτυξη μοντέλων αγορών ηλεκτρικής ενέργειας προϋποθέτει μια κατανόηση των αρχών μηχανικής που διέπουν τη λειτουργία των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας, καθώς και της θεσμικής οργάνωσης των αγορών ηλεκτρισμού . Οι αγορές ηλεκτρικής ενέργειας έχουν ορισμένα μοναδικά χαρακτηριστικά τα οποία οδηγούν σε μια ισχυρή σύνδεση μεταξύ της λειτουργίας του συστήματος ηλεκτρισμού και της αγορά ηλεκτρισμού, σε αντίθεση με πολλές άλλες αγορές αγαθών, όπου η φυσική πράξη της ανταλλαγής αγαθών μπορεί να έχει μια χαλαρή σχέση με τις χρηματοοικονομικές συναλλαγές που διέπουν την αγοραπωλησία αυτών των αγαθών. Μοναδικά χαρακτηριστικά των αγορών ηλεκτρισμού που καθιστούν αναγκαίο το στενό συντονισμό μεταξύ φυσικής λειτουργίας και συναλλαγών στην αγορά συμπεριλαμβάνουν το γεγονός ότι οι καταναλωτές σε μεγάλο βαθμό δεν ανταποκρίνονται στην τιμή του ηλεκτρισμού, το γεγονός ότι η δυνατότητα αποθήκευσης είναι περιορισμένη, το γεγονός ότι η παραγωγή και η κατανάλωση πρέπει να εξισορροπούνται σε στιγμιαία βάση, και το γεγονός ότι ο φυσικός αποκλεισμός των καταναλωτών από την πρόσβαση στην κατανάλωση είναι σε μεγάλο βαθμό ανέφικτος. Οι παράγοντες αυτοί περιπλέκουν το σχεδιασμό των αγορών ηλεκτρισμού με τρόπους που διασαφηνίζονται στη συνέχεια. Η ενότητα 3.1 παρέχει μια επισκόπηση της λειτουργίας των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας, ενώ η ενότητα 3.2 παρέχει μια επισκόπηση των αγορών ηλεκτρισμού.

3.1 Λειτουργία συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας

Τα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας είναι σύνθετες εφοδιαστικές αλυσίδες που χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας. Η τυπική δομή ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας παρουδιάζεται στο Σχήμα 9. Η δομή αυτή αποτελείται από την παραγωγή, το σύστημα μεταφοράς υψηλής τάσης, το σύστημα μεταφοράς μέσης και χαμηλής τάσης, και την κατανάλωση. Οι καταναλωτές κατά κανόνα εντάσσονται σε τρεις κατηγορίες: βιομηχανικοί, εμπορικοί και οικιακοί. Οι ακόλουθες παράγραφοι παρέχουν μια σύνοψη των βασικών χαρακτηριστικών κάθε μέρους της εφοδιαστικής αλυσίδας, συμπεριλαμβανομένων τεχνικών και οικονομικών χαρακτηριστικών.

Σχήμα 9: Ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας αποτελείται από τους τομείς παραγωγής, μεταφοράς, διανομής, και κατανάλωσης.



3.1.1 Παραγωγή

Η ηλεκτρική ενέργεια παράγεται με διάφορους τρόπους. Ο πιο συνήθης τρόπος παραγωγής από μη ανανεώσιμες πηγές είναι (i) η καύση ορυκτών καυσίμων (όπως άνθρακας, πετρέλαιο και φυσικό αέριο) και η μετατροπή της θερμότητας που παράγεται σε ηλεκτρική ενέργεια μέσω μιας ηλεκτρομηχανικής γεννήτριας, και (ii) η σχάση ουρανίου και μετατροπή της θερμότητας που παράγεται σε ηλεκτρική ενέργεια μέσω ατμοστροβίλων. Οι πιο συνήθεις μορφές παραγωγής από ανανεώσιμες πηγές ενέργειας συμπεριλαμβάνουν (iii) τη μετατροπή της δυναμικής ενέργειας του ύδατος από ποταμούς και φράγματα σε ηλεκτρική ενέργεια μέσω υδροτουρμπινών, (iv) τη μετατροπή της γεωθερμίας σε ηλεκτρική ενέργεια μέσω ατμοστροβίλων, (v) τη μετατροπή της κινητικής ενέργειας του ανέμου σε ηλεκτρική ενέργεια μέσω ηλεκτρομηχανικών τουρμπινών, (vi) τη μετατροπή της ηλιακής ηλεκτρομαγνητικής ενέγειας σε ηλεκτρική ενέργεια μέσω ηλιακών πανέλων, (vii) τη μετατροπή της χημικής ενέργειας της βιομάζας σε ηλεκτρική ενέργεια μέσω τουρμπινών καύσης, και (viii) ορισμένες μορφές ανανεώσιμεων πηγών ενέργειας (όπως κυματική και παλιρροιακή) με οριακή συνεισφορά στα υπάρχοντα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας.

Πίνακας 4: Συνήθεις μετατροπές μονάδων μέτρησης ενέργειας

1 megajoule	238.8 kilocalories 947.8 Btu 0.278 kilowatt hours
1 kilocalorie	3.968 Btu
1 kilowatt hour	359.8 kilocalories 3411 Btu
1 million Btu	1055 megajoules 2520 megacalories 293.1 kilowatt hours

Η ενέργεια μετράται με μια ποικιλία από μονάδες μέτρησης, συμπεριλαμβανομένων των Joules, θερμιδών, βαττωρών, και της Βρετανικής θερμικής μονάδας (British thermal unit, Btu). Ο Πίνακας 4 παρουσιάζει ορισμένες μετατροπές ανάμεσα σε μονάδες που απαντώνται συχνά στην πράξη. Η πιο διαδεδομένη μονάδα μέτρησης της ηλεκτρικής ενέργειας είναι η μεγαβαττώρα, που συμβολίζεται ως MWh, και τα εκατομμύρια Btu (million Btu), που συμβολίζονται ως MMBtu.

Ο ρυθμός αλλαγής της ενέργειας μετράται από την ισχύ. Η ισχύς μπορεί να μετρά το ρυθμό παραγωγής ενέργειας, κατανάλωσης ενέργειας, ή ροής ενέργειας. Η πιο κοινή μονάδα μέτρησης της ισχύος είναι το megawatt, το οποίο απεικονίζεται ως MW. Μία megawatt ώρα αντιστοιχεί στην ποσότητα ενέργειας η οποία συγκεντρώνεται από τη ροή ενός megawatt για μία ώρα. Είναι σημαντικό να υπογραμμιστεί πως η παραγωγή των γεννητριών σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μετράται σε MW, όχι MWh.

Οι μονάδες παραγωγής χρειάζεται να υπακούν ένα εύρος λειτουργικών περιορισμών οι οποίοι αναπτύσσονται λεπτομερώς στο κείμενο. Οι περιορισμοί χωρητικότητας περιορίζουν το μέγιστο ρυθμό με τον οποίο μια γεννήτρια μπορεί να παράγει ισχύ. Οι θερμικές μονάδες ικανοποιούν περιορισμούς τεχνικού ελαχίστου, περιορισμούς ράμπας, και ελάχιστους χρόνους εντός και εκτός λειτουργίας. Οι υδροηλεκτρικές γεννήτριες υπακούουν περιορισμούς χωρητικότητας οι οποίοι περιορίζουν την ισχύ που μπορούν να παράγουν. Τα υδροηλεκτρικά φράγματα υπακούουν περιορισμούς αποθήκευσης οι οποίοι περιορίζουν τη συνολική ποσότητα νερού (και άρα ενέργειας) που μπορούν να αποθηκεύσουν. Πλήθος περιορισμών σχετίζονται με τα επίπεδα νερού στα υδροηλεκτρικά φράγματα. Η ροή νερού σε ένα δίκτυο ποταμών επίσης δημιουργεί αλληλεξαρτήσεις στη λειτουργία υδροηλεκτρικών φραγμάτων τα οποία λειτουργούν σε ακολουθία.

Τα κόστη παραγωγής αναπτύσσονται λεπτομερέστερα σε επόμενο κεφάλαιο. Στο στάδιο αυτό εστιάζουμε στη διαφορά μεταξύ μεταβλητού κόστους/λειτουργικού κόστους/κόστους καυσίμου (όλα συνώνυμα), οριακού κόστους, μέσου κόστους, και πάγιου κόστους / κόστους επένδυσης (επίσης συνώνυμα).

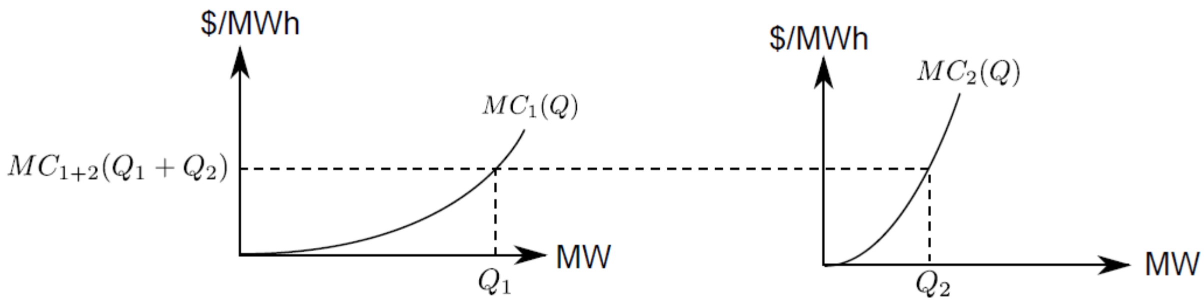
Το **μεταβλητό κόστος** / **κόστος λειτουργίας** / **κόστος καυσίμου** είναι το κόστος που εξαρτάται από την ποσότητα ισχύος που παράγει μια μονάδα. Το κόστος καυσίμου μετράται σε €/ώρα και εκφράζει το ωριαίο κόστος που απατείται για να παραχθεί μια ορισμένη ποσότητα ισχύος.

Το **οριακό κόστος** είναι η παράγωγος του μεταβλητού κόστους ως προς την ποσότητα ισχύος που παράγεται, και μετράται σε €/MWh. Αν το κόστος καυσίμου δεν είναι παραγωγίσιμο αλλά είναι συνεχής συνάρτηση, μπορεί κανείς να ορίσει το το κάτω και το άνω οριακό κόστος, καθώς και το εύρος οριακού κόστους. Το **εξ'αριστερών οριακό κόστος** είναι η οικονομία που επιτυγχάνεται από το να παραχθεί μία λιγότερη μονάδα ισχύος (ισοδύναμα, είναι η εξ'αριστερών παράγωγος του κόστους καυσίμου). Το εκ δεξιών οριακό κόστος είναι το επιπλέον κόστος που απαιτείται για να παραχθεί μία επιπλέον μονάδα ισχύος (ισοδύναμα, η εκ δεξιών παράγωγος του κόστους καυσίμου). Όταν μια μονάδα παραγωγής παράγει στην ονομαστική της χωρητικότητα, το εκ δεξιών οριακό κόοτος είναι ίσο με το άπρειρο. Το **εύρος οριακού κόστους** είναι το σύνολο τιμών μεταξύ και συμπεριλαμβανομένων του εξ'αριστερών και εκ δεξιών οριακού κόστους.

Όταν εξετάζεται ένα σύνολο γεννητριών, το **αθροιστικό μεταβλητό κόστος** ορίζεται ως ο φθηνότερος τρόπος που μπορεί να παραχθεί μια ορισμένη ποσότητα ισχύος από ένα σύνολο γεννητριών. Οι παραπάνω ορισμοί παρουσιάζονται στο παράδειγμα 3.1, και ορίζονται μαθηματικά στο κεφάλαιο 4.2. Η **αθροιστική συνάρτηση οριακού κόστους** είναι η παράγωγος του αθροιστικού κόστους, και εξάγεται από την παράθεση των γεννητριών σε σειρά αυξανόμενου οριακού κόστους μιας και αυτός είναι ο πιο αποδοτικός τρόπος για να παραχθεί μια ορισμένη ποσότητα ισχύος από το σύνολο των μονάδων παραγωγής.

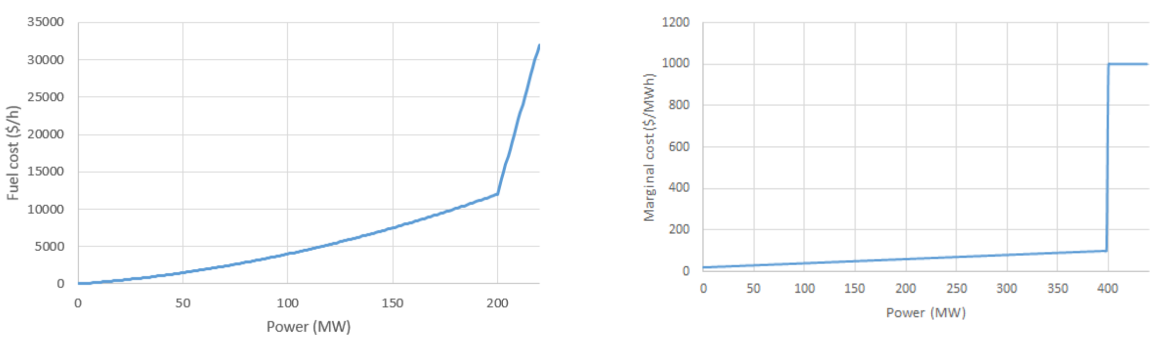
Η καμπύλη οριακού κόστους ολόκληρου του συστήματος εξάγεται από την οριζόντια πρόσθεση των καμπυλών οριακού κόστους όλων των γεννητριών του συστήματος. Αυτό παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 10. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **καμπύλη σειράς κατά αξία** (merit order curve), γιατί καθορίζει τη σειρά των μονάδων βάσει της αξίας τους για το σύστημα, δηλαδή τη σειρά με την οποία πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι γεννήτριες για να καλύψουν τη ζήτηση σε ελάχιστο κόστος.

Σχήμα 10: Η άθροιση συναρτήσεων οριακού κόστους μεμονομένων γεννητριών: το $MC_i(Q), i = 1,2$ είναι η συνάρτηση οριακού κόστους των γεννητριών 1 και 2, το $MC_{1+2}(Q)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση οριακού κόστους.



Παράδειγμα 3.1: Έστω μια γεννήτρια φυσικού αερίου η οποία έχει κόστος καυσίμου που είναι τετραγωνική συνάρτηση σε ένα φυσιολογικό εύρος λειτουργίας 0-200 MW. Το οριακό κόστος της μονάδας είναι 20 €/MWh στα 0 MW και 100 €/MWh στα 200 MW. Το οριακό κόστος είναι σταθερό και ίσο με 1000 €/MWh πέρα από τα 200 MW λόγω φόρτισης της γεννήτριας. Η μονάδα δεν μπορεί να παράγει περισσότερο από 220 MW. Το κόστος καυσίμου έιναι 0 €/h όταν η γεννήτρια δεν παράγει ισχύ. Το οριακό κόστος της γεννήτριας παρουσιάζεται στο Σχήμα 11. Το εύρος οριακού κόστους στα 200 MW είναι [100, 1000] €/MWh. Το εύρος οριακού κόστους στα 220 MW είναι [1000, +∞] €/MWh.

Σχήμα 11: Αριστερό γράφημα: μεταβλητό κόστος στο παράδειγμα 3.1. Δεξί γράφημα: το οριακό κόστος δύο πανομοιότυπων γεννητριών, των οποίων το οριακό κόστος δίνεται στο αριστερό γράφημα. Η αθροιστική καμπύλη οριακού κόστους δίνεται ως το οριζόντιο άθροισμα των καμπυλών οριακού κόστους της κάθε γεννήτριας.



Παράδειγμα 3.2: Έστω δύο πανομοιότυπες μονάδες παραγωγής των οποίων η καμπύλη οριακού κόστους περιγράφεται στο παράδειγμα 3.1. Η αθροιστική καμπύλη οριακού κόστους και των δύο μονάδων παρουσιάζεται στο Σχήμα 11.

■

Το πάγιο κόστος / κόστος επένδυσης είναι το κόστος κεφαλαίου που απαιτείται για να κατασκευαστεί μια μονάδα παραγωγής. Το κόστος επένδυσης διαφορετικών τεχνολογιών δηλώνεται συχνά ως ένα εφάπαξ κόστος σε €/kW ή κάποια άλλη μονάδα μέτρησης κόστους ανά μονάδα χωρητικότητας. Το **εφάπαξ κόστος** είναι το κόστος που χρειάζεται να πληρωθεί μπροστά για να κατασκευαστεί μια μονάδα. Για παράδειγμα, το εφάπαξ κόστος μιας μονάδας άνθρακα μπορεί να είναι 1000 €/kW, που συνεπάγεται ότι μια μονάδα χωρητικότητας 200 MW χρειάζεται 200 εκατομμύρια € για να κατασκευαστεί.

Είναι χρήσιμο να μετατραπεί το εφάπαξ κόστος σε μια συνεχή χρηματορροή η οποία είναι απαραίτητη για να αποπληρωθεί η επένδυση. Η μετατροπή αυτή πρέπει να λάβει υπόψη τη χρονική αξία κεφαλαίου μέσω ενός επιτοκίου. Για μια τεχνολογία με διάρκεια ζώης T έτη, ένα εφάπαξ κόστος OC και δεδομένου ενός επιτοκίου r, το **αποσβεσμένο πάγιο κόστος** cost επένδυσης, δεδομένου ετήσιου ανατοκισμού, δίνεται ως

$$FC = \frac{r \cdot OC}{1 - 1/(1+r)^T}.$$

Με συνεχή ανατοκισμό, το αποσβεσμένο πάγιο κόστος είναι

$$FC = \frac{r \cdot OC}{1 - e^{-rT}}. \tag{3.1}$$

Το FC αντιπροσωπεύει μια χρηματορροή, και μετριέται σε €/kW-έτος όταν το εφάπαξ κόστος εκφράζεται σε in €/kW. Αυτό είναι ένα συνολικό ποσό που πρέπει να πληρώσει ο επενδυτής ετησίως για να έχει διαθέσιμο 1 kW ορισμένης τεχνολογίας. Μπορούμε να το μετατρέψουμε σε ωριαία χρηματορροή για να έχουμε 1 MW της τεχνολογίας διαθέσιμο αν διαιρέσουμε με 8.76. Αυτό δίνει το FC εκφρασμένο σε €/MWh, τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται κατά κανόνα και για το οριακό κόστος.

Παράδειγμα 3.3: Έστω μια τουρμπίνα φυσικού αερίου με ένα εφάπαξ κόστος 400 €/kW και διάρκεια ζωής 25 έτη, και μια μονάδα άνθρακα με εφάπαξ κόστος 1200 €/kW και διάρκεια ζωής 45 έτη. Η εξίσωση συνεχούς ανατοκισμού (3.1) με ένα επιτόκιο $r = 12\%$ μετατρέπει το εφάπαξ κόστος σε μια ετήσια πλρωμή ανά kW χωρητικότητα (€/kW-έτος). Διαιρώντας με by 8.76 υπολογίζουμε το κόστος ανά ώρα ανά MW χωρητικότητας (€/MWh). Ο Πίνακας 5παρουσιάζει τα αποτελέσματα.

Πίνακας 5: Μετατροπή του εφάπαξ κόστους σε ωριαία πληρωμή για το παράδειγμα 3.3.

	OC (€/kw)	FC (€/kW-έτος)	FC (€/MWh)
Φυσικό αέριο	400	50.5	5.8
Άνθρακας	1200	144.7	16.5

■

Οι τεχνολογίες παραγωγής χαρακτηρίζονται από οριακά κόστη και κόστη επένδυσης. Ο στόχος της παραπάνω μετατροπής του εφάπαξ κόστους σε ωριαίες πληρωμές είναι να είναι εφικτή η σύγκριση των δύο πηγών κόστους με ίσους όρους. Μια τεχνολογία η οποία είναι ανταγωνιστική κατά κανόνα δεν κυριαρχείται, υπό την έννοια ότι, δεδομένων δύο τεχνολογιών, αν η μία έχει υψηλότερο πάγιο κόστος τότε πρέπει να έχει χαμηλότερο οριακό κόστος, αλλιώς δε θα ήταν καν υποψήφια προς επένδυση.

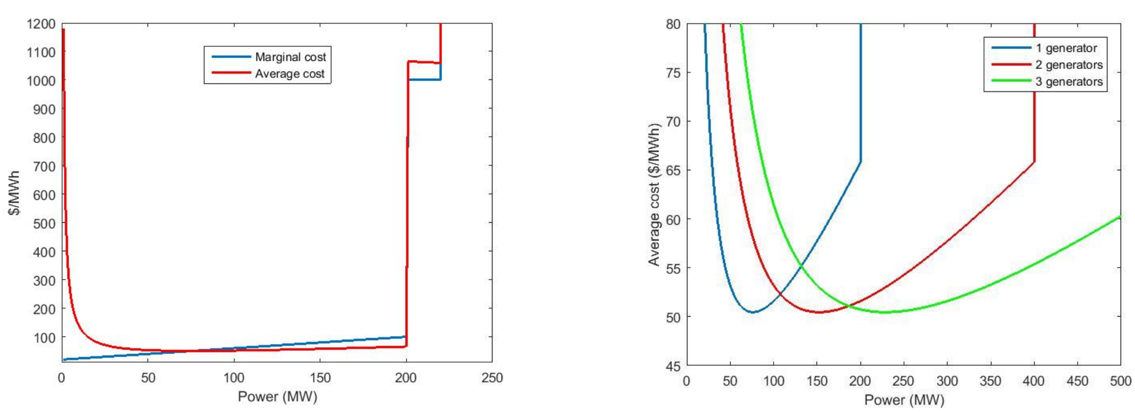
Το μέσο κόστος είναι το συνολικό (μεταβλητό συν πάγιο) κόστος ανά μονάδα παραγωγής. Οι ορισμοί του κόστους καυσίμου, μεταβλητού κόστους και μέσου κόστους γενικεύονται στην περίπτωση μιας εταιρείας η οποία αναζητά να παράγει σε ελάχιστο κόστος. Στην περίπτωση αυτή, το μέσο κόστος επηρρεάζει το αν και κατά πόσο ένας κλάδος είναι φυσικό μονοπώλιο ή όχι. Φθίνον μέσο κόστος συνεπάγεται ότι μπορεί να αναπτυχθεί ένας ανταγωνιστικός κλάδος (υπό την έννοια ότι μπορεί να υπάρξει ένας μεγάλος *αριθμός* εταιρειών οι οποίες να ανταγωνίζονται), ενώ αύξον μέσο κόστος συνεπάγεται πως ένας κλάδος είναι φυσικό μονοπώλιο. Μέχρι πρόσφατα, οι αγορές ηλεκτρικής ενέργειας χαρακτηρίζονταν ως φυσικά μονοπώλια (αν και αυτό αλλάζει, λόγω αλλαγών στο κόστος διαφόρων τεχνολογιών, καθώς και μια μεταμόρφωση της ζήτησης του κλάδου της ηλεκτρικής ενέργειας). Αυτό σημαίνει πως το μέσο κόστος της παροχής ηλεκτρικής ενέργειας μειώνεται όσο αυξάνει το μέγεθος μιας επχείρησης λόγω οικονομιών κλίμακας, ενώ η ζήτηση αυξάνεται σε ρυθμό μικρότερο του επιπέδου στο οποίο οι οικονομίες κλίμακας υλοποιούνται. Οι οικονομίες κλίμακας είναι εύλογες για ορισμένες τεχνολογίες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Για παράδειγμα, είναι πολύ φθηνότερο να κατασκευάσει κανείς μία μοναδική πυρηνική μονάδα δυναμικότητας 2000 MW αντί 10 πυρηνικών μονάδων δυναμικότητας 200 MW η κάθε μία. Αν, τότε, η ζήτηση του συστήματος είναι συγκρίσιμη με το μέγεθος της πυρηνικής μονάδας, τότε το σύστημα είναι φυσικό μονοπώλιο γιατί οι μικρότερες επιχειρήσεις δεν είναι σε θέση να λειτουργήσουν σε χαμηλότερο κόστος από τη μεγαλύτερη επιχείρηση, και οποιαδήποτε απόπειρα μιας επιχείρησης να εισέλθει σε αυτήν την αγορά θα οδηγήσει στην εξαφάνισή της. Αν, απεναντίας, η ζήτηση στο σύστημα αυξάνεται με ρυθμό σημαντικά μεγαλύτερο από το επίπεδο στο οποίο πραγματοποιούνται οι σημαντικότερες οικονομίες κλίμακας, τότε είναι εφικτό για επιπλέον επιχειρήσεις να επιβιώσουν όταν εισέλθουν σε αυτήν την αγορά.

Παράδειγμα 3.4: Έστω ότι οι τεχνολογίες ενός συστήματος χαρακτηρίζονται από ένα πάγιο κόστος 5.8 €/MWh, ότι κατασκευάζονται σε κομμάτια των 200 MW, και ότι η καμπύλη κόστους καυσίμου δίνεται στο Σχήμα 11. Το συνολικό κόστος για τις μονάδες φυσικού αερίου υπολογίζεται ως εξής:

$$TC(Q) = \begin{cases} 5.8 \cdot 200 + 20 \cdot Q + 0.2 \cdot Q^2 \dfrac{€}{ώρα}, & 0 \text{ MW} \leq Q < 200 \text{ MW} \\ 5.8 \cdot 200 + 12000 + 1000 \cdot Q \dfrac{€}{ώρα}, & 200 \text{ MW} \leq Q < 220 \text{ MW} \\ +\infty \dfrac{€}{ώρα}, & Q > 220 \text{ MW} \end{cases}$$

Οι καμπύλες μέσου και οριακού κόστους παρουσιάζονται στο Σχήμα 12.

Σχήμα 12: Αριστερό γράφημα: μέσο κόστος και οριακό κόστος για το παράδειγμα 3.4. Δεξιά γράφημα: μέσο κόστος για πολλαπλές μονάδες, παράδειγμα 3.5.



Παράδειγμα 3.5: Έστω μια συλλογή πανομοιότυπων μονάδων φυσικού αερίου με τα χαρακτηριστικά αυτών που παρουσιάζονται στο παράδειγμα 3.4. Η καμπύλη μέσου κόστους ενός πλήθους 1, 2 και 3 γεννητριών παρουσιάζεται στο Σχήμα 12. Σημειώνεται πως η δομή του κόστους δεν αντιστοιχεί σε φυσικό μονοπώλιο. Για παραγωγή 200 MW, που είναι το τεχνικό ελάχιστο μιας μοναδικής μονάδας φυσικού αερίου, το μέσο κόστος τριών μονάδων είναι ήδη χαμηλότερο από αυτό δύο μονάδων ή μιας μόνο μονάδας. Ένα φυσικό μονοπώλιο είναι κατά κανόνα το αποτέλεσμα υψηλού κόστους επένδυσης, το οποίο δεν ισχύει για τις μονάδες φυσικού αερίου του παραδείγματος.

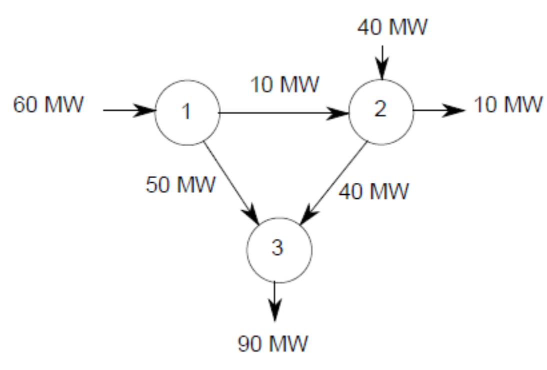
■

3.1.2 Μεταφορά και διανομή

Το δίκτυο μεταφοράς χρησιμοποιείται για τη μεταφορά ενέργειας σε μεγάλες ποσότητες από σταθμούς παραγωγής σε υποσταθμούς οι οποίοι εξυπηρετούν μεγάλους πληθυσμούς φορτίων Το δίκτυο διανομής χρησιμοποιείται για τη μεταφορά ενέργειας σε μικρότερες ποσότητες προς εμπορικά ή οικιακά φορτία. Μια βασική διαφοροποίηση μεταξύ της μεταφοράς και της διανομής είναι η ποσότητα ισχύος που μπορούν να μεταφέρουν αυτά τα δίκτυα, καθώς και το επίπεδο τάσης σε αυτά τα δίκτυα. Η υψηλή τάση οδηγεί σε χαμηλότερες απώλειες, που είναι ο λόγος για τον οποίο τα δίκτυα μεταφοράς λειτουργούν σε υψηλή τάση (115-765 kilo Volt), ενώ τα δίκτυα διανομής λειτουργούν κατά κανόνα στα 220 Volts. Οι μετασχηματιστές καθιστούν τη διεπαφή μεταξύ των συστημάτων μεταφοράς και διανομής, προκειμένου να μετασχηματίσουν την τάση μεταξύ των δύο δικτών.

Η μεταφορά ισχύος γίνεται ευκολότερα κατανοητή σε ένα γράφο, όπου οι κόμβοι του γράφου αντιστοιχούν στις περιοχές όπου οι παραγωγοί εγχύουν ισχύ, όπου οι καταναλωτές απορροφούν ισχύ, ή όπου οι γραμμές του δικτύου συναντώνται. Οι γραμμές του δικτύου αντιστοιχούν σε καλώδια τα οποία συνδέουν τους κόμβους. Το Σχήμα 13 απεικονίζει ένα δίκτυο 3 κόμβων. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της μεταφοράς ισχύος γίνεται αμέσως αντιληπτό από το Σχήμα 13. Η φυσική απαιτεί τη διατήρηση ενέργειας: η συνολική ισχύς που εγχύεται στο σύστημα πρέπει να ισούται με τη συνολική ισχύ που καταναλώνεται από το δίκτυο (συμπεριλαμβανομένων των απωλειών του δικτύου). Συγκεκριμένα, η διατήρηση ενέργειας πρέπει να γίνεται σεβαστή σε κάθε κόμβο του δικτύου. Υπό αυτήν την έννοια, τα δίκτυα ηλεκτρισμού προσομοιάζουν με τα δίκτυα μεταφοράς που απαντώνται στην επιχειρησιακή έρευνα. Ωστόσο, η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη στα δίκτυα ηλεκτρικής ενέργειας.

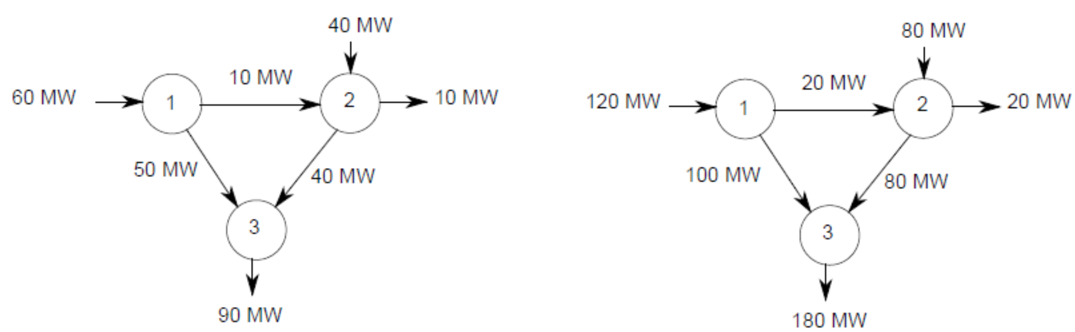
Σχήμα 13: Η ισχύς αναφέρεται στο ρυθμό παραγωγής, κατανάλωσης, ή ροής ενέργειας. Η έγχυση και απορρόφηση ισχύος πρέπει να είναι ίσες σε κάθε κόμβο του δικτύου.



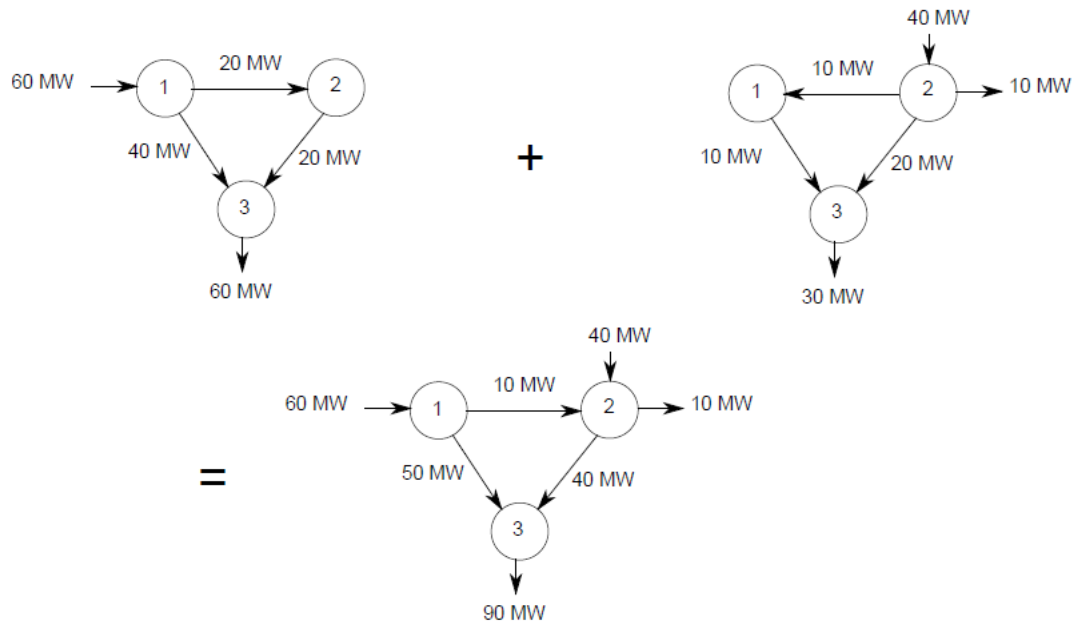
Ένα χαρακτηριστικό που διαφοροποιεί τα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας από τις περισσότερες άλλες εφοδιαστικές αλυσίδες είναι το γεγονός ότι η ισχύς δεν μπορεί να δρομολογηθεί αυθαίρετα στις γραμμές μεταφοράς, παρά υπακούει ένα σύνολο φυσικών νόμων οι οποίοι ονομάζονται **νόμοι του Kirchhoff**. Οι νόμοι αυτοί καθορίζουν μια απεικόνιση από τις εγχύσεις και απορροφήσεις ισχύος σε κάθε κόμβο του δικτύου προς ροές ισχύος στις γραμμές του δικτύου. Η απεικόνιση αυτή καθορίζεται από τις **εξισώσεις ροής ισχύος** και είναι σημαντική από άποψης κατανομής πόρων διότι οι γραμμές του δικτύου έχουν ένα πεπερασμένο όριο ισχύος το οποίο μπορούν να μεταφέρουν. Το γεγονός ότι η ισχύς δεν μπορεί να δρομολογηθεί αυθαίρετα συνεπάγεται επίσης ότι δεν είναι δυνατό να αποδωθούν φυσικά οι ροές ισχύος στο δίκτυο σε συγκεκριμένες διμερείς συναλλαγές. Επί παραδείγματι, ίσως είναι δελεαστικό να ισχυριστεί κανείς ότι ο καταναλωτής στον κόμβο 2 στο Σχήμα 13 εξυπηρετείται από τον παραγωγό στον κόμβο 2, απλώς και μόνο επειδή βρίσκονται στον ίδιο κόμβο. Αυτό θα ήταν εσφαλμένο από φυσικής άποψης. Μια πιο ακριβής αναλογία για ένα σύστημα ηλεκτρισμού είναι μια δεξαμενή νερού. Το νερό μπορεί να εγχυθεί σε μια δεξαμενή από μια μάνικα, μπορεί να απορροφηθεί από τη δεξαμενή από μια αντλία, αλλά δεν υπάρχει απευθείας αποστολή νερού από τη μάνικα στην αντλία.

Μια κατά προσέγγιση περιγραφή των εξισώσεων ροής ισχύος μπορεί να εξαχθεί από τη γραμμικοποίηση της απεικόνισης, που οδηγεί στις **εξισώσεις ροής ισχύος συνεχούς ρεύματος** (direct current, DC). Το μοντέλο ροής ισχύος DC σε επίπεδο δικτύου μεταφοράς είναι επαρκές για τη λειτουργία του συστήματος για ορισμένες, αλλά όχι όλες, τις λειτουργίες του συστήματος, συμπεριλαμβανομένης της εκκαθάρισης ορισμένων αγορών. Το παράρτημα Γ εξάγει τις DC εξισώσεις ροής φορτίου. Οι DC εξισώσεις ροής φορτίου οδηγούν σε μια *γραμμική* απεικόνιση μεταξύ των καθαρών εγχύσεων ισχύος σε κάθε κόμβο του δικτύου και της ροής ισχύος στις γραμμές του δικτύου. Οι εξισώσεις ροής ισχύους έχουν και μια διαισθητική ερμηνεία. Το ρεύμα διαχωρίζεται στις γραμμές του δικτύου με τρόπο αντιστρόφως ανάλογο της ηλεκτρικής αντίστασης που συναντά στη διαδρομή του. Δεδομένου ότι η απεικόνιση από εγχύσεις σε ροές είναι γραμμική, ικανοποιεί τις ιδιότητες της αναλογικότητας και της προσθετικότητας. Η αναλογικότητα απεικονίζεται στο Σχήμα 14: ο διπλασιασμός των εγχύσεων στους κόμβους του δικτύου συνεπάγεται διπλάσια ροή στις γραμμές. Η προσθετικότητα απεικονίζεται στο Σχήμα 15: αν η έγχυση ισχύος στους κόμβους ενός δικτύου μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα δύο εγχύσεων, τότε η συνολική ροή ισχύος στις γραμμές είναι το άθροισμα των ροών που προκαλούνται από αυτές τις εγχύσεις.

Σχήμα 14: Όλες οι γραμμές έχουν πανομοιότυπα φυσικά χαρακτηριστικά. Οι ροές είναι ανάλογες προς τις εγχύσεις.



Σχήμα 15: Όλες οι γραμμές έχουν πανομοιότυπα φυσικά χαρακτηριστικά. Οι ροές προστίθενται.



Η λειτουργία του συστήματος διανομής διασφαλίζει ότι η ισχύς φτάνει στους καταναλωτές με αποδεκτή ποιότητα. Κεντρική μέριμνα είναι η διασφάλιση ότι η ισχύς παρμένει σε αποδεκτά όρια τάσης. Οι λειτουργίες του συστήματος διανομής δεν αναπτύσσονται λεπτομερώς στο κείμενο.

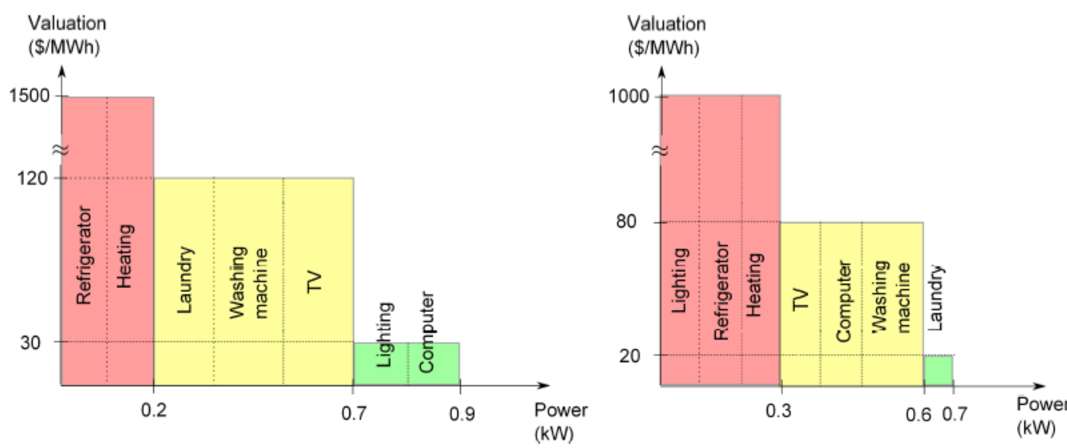
3.1.3 Κατανάλωση

Η κατανάλωση κατηγοριοποιείται ανάμεσα σε βιομηχανικούς, εμπορικούς και οικιακούς κατναλωτές. Οι οικιακοί και εμπορικοί καταναλωτές τυγχάνουν διαφορετικής μεταχείρισης τόσο στη λειτουργία του συστήματος όσο και των αγορών. Οι βιομηχανικοί καταναλωτές συνδέονται είτε στο σύστημα μεταφοράς είτε στο σύστημα διανομής. Οι οικιακοί και εμπορικοί καταναλωτές λαμβάνουν ισχύ από το δίκτυο διανομής. Επιπλέον, οι βιομηχανικοί καταναλωτές έχουν την επιλογή να συμμετέχουν απευθείας στη χονδρεμπορική αγορά ηλεκτρικής ενέργειας, ενώ οι εμπορικοί και οικιακοί καταναλωτές αγοράζουν ενέργεια στη λιανική αγορά.

Αν και είναι διαισθητικά πιο ξεκάθαρο να ορίσει κανείς πρώτα το κόστος καυσίμου και μετέπειτα το οριακό κόστος όταν συζητά την πλευρά της προσφοράς, είναι αντιθέτως πιο διαισθητικό να ορίσει πρώτα κανείς οριακές έννοιες όταν εξετάζει την πλευρά της ζήτησης. Αν και οι καταναλωτές δεν είναι ακόμη συνηθισμένοι στην ιδέα της αγοράς ηλεκτρισμού, η **αποτίμηση** ή το **οριακό όφελος** για την κατανάλωση ισχύος μπορούν να οριστούν ποσοτικά. Η αποτίμηση μετράται σε €/MWh. Είναι το χρηματικό ποσό που είναι έτοιμος ένας καταναλωτής να πληρώσει για να έχει πρόσβαση σε 1 MW ισχύος για μία ώρα, ανεξαρτήτως του πώς η ισχύς αυτή κατανέμεται ανάμεσα στις διάφορες χρήσεις. Όπως και στην περίπτωση του οριακού κόστους, η αποτίμηση εξαρτάται από το παρόν επίπεδο κατανάλωσης ενός καταναλωτή. Το **όφελος καταναλωτή** είναι η συνολική ωφέλεια ενός καταναλωτή που επιτυγχάνεται από την κατανάλωση μιας συνολικής ποσότητας ισχύος, και η αποτίμηση είναι η παράγωγος της ωφέλειας καταναλωτή ως προς την ποσότητα ισχύος που καταναλώνει.

Η **αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης** ή **συνάρτηση οριακής ζήτησης** $MB(Q)$ είναι μια απεικόνιση της κατανάλωσης ισχύος προς την *επιπλέον* αξία που επιτυγχάνει ένας καταναλωτής όταν αυξάνει κατά μία μονάδα την κατανάλωσή του πάνω από το επίπεδο Q. Η έννοια απεικονίζεται στο Σχήμα 16. Αυτό μεταφράζεται στο χρηματικό ποσό που είναι διατεθιμένος να πληρώσει ένας καταναλωτής για μια πρόσθετη κατανάλωση ενός επιπλέον MW πάνω από το Q. Η συνάρτηση οριακής ζήτησης είναι το ανάλογο της συνάρτησης οριακού κόστους από την πλευρά της ζήτησης. Η διαίσθηση υποδεικνύει ότι η συνάρτηση αυτή είναι φθίνουσα, γιατί ένας καταναλωτής θα χρησιμοποιήσει το πρώτο kW ισχύος στην πιο πολύτιμη χρήση, και τα επόμενα kW ισχύος σε λιγότερο πολύτιμες καταναλώσεις. Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα ενός νοσοκομείου. Αντιλαμβάνεται κανείς ότι πρόσβαση στο πρώτο μπλοκ ισχύος είναι τρομερά χρήσιμη, γιατί υποστηρίζει κρίσιμο εξοπλισμό (φωτισμό χειρουργείου, αναπνευστήρες, κτλ.). Το επόμενο μπλοκ ισχύοςενδεχομένως εξυπηρετεί λιγότερο κρίσιμες, αλλά πάντα σημαντικές χρήσεις (π.χ. φωτισμό στα γραφεία των γιατρών, κτλ.)μ και ούτω καθ'εξής, μέχρι το τελευταίο μπλοκ ισχύος, το οποίο εξυπηρετεί το λιγότερο κρίσιμο εξοπλισμό (π.χ. φωτισμό στους χώρους στάθμευσης). Ένα αντιπαράδειγμα προς τις φθίνουσες συναρτήσεις οριακού ωφέλους είναι λειτουργίες που χρειάζονται διακριτές ποσότητες ισχύος.

Σχήμα 16: Η κατανομή λωρίδων ισχύος σε μία κατοικία στο παράδειγμα 3.6. Το αριστερό γράφημα παρουσιάζει την αποτίμηση της ζήτησης σε πρωϊνές ώρες, το δεξί γράφημα αντιστοιχεί σε αποτίμηση σε βραδινές ώρες για την ίδια κατοικία.



Παράδειγμα 3.6: Ο Πίνακας 6 παρουσιάζει τις αποτιμήσεις που ακολουθεί ένα σπιτικό. Οι συναρτήσεις οριακού ωφέλους παρουσιάζονται στο Σχήμα 16. Η μη ευέλικτη κατανάλωση αντιστοιχεί στο κόκκινο μπλοκ, η μετρίως ευέλικτη κατανάλωση στο κίτρινο μπλοκ, και η ευέλικτη κατανάλωση στο πράσινο μπλοκ. Σημειώνεται ότι οι φέτες ισχύος δεν αντιστοιχούν απαραίτητα με συγκεκριμένες συσκευές. Για παράδειγμα, 0.1 kW ισχύος μπορεί να αποδοθεί στο φωτισμό το βράδυ, γιατί είναι η πιο σημεντική κατανάλωση εκείνη την ώρα, ενώ η ίδια ισχύς μπορεί να αντιστοιχεί στο ψυγείο το πρωϊ, ενώ ο φωτισμός είναι η λιγότερο σημεντική κατανάλωση το πρωϊ.

Πίνακας 6: Οι αποτιμήσεις του παραδείγματος 3.6.

Κατανάλωση	Ζήτηση πρωϊ (kW)	Αποτίμηση πρωϊ (€/MWh)	Ζήτηση βράδυ (kW)	Αποτίμηση βράδυ (€/MWh)
Μη ευέλικτη	0.2	1500	0.3	1000
Μετρίως ευέλικτη	0.5	120	0.3	80

Ευέλικτη	0.2	30	0.1	20

■

Αξίζει να αναρωτηθεί κανείς τι πληροφορία παρέχει η **συνάρτηση ζήτησης**, που είναι η αντίστροφη απεικόνιση από την αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης. Η συνάρτηση ζήτησης απεικονίζει την τιμή της ισχύος $v = MB(Q)$ στην ποσότητα Q που ένας καταναλωτής είναι διατεθιμένος να αγοράσει στην εν λόγω τιμή. Για να γίνει κατανοητό αυτό, θυμίζουμε ότι όλες οι φέτες ισχύος πριν το Q επιτυγχάνουν ένα ώφελος που είναι τουλάχιστον ίσο ή μεγαλύτερο από $MB(Q)$, και συνεπώς ο καταναλωτής είναι διατεθιμένος να αγοράσει όλες αυτές τις φέτες ισχύος για μια τιμή ίση η μικρότερη του $MB(Q)$.

Η **ελαστικότητα ζήτησης** είναι η ευαισθηία της ζήτησης σε αλλαγές της τιμής. Απεικονίζοντας τη συνάρτηση ζήτησης ως $Q(v)$ όπου v είναι η τιμή, η ελαστικότητα ζήτησης ορίζεται ως

$$\epsilon = \frac{dQ/dv}{Q/v}.$$

Μια απότομη συνάρτηση οριακού ωφέλους (ή μια επίπεδη συνάρτηση ζήτησης) αντιστοιχεί σε *ανελαστική ζήτηση*, η οποία δεν είναι καθόλου ευαίσθητη στην τιμή.

Δεδομένης μιας ορισμένης κατάστασης του συστήματος (διαθεσιμότητα γεννητριών και δικτύου), η μέση αξία χαμένου φορτίου (value of lost load) είναι ο μακροπρόθεσμος μέσος όρος της αξίας του φορτίου το οποίο δεν ικανοποιείται λόγω τυχαίων διαταραχών (απώλειες γεννητριών και γραμμών, σφάλματα πρόγνωσης ανανεώσιμων πηγών ενέργειας και φορτίου, κοκ.). Η μέση αξία χαμένου φορτίου εξαρτάται από την ποσότητα διαθέσιμης ισχύος στο σύστημα. Σε μελέτες επέκτασης χωρητικότητας, είναι σημαντικό να προσδιοριστεί το οριακό όφελος μιας επιπλέον μονάδας χωρητικότητας πραγωγής, προκειμένου αυτή να συγκριθεί με το κόστος επένδυσης που απαιτείται για να εγκατασταθεί αυτή η χωρητικότητα. Μια οριακή αύξηση στην εγκατεστημένη ισχύ μειώνει τη μέση αξία χαμένου φορτίου. Η **αξία χαμένου φορτίου (VOLL)** είναι η μοναδιαία αλλαγή στη μέση VOLL ως αποτέλεσμα μιας μοναδιαίας αύξησης της χωρητικότητας του συστήματος, διαιρούμενη με τη μοναδιαία μείωση της κατανάλωσης η οποία δεν ικανοποιείται.

Παράδειγμα 3.7: Έστω ένα σύστημα με την ακόλουθη συνάρτηση ζήτησης:

$$Q(v) = 3000 - 2v.$$

Όταν υπάρχει επαρκής χωρητικότητα, η διακοπή φορτίου γίνεται με τυχαίο τρόπο ανάμεσα στον πληθυσμό των καταναλωτών. Έστω ότι κάθε κάθετη λωρίδα φορτίου υφίσταται μια απώλεια εξυπηρέτησης κατά 1%. Το VOLL ισούται με την απώλεια αξίας για κάθε MWh φορτίου που δεν εξυπηρετείται. Όταν 1% της ζήτησης διακόπτεται τυχαία, η χαμένη αξία υπολογίζεται ως

$$\int_{v=0}^{15000} Q(v)dv - \int_{v=0}^{15000} 0.99Q(v)dv = 0.01\frac{15000 \cdot 30000}{2} = 2.25 \cdot 10^6 \text{ €}.$$

Η συνολική διακοπή ενέργειας ισούται με 1% της κατανάλωσης ενέργειας αιχμής, δηλαδή 300 MWh. Αυτό συνεπάγεται ότι η αξία χαμένου φορτίου είναι

$$VOLL = \frac{2250000}{300} = 7500 \text{ €}$$

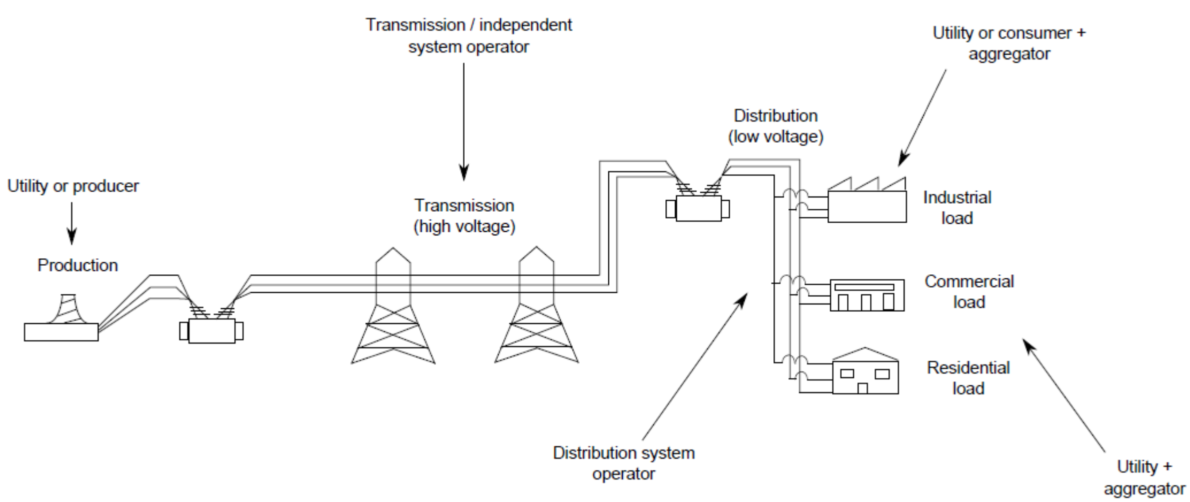
και θα μπορούσε να είχε υπολογιστεί ισοδύναμα ως η μέση αποτίμηση των καταναλωτών $\int_{v=0}^{15000} Q(v)dv$. Σε πιο λεπτομερείς μελέτες σχεδιασμού όπου εξετάζονται οι απώλειες γραμμών και γεννητριών, ο υπολογισμός του VOLL γίνεται για μια δεδομένη ποσότητα εγκατεστημένης ισχύος και βασίζεται σε προσομοίωση.

■

3.1.4 Φορείς της αγοράς

Η παρούσα ενότητα παρουσιάζει το τοπίο των φορέων που συμμετέχουν στη λειτουργία των συστημάτων και των αγορών ηλεκτρικής ενέργειας. Οι φορείς αυτοί παρουσιάζονται στο Σχήμα 17.

Σχήμα 17: Οι φορείς της λειτουργίας του συστήματος και της αγοράς ηλεκτρισμού.



Οι **διαχειριστές συστήματος** διαχειρίζονται το σύστημα μεταφοράς. Αναφέρονται κατά κανόνα ως διαχειρστές συστήματος μεταφοράς (transmission system operators, TSOs) στην Ευρώπη, και ανεξάρτητοι διαχειριστές συστήματος (independent system operators, ISOs) στις ΗΠΑ. Ο διαχειριστής συστήματος είναι υπεύθυνος για να “κρατάει τα φώτα αναμμένα”, και συνεπώς ελέγχει τις γεννήτριες και την κατανάλωση του συστήματος, και αυτό παρά το γεγονός ότι οι πόροι αυτοί δεν είναι ιδιοκτησία του διαχειριστή συστήματος. Ο διαχειριστής συστήματος είναι επίσης υπεύθυνος για τη λειτουργία ορισμένων από τις αγορές ηλεκτρισμού. Το ποιες από τις αγορές αυτές διαχειρίζεται εξαρτάται από το σχεδιασμό της αγοράς, και ποικίλλει από περιοχή σε περιοχή του κόσμου. Σημειώνεται ότι, παρόλο που ο διαχειριστής δικτύου είναι υπεύθυνος για τη λειτουργία ορισμένων αγορών, η δραστηριότητα αυτή δεν είναι κερδοσκοπική, και οποιοδήποτε θετικό ή αρνητικό πλεόνασμα δημιουργείται σε αυτές τις αγορές κατανέμεται πίσω στους συμμετέχοντες στην αγορά.

Οι **διαχειριστές συστήματος διανομής** (distribution system operators, DSOs) διαχειρίζονται το σύστημα διανομής. Ο διαχειριστής συστήματος διανομής διασφαλίζει ότι η ισχύς διανέμεται στους καταναλωτές που είναι συνδεδεμένοι στο σύστημα διανομής σε αποδεκτή ποιότητα. Η διατήρηση της τάσης σε αποδεκτά επίπεδα είναι ιδιαιτέρως σημαντική.

Οι οικιακοί καταναλωτές αντιπροσωπεύονται από **παρόχους**, που αναφέρονται και ως **φορείς εξυπηρέτησης φορτίου** (load serving entities). Οι καταναλωτές χονδρικής μπορούν να εκπροσωπούνται από παρόχους ή να λειτουργούν και ανεξάρτητα από παρόχους. Οι πάροχοι είναι είναι επίσης κάτοχοι γεννητριών, στην οποία περίπτωση συμμετέχουν στο σύστημα και ως παραγωγοί, αλλά και ως καταναλωτές. Οι παραγωγοί μπορούν να συμμετέχουν και ανεξάρτητα στην αγορά, χωρίς να εκπροσωπούνται από παρόχους.

Οι **φορείς σωρευτικής εκπροσώπησης** (aggregators) είναι μια νέα οντότητα στις αγορές ηλεκτρικής ενέργειας. Ο στόχος των φορέων σωρευτικής εκπροσώπησης είναι να συντονίζουν μεγάλους πληθυσμούς καταναλωτών και άλλων πόρων (π.χ. ανανεώσιμων πηγών ενέργειας) ούτως ώστε οι συναθροισμένοι πόροι να ακολουθούν μια τυποποιημένη διεπαφή ή και να προσφέρουν υπηρεσίες (π.χ. εφεδρείες) στο σύστημα. Οι φορείς σωρευτικής εκπροσώπησης αντιπροσωπεύουν πόρους που είναι συχνά συνδεδεμένοι με το σύστημα μέσης ή χαμηλής τάσης.

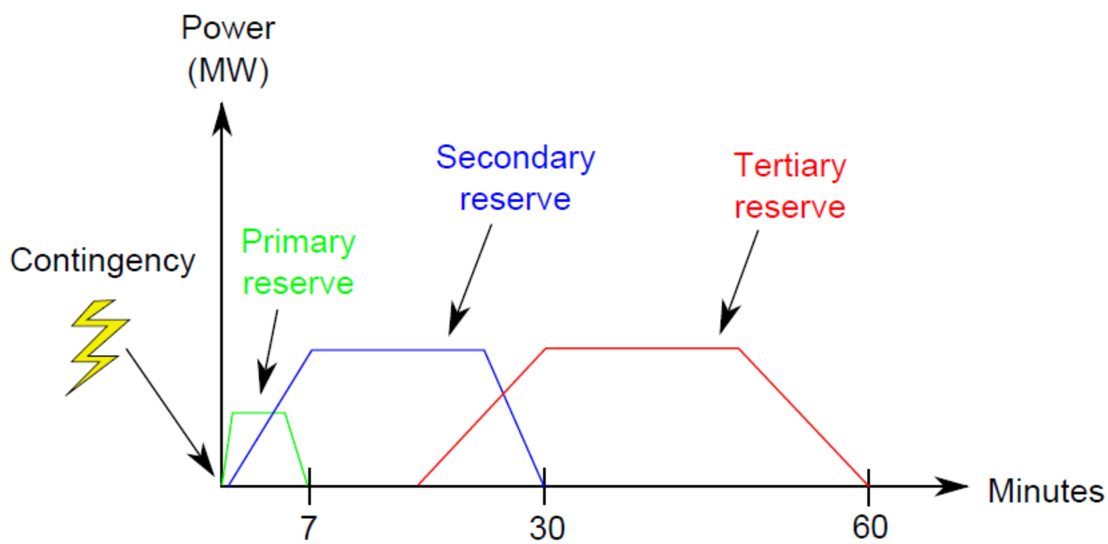
3.1.5 Αβεβαιότητα και εφεδρείες

Η πλευρά της παραγωγής της εφοδιαστικής αλυσίδας εισάγει έναν ορισμένο βαθμό αβεβαιότητας σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες. Σε μηνιαία χρονική κλίμακα, η ποσότητα βροχόπτωσης, που είναι αβέβαιη, οδηγεί σε μια απρόβλεπτη ποσότητα νερού σε υδροηλεκτρικά φράγματα, το οποίο επηρρεάζει τη λειτουργία των υδροηλεκτρικών γεννητριών. Σε κλίμακα ημερήσιας λειτουργίας, η αβεβαιότητα ωφείλεται στην αναγκαστική διακοπή λειτουργίας συμβατικών γεννητριών και στα σφάλματα πρόγνωσης των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας. Η συντήρηση συμβατικών γεννητριών διαφέρει από την αναγκαστική διακοπή λειτουργίας, εφόσον μπορεί να προγραμματιστεί σε περιόδους που το σύστημα δεν είναι υπό πίεση. Το σύστημα μεταφοράς επίσης εισάγει αβεβαιότητα, διότι οι γραμμές μεταφοράς αστοχούν και αυτές, αν και αυτό συμβαίνει με χαμηλότερη συχνότητα απ'ότι οι αστοχίες γεννητριών. Όσον αφορά την κατανάλωση, η κύρια πηγή αβεβαιότητας είναι το σφάλμα πρόγνωσης φορτίου. Τα βιομηχανικά φορτία και οι μετασχηματιστές διανομής που εξυπηρετούν μεγάλο αριθμό καταναλωτών επίσης αστοχούν ενίοτε. Μια **απροσδόκητη αστοχία** (contingency) ορίζεται ως η αστοχία ενός εξαρτήματος του συστήματος (γεννήτρια, γραμμή, μετασχηματιστής, φορτίο).

Οι προσαρμογές που απαιτούνται λόγω σφαλμάτων αστοχίας διαφέρουν αρκετά από τις προσαρμογές που είναι απαραίτητες ως αποτέλεσμα αστοχιών. Τα σφάλματα πρόγνωσης είναι μέρος της κανονικής λειτουργίας του συστήματος, και το σύστημα προσαρμόζεται ομαλά προκειμένου να τα αντιμετωπίσει. Κατ'αντίθεση, οι αστοχίες είναι έντονες διαταραχές του συστήματος και απαιτούν την παρέμβαση εφεδρικών πόρων. Τα σφάλματα πρόγνωσης αντιμετωπίζονται, συνεπώς, με την προσαρμογή του σημείου παραγωγής της κάθε γεννήτριας στις νέες συνθήκες του συστήματος, ενώ στις αστοχίες οι πόροι ανεργοποιούνται, μένουν σε λειτουργία για ένα ορισμένο διάστημα χρόνου, και κατόπιν αποσύρονται.

Οι **εφεδρείες** χρησιμοποιούνται για να εξισορροπήσουν το σύστημα σε περίπτωση ομαλών ή διακριτών διαταραχών. Οι εφεδρείες είναι υποσύνολο των **επικουρικών υπηρεσιών**, που είναι ένα σύνολο υπηρεσιών οι οποίες διασφαλίζουν την κατάλληλη λειτουργία του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας. Οι εφεδρείες κατηγοριοποιούνται ανάλογα με την ταχύτητα με την οποία μπορούν να ανταποκριθούν, όπως φαίνεται στο Σχήμα 18. Η κατηγοριοποίηση τψν εφεδρειών συζητάται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 6. Η ενέργεια, η πρόσβαση στο δίκτυο, και οι επικουρικές υπηρεσίες, συμπεριλαμβανομένων των εφεδρειών, αποτελεούν την πλειονότητα των προϊόντων και υπηρεσιών που συναλλάσονται στις αγορές ηλεκτρισμού.

Σχήμα 18: Η αντίδραση διαφορετικών τύπων εφεδρειών.



Παράδειγμα 3.8: Έστω ένα σύστημα με n γεννήτριες, των οποίων το λειτουργικό κόστος είναι f_i, και των οποίων η χωρητικότητα είναι C_i. Διατυπώστε ένα μοντέλο όπου η ζήτηση εξυπηρετείται με ελάχιστο κόστος διασφαλίζοντας όμως ότι το σύστημα προστατεύεται από τη χειρότερη δυνατή απροσδόκητη αστοχία.

Λύση

Προκειμένου να διασφαλίσουμε ότι δεσμεύεται επαρκής χωρητικότητα για να προστατευτεί το σύστημα από μια απροσδόκητη αστοχία, πρέπει να εισαχθεί μια βοηθητική μεταβλητή r_i επιπλέον της μεταβλητής απόφασης p_i. Το μοντέλο μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$\min \sum_{i=1}^{n} f_i(p_i)$$

$$\text{s.t.}\, p_i + r_i \leq C_i, i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \geq max_{i=1,\dots,n} C_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = D$$

$$p, r \geq 0$$

όπου D είναι η συνολική ζήτηση ισχύος στο σύστημα. Η εισαγωγή περιορισμών ράμπας θα περιέπλεκε το μοντέλο. Οι ράμπες και άλλα πιο προχωρημένα χαρακτηριστικά αναπτύσσονται περαιτέρω σε επόμενα κεφάλαια.

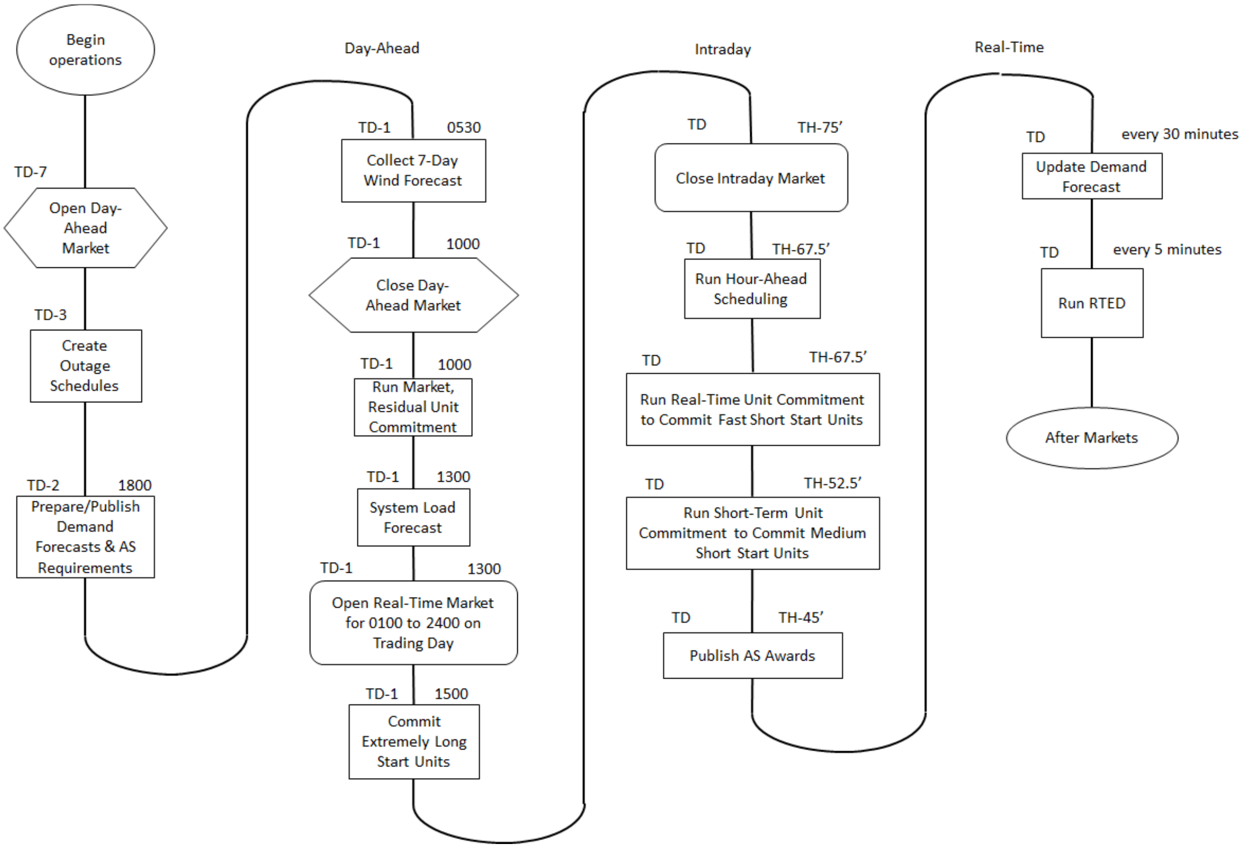
■

3.1.6 Στάδια λήψης αποφάσεων

Υπό κανονικές συνθήκες λειτουργίας (δηλαδή απουσία αστοχιών), το σύστημα χρειάζεται να προσαμόζει την κατάστασή του, εφόσον οι προγνώσεις δεν είναι ποτέ πλήρως ακριβείς. Οι αποκλίσεις πρόγνωσης αντιμετωπίζονται προσαρμόζοντας τη θέση λειτουργίας των γεννητριών του συστήματος με κριτήριο τη διατήρηση της ευστάθειας του συστήματος με ελάχιστο κόστος. Η λειτουργία του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας είναι συνεπώς ένα πρόβλημα κινούμενου ορίζοντα. Η καρδιά της λειτουργίας του συστήματος είναι ο διαχειριστής δικτύου. Οι σημαντικότεροι περιορισμοί της λειτουργίας του συστήματος είναι (i) η απαίτηση να εξισορροπείται στιγμιαία η παραγωγή και η κατανάλωση, (ii) η απαίτηση να λειτυοργεί το σύστημα με ασφάλεια, (iii) οιτεχνικοί περιορισμοί των γεννητριών, και (iv) οι τεχνικοί περιορισμοί του δικτύου μεταφοράς. Ο στόχος του διαχειριστή δικτύου είναι η μεγιστοποίηση του κοινωνικού ωφέλους του συστήματος.

Ένα αντιπροσωπευτικό διάγραμμα ροής της λειτουργίας του συστήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 19. Το διάγραμμα ροής δεν απεικονίζει την επέκταση δυναμικότητας, που είναι μέρος του μακροπρόθεσμου σχεδιασμού του συστήματος, ή τον προγραμματισμό υδροηλεκτρικών, που είναι μια μεσοπρόθεσμη άσκηση προγραμματισμού. Απεναντίας, το διάγραμμα ροής εστιάζει στη βραχυπρόθεσμη (αγορά επόμενης ημέρας και πραγματικού χρόνου) λειτουργία του συστήματος. Αν και αυτό το διάγραμμα ροής δεν είναι αντιπροσωπευτικό του ακριβούς χρονισμού των λειτουργιών σε όλα τα συστήματα, υπογραμμίζει ωστόσο τη χρονική στιγμή στην οποία ορισμένες λειτουργικές αποφάσεις πρέπει να οριστικοποιηθούν, γιατί η μετέπειτα ενημέρωσή τους είναι ανέφικτη από φυσικής άποψης. Το διάγραμμα ροής αντιστοιχεί σε μια κεντρική οργάνωση της αγοράς ηλεκτρισμού, ωστόσο παρόμοιες αποφάσεις είναι απαραίτητο να ληφθούν σε αποκεντρωμένους σχεδιασμούς αγοράς (οι διαφορές μεταξύ των δύο σχεδιασμών υπογραμμίζονται σε μετέπειτα κεφάλαια).

Σχήμα 19: Ένα τυπικό διάγραμμα ροής των λειτουργιών του συστήματος. Οι συμβολισμοί TD, TH αντιστοιχούν στην ημέρα αγοραπωλησίας (trading day, TD) και ώρα αγοραπωλησίας (trading hour, TH) αντίστοιχα.



Η πρώτη στήλη περιγράφει λειτουργείες που εκτελούνται πριν την λειτουργία επόμενης ημέρας. Η αγορά επόμενης ημέρας ανοίγει λίγες μέρες πριν τις λειτουργίες επόμενης ημέρας. Σε αυτό το χρονικό στάδιο, τα προγράμματα διακοπής λειτουργίας προγραμματίζονται. Υπό αυτήν την έννοια, οι προγραμματισμένες διακοπές λειτουργίας είναι πολύ διαφορετικές από τις απροσδόκητες αστοχίες, διότι ο χρονισμός τους μπορεί να βελτιστοποιηθεί ούτως ώστε να προκαλέσουν την ελάχιστη δυνατή επιβάρυνση στο σύστημα. Οι προγνώσεις κατανάλωσης και οι απαιτήσεις εφεδρικών υπηρεσιών επίσης καθορίζονται πριν τη λειτουργία επόμενης ημέρας. Σε αυτό το χρονικό στάδιο, οι αποφάσεις οι οποίες μονιμοποιούνται είναι οι προγραμματισμένες διακοπές λειτουργίας.

Η δεύτερη στήλη περιγράφει τις λειτουργίες επόμενης ημέρας. Η αγορά επόμενης ημέρας κλείνει λίγες ώρες πριν την αρχή της ημέρας λειτουργίας. Άπαξ και η αγορά επόμενης ημέρας κλείσει, τρέχει το μοντέλο αγοράς επόμενης ημέρας. Το μοντέλο αυτό δεν παράγει φυσικές δεμεύσεις, αλλά παράγει χρηματοοικονομικές δεσμεύσεις. Για ορισμένα συστήματα, η υπολειπόμενη δέσμευση μονάδων (residual unit commitment) εκτελείται επίσης σε αυτό το στάδιο, προκειμένου να διασφαλιστεί ότι ο διαχειριστής δικτύου μπορεί να εγγυηθεί επαρκείς εφεδρείες σε πραγματικό χρόνο (αυτό θα ήταν απαραίτητο, για παράδειγμα, αν η πρόγνωση φορτίου του διαχειριστή συστήματος είναι σημαντικά υψηλότερη από την ποσότητα ενέργειας η οποία συναλλάσεται στην αγορά επόμενης ημέρας). Μια απόφαση που είναι δεσμευτική από φυσικής άποψης λαμβάνεται λίγες ώρες μετά το κλείσιμο της αγοράς επόμενης ημέρας, συγκεκριμένα η δέσμευση μονάδων βραδείας εκκίνησης. Η αγορά πραγματικού χρόνου ανοίγει αφού κλείσει η αγορά επόμενης ημέρας, και πριν την ημέρα λειτουργίας.

Η τρίτη στήλη περιγράφει τις διημερήσιες λειτουργίες. Η διημερήσια αγορά κλείνει περίπου μία ώρα πριν την ώρα λειτουργίας. Σε αυτό το στάδιο, οι μονάδες βραδείας εκκίνησης έχουν δεσμευτεί και είναι απαραίτητο να αποφασιστεί αν οι μονάδες ταχείας εκκίνησης (fast start units) πρέπει να δεσμευτούν. Αυτό αποφασίζεται από ένα μοντέλο δέσμευσης μονάδων πραγματικού χρόνου. Το μοντέλο αυτό παράγει αποφάσεις οι οποίες είναι δεσμευτικές από φυσικής άποψης, και υπαγορεύουν ποιες μονάδες ταχείας εκκίνησης πρέπει να ενεργοποιηθούν. Σε αυτό το χρονικό στάδιο, το διάγραμμα ροής περνάει στην τελευταία στήλη, η οποία αντιστοιχεί στις λειτουργίες πραγματικού χρόνου. Σε αυτό το στάδιο, η μόνη ευελιξία που απομένει στο σύστημα είναι η ικανότητα αλλαγής του σημείου λειτουργίας μονάδων οι οποίες έχουν ήδη εκκινηθεί (ορισμένοι διαχειριστές συστήματος χρησιμοποιούν επίσης το δίκτυο μεταφοράς και/ή την απόκριση ζήτησης προκειμένου να ανταποκριθούν στις συνθήκες πραγματικού χρόνου,ωστόσο η λειτουργία αυτή δεν αντιπροσωπεύεται στο διάγραμμα ροής στο Σχήμα 19). Κάθε λίγα λεπτά επιλύεται ένα μοντέλο οικονομικής κατανομής προκειμένου να προσαρμοστεί το σημείο λειτουργίας.

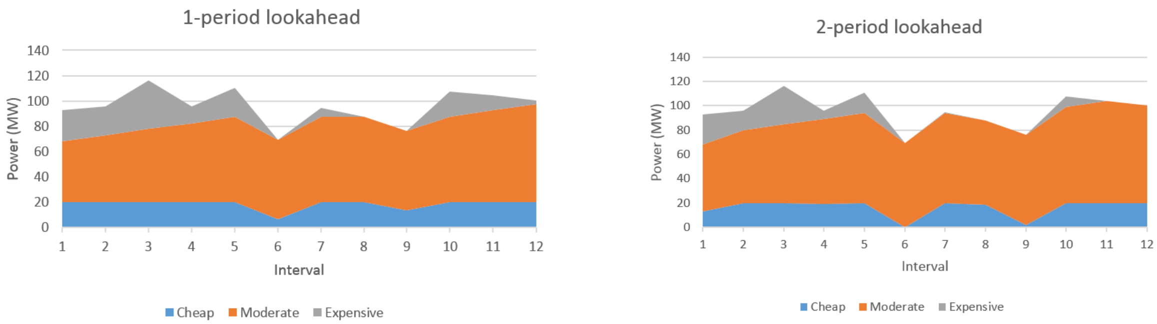
Όλα τα προαναφερθέντα μοντέλα (δέσμευση μονάδων επόμενης ημέρας, διημερήσια δέσμευση μονάδων, δέσμευση μονάδων πραγματικού χρόνου, οικονομική κατανομή) βελτιστοποιούν με έναν ορισσμένο ορίζονται πέρα από το χρονικό σημείο λειτουργίας για το οποίο γίνεται ο προγραμματισμός, προκειμένου να διασφαλίσουν ότι το σύστημα είναι προετοιμασμένο να ανταποκριθεί στην προβλεπόμενη κατάσταση των ερχόμενων ωρών.

Παράδειγμα 3.9: Έστω ένα σύστημα με τρεις γεννήτριες, τα χαρακτηριστικά των οποίων παρουσιάζει ο Πίνακας 7. Ας θεωρήσουμε το μοντέλο οικονομικής κατανομής πραγματικού χρόνου, το οποίο επιλύεται κάθε 5 λεπτά για τα επόμενα 5 λεπτά. Το παρουσιάζει την κατανομή των γεννητριών όταν το μοντέλο οικονομικής κατανομής πραγματικού χρόνου επιλύεται με ένα χρονικό ορίζοντα 5 λεπτών και 10 λεπτών. Η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι με τη γεννήτρια 1 να παράγει 50 MW και τη γεννήτρια 2 να παράγει 50 MW. Το κόστος στην περίπτωση του ορίζοντα προγραμματισμού 5 λεπτών για την πλήρη ώρα είναι 1738 €.

Πίνακας 7: Η λίστα γεννητριών του παραδείγματος 3.9.

Γεννήτρια	Οριακό κόστος (€/MWh)	Μέγιστο (MW)	Ράμπα (MW/λεπτό)
Φθηνή	0	20	+∞
Μετρίως ακριβή	10	+∞	1
Ακριβή	80	+∞	5

Σχήμα 20: Το σημείο λειτουργίας για τις πολιτικές με ορίζοντα πρόγνωσης 5 λεπτών και 10 λεπτών για το παράδειγμα 3.9.



Το κόστος για τον ορίζοντα πρόγνωσης 10 λεπτών είναι 1406 €. Η διαφορά οφείλεται κυρίως στην ικανότητα της δεύτερης πολιτικής να αντικαθιστά την ακριβή τεχνολογία με την τεχνολογία μεσαίου κόστους, λαμβάνοντας υπόψη τα όρια ρυθμού ράμπας της τεχνολογίας μετρίου κόστους. Για παράδειγμα, στο διάστημα 9 η πρώτη πολιτική χρησιμοποιεί τη φθηνή γεννήτρια στο μέγιστο δυνατό βαθμό. Απεναντίας, η δεύτερη πολιτική προβλέπει την αύξηση στη ζήτηση στο διάστημα 10, και ωθεί προς τα κάτω τη φθηνή τεχνολογία, προκειμένου να διασφαλίσει ότι η τεχνολογία μετρίου κόστος μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο μέγιστο δυνατό βαθμό στο διάστημα 10. Η πρώτη πολιτική είναι αναγκασμένη να χρησιμοποιήσει την ακριβή τεχνολογία στο διάστημα 10, γιατί δε χρησιμοποιεί αρκετά την τεχνολογία μετρίου κόστους στο διάστημα 9 και η τεχνολογία μετρίου κόστους δεν είναι σε θέση να ακολουθήσει την απότομη αύξηση ζήτησης από το διάστημα 9 στο διάστημα 10.

■

3.2 Λειτουργία αγορών ηλεκτρικής ενέργειας

Το κίνητρο για τη μετάβαση απο την κεντρική λειτουργία του συστήματος σε αγορές πηγάζει από έναν αριθμό πλεονεκτημάτων που μπορούν να επιτύχουν αγορές οι οποίες λειτουργούν σωστά, σε σχέση με την κεντρική λειτουργία. Τα πλεονεκτήματα αυτά σχετίζονται με την πληροφορία, την επεκτάσιμη λειτουργία, και τα αποδοτικά μακροπρόθεσμα σήματα προς τους επενδυτές.

Πληροφορία. Η κεντρική λειτουργία του συστήματος απαιτεί ότι ο διαχειριστής συστήματος έχει πρόσβαση σε λεπτομερή οικονομικές και τεχνικές πληροφορία σχετικά με τους παραγωγούς και καταναλωτές του συστήματος. Αυτό είναι πρακτικά αδύνατο για τους καταναλωτές, λόγω του τεραστίου τους αριθμού. Τέτοιες απαιτήσεις σε πληροφορία είναι διαχειρίσιμες από την πλευρά της παραγωγής καυώς, ακόμη και στα μεγαλύτερα συστήματα παγκοσμίως, οι παραγωγοί δεν ξεπερνούν τις μερικές χιλιάδες. Ένα θέλγητρο της αγοράς είναι το γεγονός ότι η πληροφορία είναι αποκεντρωμένη. Οι παραγωγοί χρειάζονται πρόσβαση μόνο στην τιμή της αγοράς και στις ιδιωτικές τεχνικές και οικονομικές τους πληροφορίες προκειμένου να λειτουργήσουν τις γεννήτριές τους στο βέλτιστο επίπεδο. Παρομοίως, οι καταναλωτές χρειάζονται πρόσβαση μόνο στην τιμή της αγοράς και την ιδιωτική τους αποτίμηση για τον ηλεκτρισμό προκειμένου να αποφασίσουν πόση ενέργεια να καταναλώσουν και πότε να την καταναλώσουν.

Υπολογισμός. Η λειτουργία ενός συστήματος μετρίου μεγέθους απαιτεί το συντονισμό δεκάδων έως εκατοντάδων γεννητριών με εκατοντάδες χιλιάδες έως εκατομμύρια καταναλωτές για πολλαπλές χρονικές περιόδους. Το σύστημα πρέπει να κατανείμει πολλαπλούς πόρους (ενέργεια, εφεδρεία, μεταφορά) λαμβάνοντας υπόψη σύνθετους περιορισμούς. Είναι τεχνικά δύσκολο να επιλυθεί αυτό το πρόβλημα κατανομής πόρων κεντρικά σε χρόνους που είναι αποδεκτοί για τη λειτουργία του συστήματος (π.χ. σε λίγα λεπτά). Μια αγορά επιλύει αυτό το πρόβλημα με αποκεντρωμένο τρόπο. Παρόλο που η παρούσα λειτουργία των συστημάτων ηλεκτρισμού απαιτεί αυτός ο υπολογισμός να πραγματοποιείται κεντρικά, θεωρητικά είναι εφικτό να είναι αποκεντρωμένος, και η ακαδημαϊκή έρευνα βρίσκεται σε εξέλιξη προς αυτή την κατεύθυνση. Η πρόοδος προς αυτή την κατεύθυνση μπορεί να επιτρέψει σε μικρότερης κλίμακας και πολυπληθείς παραγωγούς (π.χ. οικιακές ηλιακές εγκαταστάσεις) και καταναλωτές (π.χ. ηλεκτρικά οχήματα) να συμμετέχουν ενεργά στη λειτουργία του συστήματος. Ο Adam Smith εξηγεί αυτήν την ισοδυναμία διαισθητικά ανφερόμενος στο "αόρατο χέρι" της αγοράς. Μια ερμηνεία του βέλτιστου χεριού από αλγοριθμικής άποψης είναι ότι η αγορά αποσυνθέτει το πρόβλημα της κατανομής πόρων σε υποπροβλήματα μεγιστοποίησης κέρδους, με τις τιμές της αγοράς να λειτουργούν ως το σήμα που συντονίζει τους πράκτορες της αγοράς, των οποίων ο στόχος είναι να μεγιστοποιήσουν το ιδιωτικό τους κέρδος.

Μακροπρόθεσμα σήματα. Τα ρυθμιζόμενα μονοπώλια προσφέρουν περιορισμένα κίνητρα για καινοτομία, εφόσον το κέρδος που επιτυγχάνεται από την πώληση ηλεκτρισμού ρυθμίζεται από την κυβέρνηση και προσαρμόζεται ούτως ώστε να παρέχει μια λογική απόδοση στο κεφάλαιο που επενδύεται. Οι τεχνολογικές καινοτομίες σε ένα ρυθμιζόμενο περιβάλλον δεν έχουν μια ξεκάθαρη επιρροή στο μακροπρόθεσμο κέρδος, συνεπώς το κίνητρο της καινοτομίας εν πολλοίς εξανεμίζεται. Απεναντίας, ορισμένοι ρυθμιζόμενοι τομείς της αγοράς έχουν μερικές φορές κίνητρο να επενδύουν σε περιττό εξοπλισμό ή σε υπερβολικά ακριβό εξοπλισμό προκειμένου να δείξουν αύξηση στις κεφαλαιουχικές επενδύσει, και συνεπώς στα ρυθμιζόμενα κέρδη. Απεναντίας, μια αγορά ευνοεί καινοτομίες οι οποίες προσφέρουν ένα ανταγωνιστικό πλεονέκτημα στους παραγωγούς. Μειώνοντας τα κόστη τους, οι παραγωγοί είναι σε θέση να αυξήσουν το κέρδος τους, και να επωφεληθούν από την αξία που οι ίδιοι δημιουργούν. Παρομοίως, όταν ρυθμίζονται οι πάροχοι, είναι περιορισμένα τα κίνητρα δημιουργίας προστιθέμενης αξίας για το σύστημα. Η ενεργή συμμετοχή της ζήτησης είναι σε θέση να δημιουργήσει προστιθέμενη αξία στο σύστημα, ιδίως σε ένα περιβάλλον μεγάλης κλίμακας διείσδυσης ανανεώσιμων πηγών ενεέργειας. Η προστιθέμενη αυτή αξία μπορεί να επωφελήσει απευθείας τους καταναλωτές σε ένα περιβάλλον αγοράς.

3.2.1 Χρηματιστήρια με απλά και σύνθετα προϊόντα

Ο στόχος του σχεδιασμού μιας αγοράς είναι η ανακάλυψη μιας ισορροπίας με αποδοτικά βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα κίνητρα. Μια σημαντική ερώτηση είναι πώς σχεδιάζονται οι κανόνες για να φτάσει κανείς σε αυτήν την ισορροπία. Η οργάνωση των κανόνων αγοραπωλησίας είναι ερώτημα σχεδιασμού της αγοράς.

Η απλούστερη δυνατή οργάνωση της αγοράς βασίζεται σε διμερείς αγοραπωλησίες. Πιο κεντρικές μορφές αγορών είναι τα χρηματιστήρια με απλά (exchanges) και σύνθετα (pools) προϊόντα, στα οποία θα αναφερόμαστε πλέον εν συντομία ως απλά και σύνθετα χρηματιστήρια. Τα απλά χρηματιστήρια βασίζονται σε δημοπρασίες για την αγοραπωλησία προϊόντων που κυβερνώνται από απλούς κανόνες προσφορών και εκκαθάρισης. Τα σύνθετα χρηματιστήρια χρησιμοποιούν σύνθετες προσφερές που αποτελούνται από πολλά στοιχεία προκειμένου και συναλλάσουν ταυτόχρονα πολλαπλά προϊόντα.

Παράδειγμα 3.10: Έστω μια γεννήτρια με κόστος εκκόνησης 2400 €, χωρητικότητα

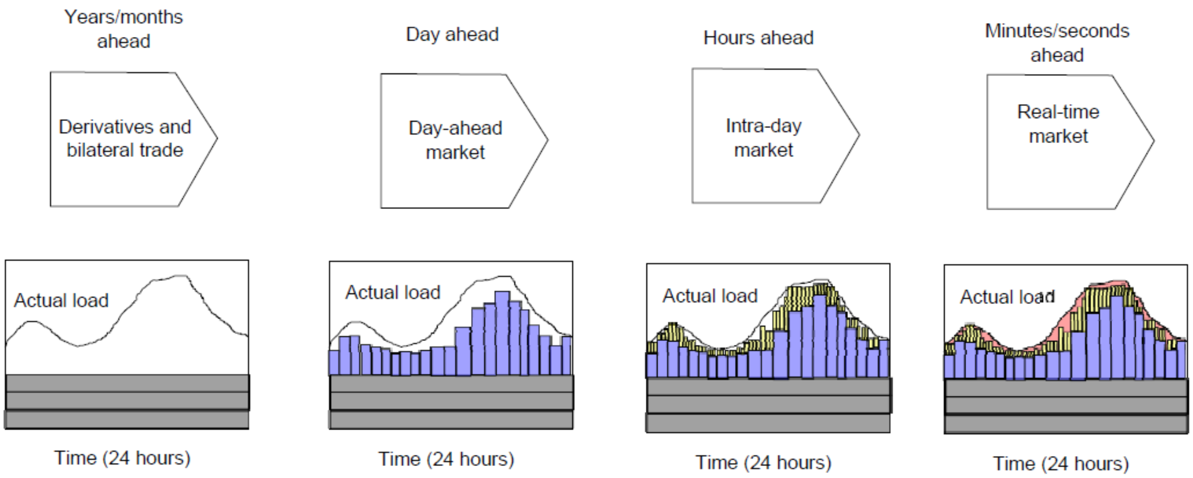
10 MW και κόστος καυσίμου 20 €/MWh. Σε ένα σύνθετο χρηματιστήριο, η γεννήτρια υποβάλει το κόστος εκκίνησης και το κόστος καυσίμου, και λαμβάνει την τιμή της αγοράς, καθώς και μια παράπλευρη πληρωμή, αν αυτή είναι απαραίτητη για να μην υποστεί οικονομική απώλεια. Απεναντίας, η γεννήτρια πληρώνεται μόνο την τιμή της αγοράς σε ένα απλό χρηματιστήριο. Έστω ότι η γεννήτρια εξετάζει το να παράγει ή όχι την επόμενη μέρα. Σε ένα σύνθετο χρηματιστήριο, το κέρδος της γεννήτριας ως συνάρτηση της τιμής ενέργειας P είναι $\max((P-20)\cdot 10\cdot 24-2400{,}0)$ €/ημέρα υπό την προϋπόθεση ότι η γεννήτρια υποβάλει αληθή προσφορά. Αν η γεννήτρια κληθεί να παράγει, το σύνθετο χρηματιστήριο πρέπει να πληρώσει τη γεννήτρια μια παράπλευρη πληρωμή ίση με $\max((P-20)\cdot 10\cdot 24-2400{,}0)$ για ολόκληρη την ημέρα προκειμένου να διασφαλίσει ότι η γεννήτρια δεν υφίσταται οικονομικές απώλειες.Σε ένα απλό χρηματιστήριο, η γεννήτρια πρέπει να υποβάλει προσφορά τουλάχιστον 30 €/MWh προκειμένου να διασφαλίσει ότι δε θα υποστεί οικονομικές απώλειες αν κληθεί να παράγει.

■

Ένα πλεονέκτημα των διμερών αγορών είναι η ευελιξία. Οι συναλλασσόμενοι μπορούν να ορίσουν συμβόλαια που είναι προσαρμοσμένα στις ανάγκες τους. Το πλεονέκτημα των χρηματιστηρίων είναι ότι η τιμή είναι δημόσια, δεν υπάρχει κίνδυνος αθέτησης από τους συναλλασόμενους γιατί το χρηματιστήριο λειτουργεί ως συμβαλόμενος για την κάθε πλευρά, και οι αγορές είναι ρευστές εφόσον πολλοί συμμετέχοντες εμπλέκονται. Σημειώνεται ότι οι αγορές μπορούν να οργανωθούν ούτως ώστε να συνδυάζουν μία ή πολλαπλές μορφές συναλλαγών. Για παράδειγμα, οι ορισμένα χρηματιστήρια ενέργειας συνδυάζουν διμερείς συναλλαγές προθεσμιακών συμβολαίων με δημοπρασίες επόμενης ημέρας.

Οι αγορές ηλεκτρισμού τείνουν να είναι λιγότερο συγκεντρωμένες σε χρονικά διαστήματα που προηγούνται σημαντικά του πραγματικού χρόνου, και πιο συγκεντρωμένες όσο πλησιάζει ο πραγματικός χρόνος, όπως υποδεικνύει το Σχήμα 21. Η αγοραπωλησία ενέργειας είναι διμερής, μέσω χρηματοοικονομικών συμβολαίων, στους μήνες ή τα έτη πριν τη λειτουργία του συστήματος. Στο στάδιο επόμενης ημέρας οι συμμετέχοντες προσαρμόζουν τις θέσεις τους βάσει προγνώσεων επόμενης ημέρας. Η διημερήσια αγορά χρησιμοποιείται για την περαιτέρων προσαρμογή των θέσεων λίγες ώρες πριν τη λειτουργία. Η αγορά πραγματικού χρόνου χρησιμοποιείται για την εξισορρόπηση της παραγωγής και της κατανάλωσης σε πραγματικό χρόνο, ενεργοποιώντας εφεδρείες και άλλους πόρους ταχείας απόκρισης που είναι διαθέσιμοι σε πραγματικό χρόνο. Οι διμερείς συναλλαγές είναι αδύνατες σε πραγματικό χρόνο διότι η προσφορά και κατανάλωση ισχύος πρέπει να εξισορροπούνται σε στιγμιαία βάση.

Σχήμα 21: Η λειτουργία αγορών ηλεκτρισμού σε ακολουθία.



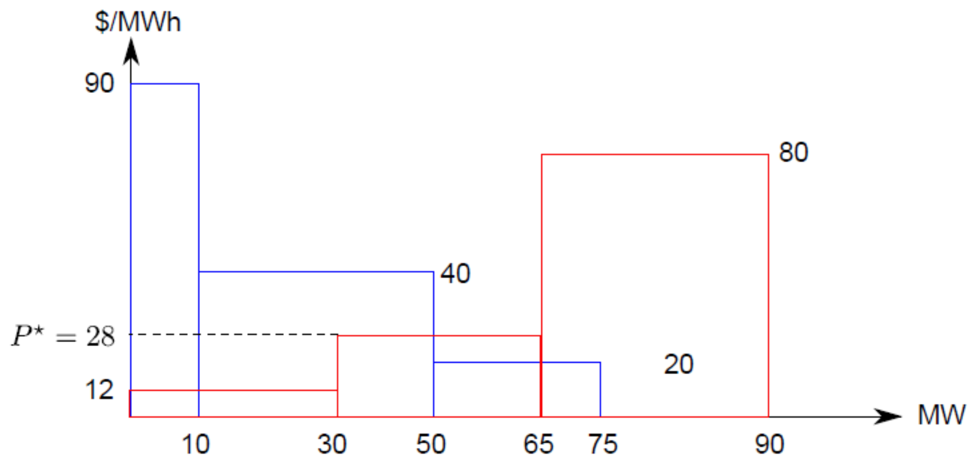
3.2.2 Δημοπρασίες ενιαίας τιμής και δημοπρασίες πληρωμής στην τιμή προσφοράς

Οι αγορές ηλεκτρικής ενέργειας χρησιμοποιούν δημοπρασίες για τη συναλλαγή αγαθών. Οι δημοπρασίες μπορούν να οργανωθούν με διάφορους τρόπους. Δύο από τις επικρατέστερες μορφές δημοπρασιών που χρησιμοποιούνται στις αγορές ηλεκτρισμού είναι οι δημοπρσασίες ενιαίας τιμής (uniform price auctions) και οι δημοπρασίες πληρωμής στην τιμή προσφοράς (pay-as-bid (PAB) auctions). Χάριν συντομίας, αναφερόμαστε μετέπειτα στις ημοπρασίες πληρωμής στην τιμή προσφοράς ως δημοπρασίες PAB.

Στις **δημοπρασίες ενιαίας τιμής**, οι πωλητές υποβάλουν προσφορές πώλησης: ζεύγη τιμής και ποσοότητας, που αντιπροσωπεύουν την τιμή στην οποία είναι διατεθιμένοι να πωλήσουν μια ορισμένη ποσότητα ενέργειας. Οι αγοραστές υποβάλουν προσφορές αγοράς: ζεύγη τιμής και ποσότητας που υποδεικνύουν την τιμή που είναι διατεθιμένοι να πληρώσουν για μια ορισμένη ποσότητα ενέργειας. Η τομή των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης δίνει την τιμή εκκαθάρισης P και τις ποσότητες που πρέπει να πωληθούν και να αγοραστούν. Προσφορές πώλησης οι οποίες είναι *μέσα στην τιμή* (in the money, δηλαδή προσφέρονται σε τιμή που δεν ξεπερνάει το P) πρέπει να προσφέρουν την υποσχόμενη ενέργεια, και πληρώνονται P €/MWh. Προσφορές πώλησης οι οποίες είναι έξω από την τιμή (out of the money) δε δικαιούνται να πουλήσουν, και δε λαμβάνουν κάποια πληρωμή. Προσφορές αγοράς οι οποίες είναι μέσα στην τιμή (δηλαδή των οποίων η τιμή δεν είναι χαμηλότερη του P) είναι υποχρεωμένες να αγοράσουν, και να πληρώσουν P €/MWh. Προσφορές αγοράς οι οποίες είναι έξω από την τιμή δε δικαιούνται να αγοράσουν, και δεν πληρώνουν τίποτα.

Παράδειγμα 3.11: Έστω οι προσφορές που παρουσιάζονται στο Σχήμα 22, για την αγοραπωλησία ισχύος σε διάστημα 5 λεπτών. Ένας παραγωγός υποβάλει τρεις προσφορές πώλησης: 30 MW στα 12 €/MWh, 35 MW στα 28 €/MWh, και 25 MW στα 80 €/MWh. Ένας καταναλωτής υποβάλει τρεις προσφορές αγοράς: 10 MW στα 90 €/MWh, 40 MW στα 40 €/MWh, 25 MW στα 20 €/MWh. Η τιμή εκκαθάρισης της αγοράς είναι $P^* = 28$ €/MWh. Ο παραγωγός είναι υποχρεωμένος να προσφέρει 50 MW ισχύος για 5 λεπτά, και πληρώνεται $(50\ \mathrm{MW}) \cdot \left(28 \frac{€}{\mathrm{MWh}}\right) \cdot \left(\frac{1}{12}\mathrm{h}\right) = 117$ €. Ο καταναλωτής πληρώνει 117 €, και είναι υποχρεωμένος να καταναλώσει 50 MW ισχύος για 5 λεπτά. Σημειώνεται ότι αν οι ίδιες προσφορές υποβληθούν από τρεις ξεχωριστούς παραγωγούς (στον καθένα εκ των οποίων ανήκει μια διαφορετική γεννήτρια) και τρεις διαφορετικούς καταναλωτές (στον καθένα από τους οποίους ανήκει ένα διαφορετικό φορτίο) η έκβαση της δημοπρασίας είναι ακτιβώς η ίδια.

Σχήμα 22: Η δημοπρασία ενιαίας τιμής του παραδείγματος 3.11. Οι προσφορές πώλησης παρουσιάζονται με κόκκινο χρώμα, οι προσφορές αγοράς με μπλε. Το P είναι η τιμή εκκαθάρισης της αγοράς.*



■

Η δημοπρασία ενιαίας τιμής, η οποία χρησιμοποιείται για την εκκαθάριση των περισσοτέρων αγορών επόμενης ημέρας και αγορών πραγματικού χρόνου, είναι μια γενίκευση της δημοπρασίας δεύτερης τιμής του Vickrey σε πολλαπλά ομοιογενή αγαθά. Σε μια δημοπρασία δεύτερης τιμής για την παροχή ενός μοναδικού τεμαχίου, αυτός που υποβάλει τη χαμηλότερη προσφορά πληρώνεται για να παράσχει το αγαθό το οποίο τίθεται σε δημοπρασία, και πληρώνεται την τιμή που έχει υποβάλει η δεύτερη φθηνότερη προσφορά. Ο μηχανισμός αυτός ωθεί τους συμμετέχοντες να αποκαλύψουν το αληθινό κόστος στο οποίο μπορούν να παράσχουν το αγαθό που δημοπρατείται. Η διαίσθηση του αποτελέσματος είναι η ακόλουθη. Αν ένας συμμετέχων αποπειραθεί να υποβάλει κόστος χαμηλότερο του αληθούς (με την ελπίδα να καταφέρει μια πιο ανταγωντιστική προσφορά), τότε θα πρέπει να ελπίζει ότι δε θα κερδίσει τη δημοπρασία, γιατί διατρέχει το ρίσκο να την κερδίσει σε τιμή χαμηλότερη του πραγματικού του κόστους. Από την άλλη, ο συμμετέχων επίσης δεν έχει κίνητρο να υποβάλει προσφορά μεγαλύτερη του πραγματικού του κόστους (με σκοπό να αυξήσει την τιμή), γιατί αυτό δεν έχει επίδραση στην τιμή (είναι η τιμή του επόμενου πιο ακριβού συμμετέχοντα που καθορίζει την τιμή εκκαθάρισης). Αντιθέτως, ο συμμετέχων αυξάνει έτσι τις πιθανότητες να χάσει τη δημοπρασία.

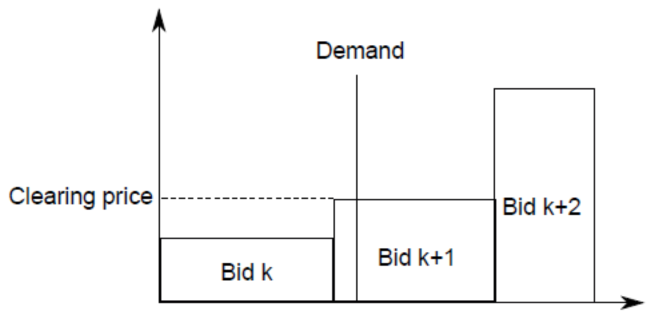
Παράδειγμα 3.12:

Pending

■

Η τομή των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης είναι μια γενίκευση της δημοπρασίας Vickrey για την πώληση πολλαπλών ομοιογενών αγαθών, εφόσον η τιμή που ορίζεται από τη δημοπρασία είναι αυτή της χαμηλότερης προσφοράς που δε γίνεται δεκτή (βλέπε Σχήμα 23). Η γενίκευση δεν είναι ακριβής, και μάλιστα υπάρχει ένας πολύ πιο περίπλοκος μηχανισμός για την εκκαθάριση της δημοπρασίας ούτως ώστε οι πράκτορες να έχουν το κίνητρο να υποβάλουν αληθείς προσφορές[5], ωστόσο η δημοπρασία ενιαίας τιμής προτιμάται από αυτήν την εναλλακτική λόγω της απλότητάς της.

Σχήμα 23: Οι δημορασίες ενιαίας τιμής είναι μια γενίκευση των δημοπριασιών δεύτερης τιμής όταν πωλούνται πολλαπλά ομοιογενή αγαθά. Η φθηνότερη προσφορά που χάνει τη δημοπρασία είναι η προσφορά που γίνεται μερικώς δεκτή.



Μια εναλλακτική στη δημοπρασία ενιαίας τιμής που χρησιμοποιείται συχνά στις αγορές ηλεκτρισμού είναι η **δημοπρασία PAB**. Στις δημοπρασίες PAB, οι προσφορές επιλέγονται ούτως ώστε να μεγιστοποιήσουν τα ωφέλη από την αγοραπωλησία και οι συμμετέχοντες λαμβάνουν την τιμή που προσφέρουν. Οι επιφυλάξεις που ανακύπτουν από τις δημοπρασίες ενιαίας τιμής πηγάζουν από το γεγονός ότι οι τιμές θεωρούνται πιο μεταβλητές, εφόσον η πιο ανταγωνιστική προσφορά που δε γίνεται δεκτή θέτει την τιμή για όλους τους παραγωγούς. Η τιμολόγηση PAB εξισορροπεί αυτό το φαινόμενο, εφόσον, ακόμη και αν η πιο ανταγωνιστική προσφορά που δε γίνεται δεκτή έχει σημαντικές διακυμάνσεις, αυτό δε θα καθορίσει την τιμή για τους υπόλοιπους συμμετέχοντες. Μια ανεπιθύμητη συνέπεια της τιμολόγησης ενιαίας τιμής είναι η υποβολή προσφορών σε σχήμα μπαστουνιού του χόκεϊ (hockeystick bidding), όπου οι συμμετέχοντες υποβάλουν όλη την καμπύλη κόστους αληθώς, με εξαίρεση μια φέτα στο τέλος της καμπύλης προσφοράς την οποία υποβάλουν σε ψηλή τιμή. Η ελπίδα των παραγωγών είναι πως η προσφορά αυτή γίνεται δεκτή ενίοτε, οδηγώντας σε υψηλά κέρδη. Ένα επιπλέον επιχείρημα εναντίον της δημοπρασίας ενιαίας τιμής είναι πώς οι παραγωγοί χαμηλού κόστους εισπράττουν "άδικα" κέρδη, ωστόσο το επιχείρημα αυτό αγνοεί την ανάγκη των παραγωγών να ανακτήσουν τα πάγια κόστη τους. Μια δυσκολία που σχετίζεται με την τιμολόγηση ενιαίας τιμής είναι η διάκριση μεταξύ υψηλών τιμών που οφείλονται σε στρατηγική συμπεριφορά από τις υψηλές τιμές που οφείλονται σε σπανιότητα (ανεπαρκή χωρητικότητα), δεδομένου ότι τέτοιες υψηλές τιμές είναι απαραίτητες για να επιβιώσουν οικονομικά οι τεχνολογίες αιχμής. Αντιθέτως, η τιμολόγηση PAB θεωρείται ότι οδηγεί σε έλλειψη αποδοτικότητας χωρίς να επιτυγχάνει μια μείωση τιμών σε σχέση με την τιμολόγηση ενιαίας τιμής, διότι οι συμμετέχοντες προσπαθούν ούτως ή αλλιώς να υποβάλουν προσφορές κοντά στην τιμή εκκαθάρισης, αλλά μερικές φορές αστοχούν στην πρόβλεχή τους, με αποτέλεσμα η οικονομική κατανομή να μην είναι οικονομικά αποδοτική.

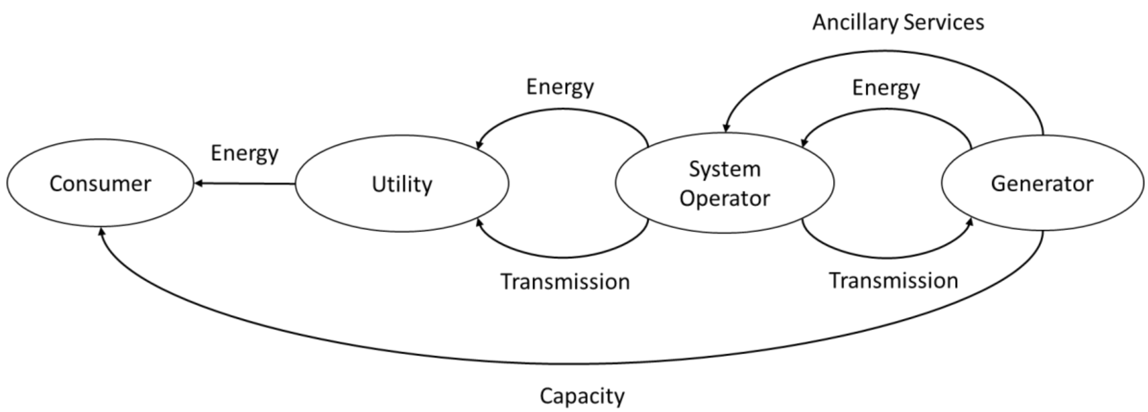
3.2.3 Προσχέδιο μιας αγοράς ηλεκτρισμού

Η ενότητα αυτή περιγράφει τη δομή μια τυπικής αγοράς ηλεκτρισμού. Αυτό συμπεριλαμβάνει τα πιο σημαντικά προϊόντα τα οποία συναλλάσονται στην αγορά, καθώς και τους φορείς που συμμετέχουν

[5] Ο μηχανισμός αυτός ονομάζεται μηχανισμός Vickrey-Clarke-Groves.

στην αγορά. Ένα απλοποιημένο διάγραμμα των συμμετεχόντων και των προϊόντων παρουσιάζονται στο Σχήμα 24.

Σχήμα 24: Το διάγραμμα μιας αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας. Τα βέλη υποδεικνύουν την πώληση ενός προϊόντος, το οποίο υποδεικνύεται στην ονομασία του βέλους. Ο πράκτορας που πουλάει είναι στην ουρά του βέλους, ο πράκτορας που αγοράζει είναι στην αιχμή του βέλους.



Η αγορά ηλεκτρικής ενέργειας κατηγοριοποιείται μεταξύ αγοράς λιανικής και χονδρικής. Όπως οι αγορές λιανικής για άλλα αγαθά, η **αγορά λιανικής ηλεκτρικής ενέργειας** χρησιμοποιείται για την πώληση ηλεκτρισμού σε μικρούς καταναλωτές, κατά κανόνα εμπορικούς και οικιακούς. Η λειτουργία αυτή συντελείται από φορείς εκπροσώπησης φορτίου, που αναφέρονται και ως πάροχοι. Οι πάροχοι αγοράζουν ηλεκτρισμό από την αγορά χονδρεμπορικής και τον πωλούν στους εμπορικούς και οικιακούς καταναλωτές σε μια τιμή που συχνά είναι αποκομμένη από την τιμή πραγματικού χρόνου της χονδρεμπορικής αγοράς ηλεκτρισμού. Κατά κανόνα, η τιμή αυτή είναι σταθερή, ή αλλάζει ανάλογα με την ώρα της ημέρας, αν και υπάρχουν και πιο εξελιγμένα συμβόλαια τα οποία περιγράφονται σε επόμενα κεφάλαια. Οι ταρίφες λιανικής συμπεριλαμβάνουν επίσης συχνά χρεώσεις για την κατανάλωση αιχμής, προκειμένου να ανακτήσουν το κόστος κεφαλαίου για την επένδυση σε γεννήτριες και δίκτυα που χρησιμοποιούνται για να εξυπηρετηθεί η ζήτηση αιχμής. Οι χρεώσεις των δικτύων διανομής είναι επίσης ένα σημαντικό στοιχείο των χρεώσεων λιανικής. Οι λογαριασμοί λιανικής χρησιμοποιούνται επίσης για να ανακτώνται χρηματικές ελλείψεις που προκύπτουν στις αγορές χονδρικής, συνεπώς η αγορά λιανικής χρησιμοποιείται και για την ανάκτηση λειτουργικών εξόδων που δεν καλύπτονται στην αγορά χονδρικής (όπως για παράδειγμα οι παράπλευρες πληρωμές παραγωγών).

Στη **χονδρεμπορική αγορά ηλεκτρικής ενέργειας** η ενέργεια αγοραπωλείται σε μεγάλες ποσότητες μεταξύ παραγωγών και παρόχων. Η αγοραπωλησία αυτή απαιτεί ένα δίκτυο για να μεταφερθεί, καθώς και ένα αξιόπιστο σύστημα. Συνεπώς, η χονδρεμπορική αγορά, επιπλέον της ενέργειας, συναλλάσει και υπηρεσίες πρόσβασης στο δίκτυο καθώς και επικουρικές υπηρεσίες. Τρεις φορείς εμπλέκονται κατά κόρον στην αγορά χονδρεμπορικής: οι παραγωγοί, ο διαχειριστής συστήματος, και οι πάροχοι ή καταναλωτές χονδρικής που αγοράζουν ενέργεια απευθείας από την αγορά. Ο διαχειριστής συστήματος είναι υπεύθυνος για τη λειτουργία του συστήματος, και για αυτόν το σκοπό αγοράζει εφεδρείες εκ μέρους των καταναλωτών και επίσης διαχειρίζεται το δίκτυο μεταφοράς. Σε ορισμένες αγορές, ο διαχειριστής συστήματος επίσης πουλά απευθείας τη χωρητικότητα του δικτύου μεταφοράς, λειτουργώντας μια αγορά για πώληση δικαιωμάτων πρόσβασης στο σύστημα μεταφοράς, ενώ σε άλλες αγορές ο διαχειριστής του συστήματος πουλά πρόσβαση στο δίκτυο έμμεσα, αλλάζοντας τα προγράμματα παραγωγής των γεννητριών προκειμένου να διασφαλίσει ότι οι περιορισμοί του δικτύου μεταφοράς γίνονται σεβαστοί. Οι παραγωγή παρέχουν ενέργεια και επικουρικές υπηρεσίες στην αγορά. Οι επικουρικές υπηρεσίες συμπεριλαμβάνουν ένα σύνολο εφεδρειών με διάφορους χρόνους απόκρισης, όπως έχει συζητηθεί προηγουμένως. Προκειμένου να πωλούν ενέργεια στην αγορά, οι παραγωγοί είναι υποχρεωμένοι να αγοράσουν χωρητικότητα στις γραμμές μεταφοράς, ώστε να διασφαλίσουν ότι η ενέργεια η οποία εγχύεται στο σύστημα μπορεί να μεταφερθεί μέσω του δικτύου στους καταναλωτές. Παρομοίως, οι πάροχοι αγοράζουν ενέργεια αλλά χρειάζεται επίσης να αγοράσουν πρόσβαση στις γραμμές μεταφοράς οι οποίες μεταφέρουν την ισχύ στις τοποθεσίες των καταναλωτών. Στο μέλλον, προβλέπεται πως ορισμένες επικουρικές υπηρεσίες μπορούν να προσφέρονται από καταναλωτές χονδρικής ή συλλογές οικιακών και εμπορικών φορτίων που συντονίζονται από ένα συναθροιστή.

Σε ορισμένες αγορές, η χωρητικότητα των γεννητριών συναλλάσεται ξεχωριστά, επιπλέον της συναλλαγής ενέργειας, επικουρικών υπηρεσιών και του δικτύου. Ο στόχος της εισαγωγής μιας επιπλέον αγοράς για τη χωρητικότητα γεννητριών είναι να διασφαλιστεί επάρκεια ισχύος (resource adequacy). Η επάρκεια αναφέρεται στην ύπαρξη επαρκούς δυναμικότητας γεννητριών στο σύστημα ώστε να μπορούν να καλυφθούν οι μακροπρόθεσμες ανάγκες του συστήματος. Εφόσον η χονδρεμπορική αγορά ενδέχεται να μην οδηγεί σε επαρκή κερδοφορία ώστε οι γεννήτριες να δύνανται να επενδύσουν σε επαρκή εξοπλισμό παραγωγής, μια ξεχωριστή αγορά για χωρητικόττηα δημιουργεί μια επιπλέον ροή εσόδων για τους παραγωγούς, οι οποίοι πληρώνονται για κάθε MW αξιόπιστης χωρητικότητας που είναι σε θέση να προσφέρουν στο σύστημα. Αυτό το προϊόν χωρητικότητας μπορεί να χρεώνεται στους καταναλωτές μέσω λογαριασμών λιανικής που συμπεριλαμβάνουν χρεώσεις για την κατανάλωση αιχμής.

Το διάγραμμα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 24 δεν προορίζεται να καλύπτει όλες τις δυνατές περιπτώσεις σχεδιασμού μιας αγοράς. Είναι απεναντίας ένα σφιαγράφημα ενός βασικού σκελετού, και ένα σημείο εκκίνησης βάσει του οποίου μπορούν να συγκριθούν διάφορες εναλλακτικές. Για παράδειγμα, (i) μπορεί να υπάρχει μια απευθείας, διμερής πώληση ενέργειας από παραγωγούς σε καταναλωτές, χωρίς να περνάει από την αγορά; (ii) μπορεί να υπάρχει μια αγοραπωλησία εφεδρικών υπηρεσιών από το διαχειριστή συστήματος ή από τους παραγωγούς προς τους παρόχους, το οποίο υποδεικνύει ότι οι πάροχοι έχουν υποχρέωση να αγοράσουν μέρος των εφεδρικών υπηρεσιών που είναι απαραίτητες για την ασφαλή λειτουργία του συστήματος; (iii) μπορεί να υπάρχει μια πώληση χωρητικότητας από τους παραγωγούς στους παρόχους, το οποίο υποδεικνύει ότι οι πάροχοι είναι υποχρεωμένοι να αγοράσουν ένα μέρος της δυναμικότητας του συστήματος απευθείας από τους παραγωγούς, προκειμένου να συνεισφέρουν στην επάρκεια του συστήματος; (iv) μπορεί να συμπεριληφθεί μια πώληση επικουρικών υπηρεσιών από τους παρόχους στο διαχειριστή του συστήματος, το οποίο υποδεικνύει ότι οι πάροχοι είναι σε θέση να ελέγξουν την κατανάλωση των φορτίων, προκειμένου να προσφέρουν εφεδρείες στο σύστημα. Σημειώνεται, επιπλέον, πως ορισμένες επικουρικές υπηρεσίες που προσφέρονται από το διαχειριστή του συστήματος (π.χ. η άεργος ισχύς) αγνοούνται στο διάγραμμα, λόγω του δευτερεύοντος ρόλου τους στην αγορά.

3.2.4 Παράδειγμα: Καλιφόρνια και κεντροδυτική Ευρώπη

Οι αγορές ηλεκτρικής ενέργειας διαφοροποιούνται αναλόγως του πώς οι πράκτορες αλληλεπιδρούν (ποιος πουλά τι σε ποιον), αλλά επίσης ως προς τους κανόνες των αγοραπωλησιών. Οι παραλλαγές αυτές μπορούν να έχουν δραματικές επιπτώσεις ως προς την επίδοση της αγοράς. Στο κεφάλαιο αυτό συγκρίνονται δύο παραδείγματα ιδιαιτέρως διαφορετικών σχεδιασμών: η αγορά της Καλιφόρνια, και η αγορά της κεντροδυτικής Ευρώπης (Central West Europe, ΚΔΕ).

Οι βασικές διαφορές αυτών των σχεδιασμών αγοράς είναι (i) ο βαθμός αποκέντρωσης της αγοραπωλησίας ενέργειας (το ένα είναι χρηματιστήριο με σύνθετα προϊόντα, το άλλο είναι χρηματιστήριο με απλά προϊόντα), (ii) ο βαθμός συντονισμού στη συνναλαγή ενέργειας, εφεδρειών και δικτύων μεταφοράς, και (iii) η διαχείριση των περιορισμών του συστήματος μεταφρροας. Το δεύτερο και το τρίτο σημείο σχετίζονται με μια ακόμη σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο αγορών, συγκεκριμένα το διαχωρισμό μεταξύ της αγοραπωλησία ενέργειας και της λειτουργίας του δικτύου (οι δύο αυτές λειτουργίες εκτελούνται από το διαχειριστή του συστήματος στην Καλιφόρνια, ενώ εκτελούνται ξεχωριστά στην περίπτωση της ΚΔΕ).

Χρηματιστήρια με σύνθετα ή απλά προϊόντα. Η αγορά επόμενης ημέρας και διημερήσια αγορά της Καλιφόρνια λειτυοργεί ως σύνθετο χρηματιστήριο. Αυτό σημαίνει ότι οι παραγωγοί υποβάλουν λεπτομερείς πληροφορίες για τους τεχνικούς τους περιορισμούς και τα κόστη τους. Απεναντίας, στο Ευρωπαϊκό χρηματιστήριο οι γεννήτριες υποβάλουν απλές προσφορές (ή πιο σύνθετα προϊόντα) που εσωτερικεύουν τους περιορισμούς και τα κόστη τους. Ένας σημαντικός λόγος για την ύπαρξη αυτών των παραλλαγών είναι οι σύνθετοι περιορισμοί δέσμευσης μονάδων και δυναμικοί περιορισμοί των γεννητριών, καθώς και το μη κυρτό κόστος τους (για παράδειγμα, κόστος εκκίνησης και κόστος ελάχιστης φόρτισης). Τα απλά όπως και τα σύνθετα χρηματιστήρια επιλύουν ένα πρόβλημα δυναμικής βελτιστοποίησης για την ακόλουθη μέρα, και οδηγούν σε ένα πρόγραμμα το οποίο είναι βέλτιστο, δεδομένων των τεχνικοοικονομικών στοιχείων που έχουν υποβάλει οι συμμετέχοντες. Το βασικό μέλημα στη λειτουργία μιας απλής ή σύνθετης δημοπρασίας είναι να προσδιορτιστεί μια τιμή εκκαθάρισης, πληρωτέα ανά μονάδα ισχύος ανά ώρα της ημέρας, τέτοια ώστε οι παραγωγοί να αντιδράσουν οικειοθελώς σε αυτήν την τιμή με τρόπο που να είναι συμβατός με το κοινωνικά βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής. Το έργο αυτό απλοποιείται σε κάποιο βαθμό στα απλά χρηματιστήρια γιατί ο προσδιορισμός της τιμής εκκαθάρισης είναι θέμα του να βρεθεί η τομή της καμπύλης προσφοράς και ζήτησης, ωστόσο το έργο αυτών που υποβάλουν τις προσφορές γίνεται πιο σύνθετο γιατί καλούνται να εσωτερικεύσουν, στις απλές προσφορές που υποβάλουν στην αγορά, τη σύνθετη πραγματικότητα που κυβερνά τη λειτουργία του εξοπλισμού τους. Στα σύνθετα χρηματιστήρια, η πολυπλοκότητα αυτή μεταφέρεται σε έναν αλγόριθμο προγραμματισμού επόμενης ημέρας, ο οποίος προγραμματίζει την παραγωγή και καθορίζει μια τιμή η οποία ωθεί τους συμμετέχοντες στο να ανταποκριθούν βέλτιστα. Το σύνθετο χρηματιστήριο είναι πιο περίπλοκο από την άποψη του λειτουργού της αγοράς, διότι (i) το πρόβλημα προγραμματισμού που επιλύει ο λειτουργός της αγοράς αντιπροσωπεύει τα σύνθετα τεχνικοοικονομικά χαρακτηριστικά των παραγωγών, και (ii) συχνά δεν υπάρχει τιμή η οποία μπορεί να ωθήσει όλους τους συμμετέχοντες να αντιδράσουν βέλτιστα. Στην περίπτωση αυτή, παράπλευρες πληρωμές είναι απαραίτητες για να αναπληρωθούν τα αρνητικά κέρδη (ή τα χαμένα κέρδη) των συμμετεχόντων. Τα απλά και σύνθετα χρηματιστήρια συγκρίνονται στο 7.

Ταυτόχρονη ή κατά σειρά εκκαθάριση. Η δεύτερη βασική διαφορά μεταξύ των αγορών της Καλιφόρνια και της ΚΔΕ είναι ο συντονισμός της εκκαθάρισης ενέργειας με την εκκαθάριση του δικτύου μεταφοράς και εφεδρειών. Το μοντέλο δέσμευσης μονάδων επόμενης ημέρας που επιλύεται στην αγορά της Καλιφόρνια καθορίζει τα προγράμματα παραγωγής των γεννητριών, την παροχή εφεδρειών, και την πρόσβαση στο δίκτυο ταυτόχρονα. Απεναντίας, το Ευρωπαϊκό χρηματιστήριο εκκαθαρίζει την ενέργεια χωρίς να αντιπροσωπεύει τις εφεδρείες, και με μια αδρή αναπαράσταση του δικτύου μεταφοράς. Όπως έχουμε δει προηγουμένως στο κεφάλαιο, το δίκτυο μεταφοράς δεν μπορεί να απεικονιστεί επαρκώς αν δεν περιγραφούν οι νόμοι του Kirchhoff. Το Ευρωπαϊκό χρηματιστήριο αντιπροσωπεύει τους περιορισμούς μεταξύ χωρών χρησιμοποιώντας μια απλοποιημένη προσέεγιση των φυσικών νόμων της ροής φορτίου, και αγνοεί τους περιορισμούς μεταφοράς εντός των συνόρων ενός Κράτους Μέλους. Και για τους δύο αυτούς λόγους, οι αγοραπωλησίες επόμενης ημέρας δύνανται να παραβιάσουν τους φυσικούς περιορισμούς του δικτύο. Οι παραβιάσεις αυτές διορθώνονται από το διαχειριστή συστήματος την ημέρα λειτουργίας μέσω **ανακατανομής** (redispatch), δηλαδή της αλλαγής του σημείου λειτουργίας των γεννητριών προκειμένου να ανακουφιστεί η συμφόρηση του δικτύου. Παρομοίως, οι παραγωγοί αποφασίζουν πόσες εφεδρείες παρέχονται στο σύστημα, *πριν* τα προγράμματα παραγωγής ενέργειας καθοριστούν στην απλή δημοπρασία. Εν γένει, η ταυτόχρονη βελτιστοποίηση (συνβελτιστοποίηση) πολλαπλών πόρων αναμένεται να επιτυγχάνει καλύτερη απόδοση από την κατά σειρά βελτιστοποίηση, που είναι ο λόγος που οι σύνθετες δημοπρασίες αναμένεται να είναι πιο αποδοτικές. Ωστόσο, η λειτουργία σύνθετων χρηματιστηρίων οδηγεί σε δημοπρασίες πολλαπλών προϊόντων όπου τα κόστη και οι περιορισμοί απεικονίζονται με σύνθετο τρόπο στο μοντέλο της αγοράς. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο, δεν υπάρχει ένας απλός μηχανισμός που να διασφαλίζειότι οι συμμετέχοντες έχουν το κίνητρο να υποβάλουν αληθείς προσφορές και να αποκαλύψουν έτσι τα πραγματικά τους κόστη και τους πραγματικούς τους περιορισμούς. Δεν είναι συνεπώς έκπληξη ότι στο παρελθόν τα σύνθετα χρηματιστήρια έχουν χειραγωγηθεί, και η παρακολούθηση και ο περιορισμός της στρατηγικής συμπεριφοράς είναι αναπόφευκτος για τη λειτουργία μιας υγιούς αγοράς. Η απεικόνιση των περιορισμών του δικτύου μεταφροάς αναπτύσσεται στο 5, ενώ η αγοραπωλησία εφεδρειών συζητάται στο κεφάλαιο 6.

Κομβική ή ζωνική τιμολόγηση. Ο σχεδιασμός αγοράς στην Καλιφόρνια έχει υιοθετήσει την κομβική τιμολόγηση, όπου οι περιορισμοί που σχετίζονται με το σύστημα μεταφοράς απεικονίζονται με ανάλυση στο επίπεδο των φυσικών κόμβων του δικτύου, το οποίο συνεπάγεται διαφορετικές τιμές ανάμεσα σε διαφορετικούς κόμβους. Απεναντίας, το Ευρωπαϊκό ζωνικό χρηματιστήριο έχει υιοθετήσει τη ζωνική τιμολόγηση. Μια ζώνη είναι μια συλλογή από κόμβους, όπου ο ηλεκτρισμός πωλείται σε μια ενιαία τιμή. Το κίνητρο για τη ζωνική τιμολόγηση είναι η απλοποίηση της αγοράς μέσω της μείωσης του αριθμού των σημείων στα οποία ο ηλεκτρισμός πωλείται με διαφορετική τιμή. Οι δύο σχεδιασμοί συγκρίνονται στο 5.

Προβλήματα

3.1. Υλοποιήστε το παράδειγμα example 3.9 σε μια γλώσσα μαθηματικού προγραμματισμού, και επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα του παραδείγματος. Ο παρουσιάζει το διάνυσμα ζήτησης για τα διαστήματα 1 ως 24. Τι συμβαίνει αν ο ορίζοντας σχεδιασμού αυξηθεί περαιτέρω (π.χ. 3 ή περισσότερες ώρες);

Ώρα	MW	Ώρα	MW	Ώρα	MW	Ώρα	MW
1	92.97	7	94.69	13	79.99	19	73.75
2	95.91	8	87.64	14	116.91	20	95.72
3	116.48	9	76.34	15	105.25	21	87.53
4	95.83	10	107.62	16	95.51	22	85.31
5	110.52	11	104.23	17	100.34	23	82.65
6	69.22	12	100.5	18	96.07	24	92

Βιβλιογραφία

Κεφάλαιο 3.1. Το υλικό που σχετίζεται με το πάγιο, μεταβλητό, και μέσο κότος βασίζεται στον (Stoft, 2002).

Κεφάλαιο 3.2. Το γεγονός ότι οι δημοπρασίες δεύτερης τιμής οδηγούν σε αποκάλυψη του πραγματικού κόστους αποδεικνύεται από τον (Vickrey, 1961).

4. Οικονομική κατανομή

Το κεφάλαιο αυτό εισάγει το πρόβλημα οικονομικής κατανομής, το οποίο είναι το απλούστερο πρόβλημα κατανομής πόρων, και γύρω από το οποίο χτίζονται όλα τα υπόλοιπα μοντέλα του κειμένου. Το πρόβλημα οικονομικής κατανομής αντιστοιχεί στην κλασική διασταύρωση καμπυλών προσφοράς και ζήτησης σε εισαγωγικά κείμενα μικροοικονομικών. Η λεπτομερής παρουσίαση του μοντέλου εξυπηρετεί πολλαπλούς σκοπούς: (i) Οι συνθήκες ΚΚΤ του μοντέλου αναλύονται λεπτομερώς. Πλουσιότερα μοντέλα βασίζονται σε μια γενίκευση αυτής της ανάλυσης των συνθηκών ΚΚΤ, επομένως είναι σημαντικό να αποσαφηνιστούν μερικές σημαντικές έννοιες πρώτα στο απλούστερο μοντέλο. Αυτή η ανάλυση ΚΚΤ αναπτύσσεται στην ενότητα 4.1. (ii) Η εισαγωγή του μοντέλου οικονομικής κατανομής οδηγεί στον ορισμό θεμελιωδών εννοιών των μικροοικονομικών. Κεντρική ανάμεσα σε αυτές είναι η έννοια της ανταγωνιστικής ισορροπίας και ορισμένες άλλες έννοιες που έχουν ειδικό βάρος στα οικονομικά. Οι ορισμοί αυτοί παρουσιάζονται στην ενότητα 4.2. Η ενότητα αυτή αποπειράται να μεταφράσει τη συζήτηση της οικονομικής ισορροπίας του (Stoft, 2002) σε μια γλώσσα που να είναι κατανοητή για αναγνώστες με γνώσεις μαθηματικού προγραμματισμού και ένα ενδιαφέρον για τη μοντελοποίηση. (iii) Η μελέτη του μοντέλου οικονομικής ισορροπίας επιτρέπει μια διάφανη ανάπτυξη της ισοδυναμίας μεταξύ μοντέλων ανταγωνιστικής ισορροπίας αγοράς και μοντέλων βελτιστοποίησης.Η ισοδυναμία αυτή εδραιώνεται στην ενότητα 4.3 για ένα γενικό πρόβλημα κατανομής πόρων, και επικαλούμαστε το αποτέλεσμα επανειλημμένα στο κείμενο.

Από πρακτικής άποψης, η οικονομική κατανομή είναι η απλούστερη και πιο κεντρική λειουργία στις αγορές ηλεκτρισμού. Η οικονομική κατανομή ανταποκρίνεται ουσιαστικά στο ταίριασμα των καταναλωτών με την υψηλότερη αποτίμηση για ενέργεια με τους παραγωγούς που μπορούν να προσφέρουν αυτήν την ενέργεια στο χαμηλότερο δυνατό κόστος. Στην πράξη, το πρόβλμα οικνομικής κατανομής επιλύεται για τη λειτουργία των αγορών πραγματικού χρόνου. Οι αγορές πραγματικού χρόνου λειτουργούνται κατά κανόνα ως δημοπρασίες ενιαίας τιμής, όπου οι συμμετέχοντες υποβάλουν προσφορές αγοράς και πώλησης στο λειτουργό της αγοράς. Ο λειτυοργός της αγοράς επιλύει το πρόβλημα οικονομικής κατανομής, και καθορίζει την ενιαία τιμή εκκαθάρισης βάσει της οποίας χρεώνονται οι αγοραστές και πιστώνονται οι πωλητές. Η διαδικασία αυτή επαναλμβάνεται κάθε λίγα (κατά κανόνα πέντε έως δεκαπέντε) λεπτά.

4.1 Το μοντέλο οικονομική κατανομής

Έστω ένα σύνολο γεννητριών G και ένα σύνολο φορτίων L. Οι γεννήτριες χαρακτηρίζονται από μια αύξουσα ολοκληρώσιμη συνάρτηση οριακού κόστος $MC_g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι μια απεικόνιση από την παραγωγή ενέργειας στο οριακό κόστος κάθε γεννήτριας $g \in G$. Κατ'αναλογία, τα φορτία χαρακτηρίζονται από μια φθίνουσα ολοκληρώσιμη συνάρτηση ζήτησης $MC_l: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι μια απεικόνιση από την κατανάλωση στο όφελος κάθε καταναλωτή $l \in L$. Το πρόβλημα οικονομικής κατανομής βελτιστοποιεί την ποσότητα παραγωγής των γεννητριών p_g και την ποσότητα κατανάλωσης d_l των φορτίων, με στόχο τη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ωφέλειας, που είναι το όφελος καταναλωτή μείον το κόστος των γεννητριών. Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\max \sum_{l \in L} \int_0^{d_l} MB_l(x)dx - \sum_{g \in G} \int_0^{p_g} MC_g(x)dx$$

$$(\lambda): \sum_{l \in L} d_l - \sum_{g \in G} p_g \leq 0$$

$$(\nu_l): d_l \leq D_l, l \in L$$

$$(\mu_g): p_g \leq P_g, g \in G$$

$$p_g \geq 0, g \in G, d_l \geq 0, l \in L$$

όπου P_g είναι η μέγιστη ισχύς που μπορεί να παράγει μια γεννήτρια και D_l είναι η μέγιστη ισχύς που μπορεί να καταναλώσει ένα φορτίο.

Οι δυϊκές μεταβλητές παρουσιάζονται στα αριστερά των περιορισμών. Σημειώνεται ότι η μεγιστοποίηση κοινωνικού ωφέλους είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση κόστους όταν η ζήτηση είναι ανελαστική, δηλαδή όταν η συνάρτηση ζήτησης είναι άπειρη μέχρι μια ορισμένη τιμή και πέφτει μετέπειτα στο μηδέν. Οι συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος οικονομικής κατανομής μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$0 \leq p_g \perp -\lambda + MC_g(p_g) + \mu_g \geq 0, g \in G$$

$$0 \leq d_l \perp \lambda - MB_l(d_l) + \nu_l \geq 0, l \in L$$

$$0 \leq \mu_g \perp P_g - p_g \geq 0, g \in G$$

$$0 \leq \nu_l \perp D_l - d_l \geq 0, l \in L$$

$$0 \leq \lambda \perp \sum_{g \in G} p_g - \sum_{l \in L} d_l \geq 0$$

Πρόταση 4.1: Δεδομένης μιας βέλτιστης λύσης στο πρόβλημα οικονομικής κατανομής, υπάρχει ένα κατώφλι λ τέτοιο ώστε:

1. Αν μια γεννήτρια λειτουργεί αυστηρώς εντός των τεχνικών της ορίων ($0 < p_g < P_g$), τότε $MC_g(p_g) = \lambda$. Αν ένα φορτίο καταναλώνει αυστηρώς εντός των τεχνικών του ορίων ($0 < d_l < D_l$), τότε $MB_l(d_l) = \lambda$.

2. Αν μια γεννήτρια παράγει μηδέν, τότε $MC_g(p_g) \geq \lambda$. Αν ένα φορτίο καταναλώνει μηδέν, τότε $MB_l(d_l) \leq \lambda$.

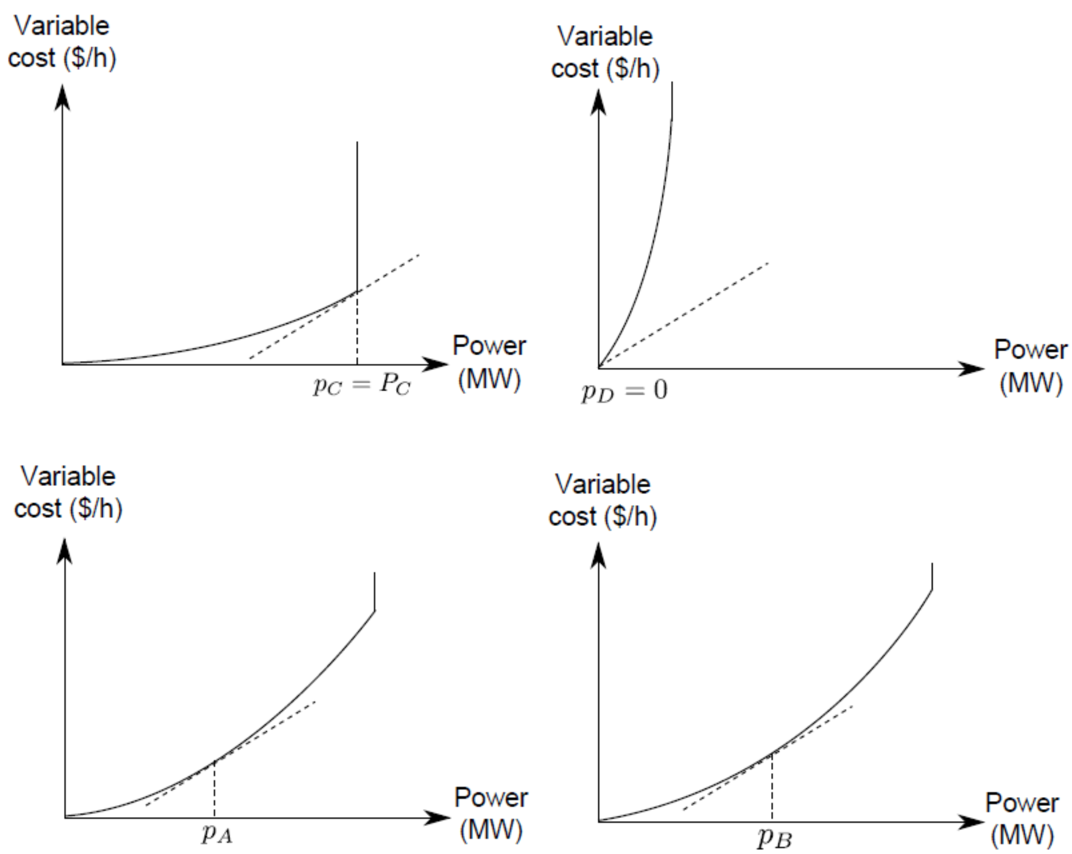
3. Αν μια γεννήτρια παράγει στο τεχνικό της μέγιστο, τότε $MC_g(p_g) \leq \lambda$. Αν ένα φορτίο καταναλώνει την πλήρη του ζήτηση, τότε $MB_l(d_l) \geq \lambda$.

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα είναι συνέπεια των συνθηκών ΚΚΤ του προβλήματος. Για παράδειγμα, έστω μια γεννήτρια για την οποία ισχύει ότι $0 < p_g < P_g$. Από τις συνθήκες της εξίσωσης (4.2) συνεπάγεται ότι $\mu_g = 0$. Από τις συνθήκες της εξίσωσης (4.1) συνεπάγεται ότι $\lambda = MC_g(p_g) + \mu_g = MC_g(p_g)$. Η απόδειξη για τις υπόλοιπες περιπτώσεις ακολουθεί την ίδια λογική.

■

Το κατώφλι που χαρακτηρίζει τη βέλτιστη λύση, που είναι το οριακό κόστος της οριακής μονάδας (δηλαδή της γεννήτριας που είναι σε θέση να παράγει την επόμενη μονάδα ισχύος στο ελάχιστο κόστος) αναφέρεται ως **λάμδα του συστήματος**. Μια γραφική απεικόνιση της βέλτιστης λύσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 25.

Σχήμα 25: Μια γραφική αναπαράσταση των συνθηκών ΚΚΤ του προβλήματος οικονομικής κατανομής. Η κλίση που παρουσιάζεται σε όλα τα γραφήματα αντιστοιχεί στο λάμδα του συστήματος στη βέλτιστη λύση. Οι γεννήτριες Α και Β λειτουργούν αυστηρώς εντός των τεχνικών τους ορίων ($0 < p_g < P_g$), και το σημείο στο οποίο λειτουργούν είναι τέτοιο ώστε η κλίση της καμπύλης μεταβλητού κόστος είναι ίση με το λάμδα του συστήματος. Η γεννήτρια C λειτουργεί στο τεχνικό της όριο P_C, και η κλίση της καμπύλης μεταβλητού κόστους στο τεχνικό όριο δεν ξεπερνά το λάμδα του συστήματος. Η γεννήτρια D έχει κλίση στο μηδέν που ξεπερνά το λάμδα του συστήματος, άρα η γεννήτρια παράγει μηδέν.



Οι συνθήκες ΚΚΤ παρέχουν ένα διαισθητικό χαρακτηρισμό της βέλτιστης λύσης: διαλέγοντας πάντα τη φθηνότερη μοναδιαία αύξηση παραγωγής και την πιο πολύτιμη μοναδιαία αύξηση κατανάλωσης, φτάνουμε σε μια λύση όπου (i) οι γεννήτριες που λειτουργούν αυστηρώς εντός των τεχνικών τους ορίων λειτουργούν στο ίδιο επίπεδο οριακού κόστους, που είναι ίσο με το οριακό όφελος των φορτίων που καταναλώνουν αυστηρώς εντός των τεχνικ΄ψν τους ορίων, (ii) οι μονάδες που λειτουργούν στο τεχνικό τους μέγιστο έχουν οριακό κόστος μικρότερο ή ίσο από το λάμδα του συστήματος, και τα φορτία που καταναλώνουν στο μέγιστο της ζήτησής τους έχουν αποτίμηση που είναι μεγλύτερη ή ίση από το λάμδα του συστήματος, και (iii) μονάδες που παράγουν μηδέν έχουν οριακό κόστος μεγαλύτερο ή ίσο από το λάμδα του συστήματος, ενώ φορτία που καταναλώνουν μηδέν έχουν αποτίμηση μικρότερη ή ίση από το λάμδα του συστήματος. Κατ'ουσίαν, η βέλτιστη λύση ταιριάζει τις φθηνότερες γεννήτριες με τα φορτίου που αντλούν το μεγαλύτερο δυνατό όφελος από την ενέργεια που καταναλώνουν.

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα ευαισθησίας της πρότασης 2.8, είναι γνωστό ότι το λ ισούται με την ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης του προβλήματος ως προς μια μοναδιαία αλλαγή στη δεξιά πλευρά του περιορισμού $\sum_{l\in L} d_l - \sum_{g\in G} p_g \leq 0$. Αυτό είναι λογικό και από διαισθητικής άποψης. Μια μοναδιαία αύξηση στη δεξιά πλευρά αυτού του περιορισμού επιτρέπει μια μοναδιαία αύξηση στην κατανάλωση ενέργειας από ένα φορτίο, ή τη μοναδιαία μείωση παραγωγής από μια γεννήτρια. Αυτό οδηγεί στην αύξηση της κοινωνικής ωφελείας κατά το λάμδα του συστήματος.

4.2 Ανταγωνιστική ισορροπία αγοράς

Το πρόβλημα οικονομικής κατανομής χρησιμοποιείται για την εκκαθάριση της αγοράς πραγματικού χρόνου ως μια δημοπρασία ενιαίας τιμής. Ένα παράπλευρο προϊόν αυτής της λύσης είναι το λάμδα του συστήματος, που χρησιμοποιείται ως τιμή εκκαθάρισης της αγοράς πραγματικού χρόνου. Στην παρούσα ενότητα αναπτύσσεται το επιχείρημα ότι αυτή είναι η τιμή που ούτως ή αλλιώς θα διαπραγματεύονταν πράκτορες της αγοράς οι οποίοι μεγιστοποιούν το κέρδος τους σε συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού σε μια οικονομία με διμερείς συναλλαγές αντί για δημοπρασίες. Ο λόγος για τον οποίο η αγορά πραγματικού χρόνου λειτουργείται κεντρικά από το λειτουργό αγοράς, και όχι διμερώς, είναι γιατί η προσφορά πρέπει να ισορροπεί συνεχώς με τη ζήτηση, προκειμένου να αποφευχθούν αστάθειες στο σύστημα που οδηγούν σε blackouts. Το διμερές εμπόριο δεν είναι αρκετά ταχύ για να μπορέσει να ικανοποιήσει αυτήν την ανάγκη[6]. Για το λόγο αυτό, ο διαχειριστής συστήματος ελέγχει τους πόρους του συστήματος (ή στέλνει εντολές στους παραγωγούς και στα φορτία για το πόση ενέργεια να παράγουν και να καταναλώσουν αντίστοιχα), και η αγορά πραμγατικού χρόνου χρησιμοποιείται για χρηματοοικονομικές συναλλαγές, δηλαδή για την πληρωμή των παραγωγών και τη χρέωση των καταναλωτών. Με τον τρόπο αυτό, η φυσική ισορροπία παραγωγής και κατανάλωσης διατηρείται, διασφαλίζοντας ταυτόχρονα ότι η ενέργεια συναλλάσεται στη “σωστή” τιμή.

Αξίζει να αναρωτηθεί κανείς γιατί το λάμδα του συστήματος είναι μια λογική τιμή για τη χρέωση της ενέργειας. Προκειμένου να αναπτυχθεί μαθηματικά το επιχείρημα, το πρώτο βήμα είναι ο χαρακτηρισμός του πώς οι παραγωγοί και οι καταναλωτές συμπεριφέρονται σε ένα ανταγωνιστικό περιβάλλον. Ένα ανταγωνιστικό περιβάλλον ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 4.2. Μια **ανταγωνιστική αγορά** είναι μια αγορά στην οποία ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

- Οι πράκτοες είναι αποδέκτες της τιμής. Από μαθηματικής άποψης, αυτό σημαίνει πως όταν οι πράκτορες μεγιστοποιούν το κέρδος τους, θεωρούν την τιμή ως μια σταθερή παράμετρο στη βελτιστοποίησή τους, αντί για μια μεταβλητή απόφασης την οποία να μπορούν να επηρρεάσουν με τις αποφάσεις τους.
- Το μεταβλητό κόστος των παραγωγών είναι κυρτό, ή ισοδύναμα το οριακό τους κόστος είναι αύξον. Κατ’αναλογία, η συνάρτηση οφέλους των καταναλωτών είναι κοίλη, ή ισοδύναμα το οριακό τους όφελος είναι φθίνον.
- Οι πράκτορες έχουν πρόσβαση στην τιμή της αγοράς.

[6] Χρειάστηκαν 2.5 λεπτά από τη στιγμή απόκλισης συχνότητας μέχρι την κατάρρευση του συστήματος στο blackout της Ιταλίας το 2003, που είναι ταχύτερο από το πόσο χρειάζονται οι πράκτορες στην αγορά για να διαπραγματευτούν την τιμή μιας συναλλαγής.

Οι νόμοι του Νεύτωνα περιγράφουν τη δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος μηχανικής. Οι αγορές επίσης υπακούουν ορισμένους “νόμους κίνησης”, οι οποίοι υπαγορεύονται από πράκτορες οι οποίοι στοχεύουν στη μεγιστοποίηση του κέρδους. Οι νόμοι αυτοί καθορίζουν το σημείο ισορροπίας στο οποίο ένα οικονομικό σύστημα καταληγει, το οποίο είναι ερώτημα κυρίαρχης σημασίας για τους αναλυτές. Οι νόμοι της κίνησης των αγορών είναι η *προσαρμογή ποσότητας*, και η *προσαρμογή τιμής*. Οι έννοιες αυτές προσδιορίζονται πρώτα διαισθητικά, και κατόπιν ορίζονται μαθηματικά. Προκειμένου να αναπτύξουμε διαίσθηση σχετικά με την προσαρμογή τιμής, είναι χρήσιμο να αντιμετωπίσουμε τη συνάρτηση οριακού κόστους του συστήματος ως μια συλλογή από κάθετες φέτες από (απειροστά) μικρούς παραγωγούς. Ο παραγωγός ο οποίος είναι διατεθιμένος να διαθέσει το Q-οστό κομμάτι ισχύος είναι έτοιμος να το κάνει σε μια τιμή $MC_G(Q)$ ή περισσότερο, όπου $MC_G(\cdot)$ το είναι το αθροιστικό οριακό κόστος. Το αθροιστικό ορακό κόστος ορίζεται μαθηματικά ως εξής.

Ορισμός 4.3. Το **αθροιστικό μεταβλητό κόστος** $TC(Q)$ είναι ο φθηνότερος τρόπος για μια συλλογή G από γεννήτριες να παράγουν Q μονάδες ισχύος:

$$TC_G(Q) = \min \sum_{g \in G} \int_0^{p_g} MC_g(x)dx$$

$$\text{s.t.} \sum_{g \in G} p_g = Q$$

$$p_g \in dom\, MC_g, g \in G$$

όπου G είναι το σύνολο των γεννητριών, MC_g είναι το οριακό κόστος της μονάδας g, p_g είναι η παραγωγή ενέργειας, και $dom\, MC_g$ είναι το εφικτό σύνολο παραγωγής της κάθε γεννήτριας. Το **αθροιστικό οριακό κόστος** είναι η παράγωγος του αθροιστικού μεταβλητού κόστους, υπό την προϋπόθεση ότι ορίζεται η παράγωγος: $MC_G(Q) = TC'_G(Q)$.

Αντίστοιχα για τους καταναλωτές, το οριακό όφελος του συστήματος μπορεί να θεωρηθεί ως μια ακολουθία από μικρούς καταναλωτές, μια συλλογή από κάθετες φέτες σε φθίνουσα σειρά αποτίμησης, με τον καταναλωτή ο οποίος είναι διατεθιμένος να καταναλώσει το Q-οστό κομμάτι ισχύος να είναι προετοιμασμένος να πληρώσει τιμή $MB_L(Q)$ ή λιγότερο. Εδώ, $MB_L(\cdot)$ είναι το αθροιστικό οριακό όφελος. Ο ακριβής ορισμός του αθροιστικού οριακού οφέλους είναι ανάλογος του ορισμού του αθροιστικού οριακού κόστους.

Ορισμός 4.4. Το **αθροιστικό όφελος** είναι ο πιο ωφέλιμος τρόπος με τον οποίο μπορεί να καταναλωθεί μια ορισμένη ποσότητα ισχύος από έναν πληθυσμό καταναλωτών. Μαθηματικά, ορίζεται ως:

$$TB_L(Q) = \max \sum_{l \in L} \int_0^{d_l} MB_l(x)dx$$

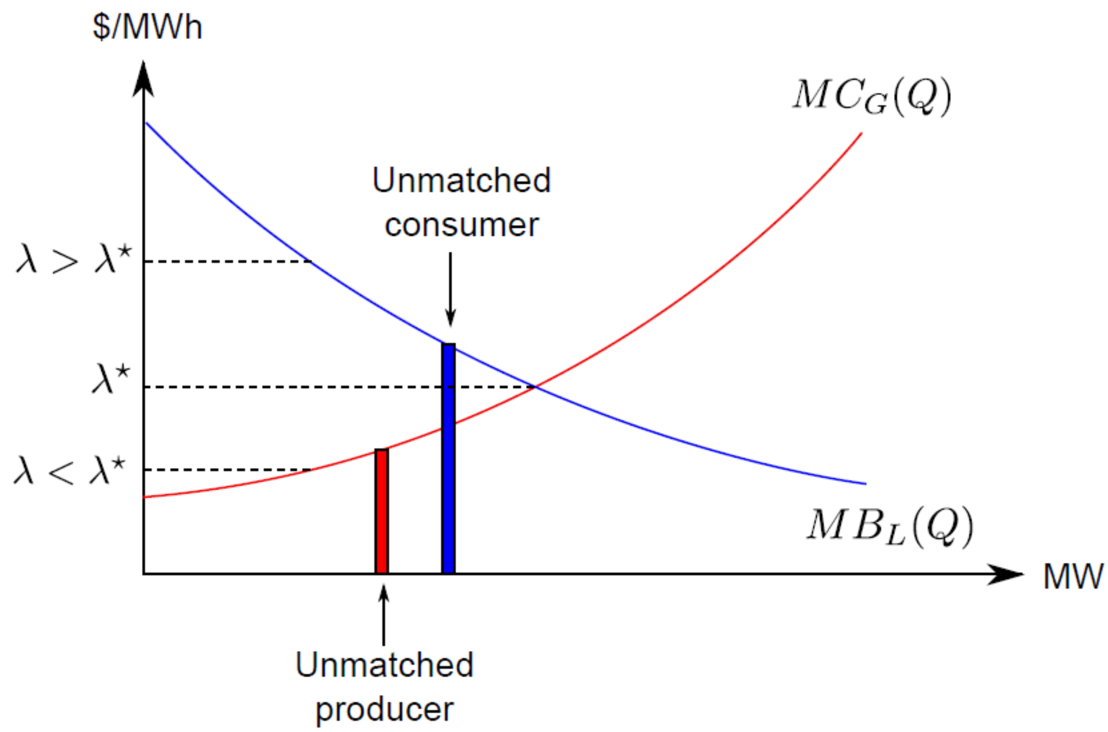
$$\text{s.t.} \sum_{l \in L} d_l = Q$$

$$d_l \in dom\, MB_l, l \in L$$

όπου L είναι το σύνολο των καταναλωτών, MB_l είναι το οριακό όφελος του καταναλωτή l, d_l είναι η κατανάλωση ενέργειας, και $dom\, MB_l$ είναι το εφικτό σύνολο του κάθε καταναλωτή. Το **αθροιστικό οριακό όφελος** είναι η παράγωγος του αθροιστικού οφέλους, υπό την προϋπόθεση ότι ορίζεται η παράγωγος: $MB_l(Q) = TB_L'(Q)$.

Το λάμδα του συστήματος που ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα είναι η τομή της καμπύλης αθροιστικού οριακού κόστους με την καμπύλη αθροιστικού οριακού οφέλους. Συμβολίζεται ως λ^* στο Σχήμα 26. Για να γίνει κατανοητή η διαδικασία προσαρμογής τιμής, ας θεωρήσουμε την περίπτωη όπου η τιμή της αγοράς είναι χαμηλότερη από λ^*. Τότε, όπως υποδεικνύεται στο Σχήμα 26, υπάρχουν παραγωγοί οι οποίοι δε δέχονται να παράγουν σε τόσο χαμηλή τιμή, αλλά οι οποίοι είναι σε θέση να παράγουν σε τιμή μεταξύ του οριακού τους κόστους και του λ^*. Παρομοίως, υπάρχουν καταναλωτές οι οποίοι είναι διατεθιμένοι να πληρώσουν λ^* ή περισσότερο, και οι οποίοι δεν έχουν αγοράσει ενέργεια. Οι παραγωγοί αυτοί θα είναι σε θέση να κερδίσουν προσφέροντας μια υψηλότερη τιμή από την παρούσα τιμή της αγοράς, δημιουργώντας έτσι μια ανοδική πίεση στις τιμές. Παρομοίως, αν η τιμή είναι υψηλότερη από λ^*, τότε υπάρχουν αγοραστές με αποτίμηση χαμηλότερη από την παρούσα τιμή αλλά υψηλότερη από λ^* οι οποίοι δεν καταναλώνουν. Οι αγοραστές αυτοί πρέπει να είναι σε θέση να ανακαλύψουν πωλητές οι των οποίων το οριακό κόστος είναι χαμηλότερο από λ^*, και οι οποίοι δεν έχουν βρει ακόμη αγοραστές για να πουλήσουν την ενέργειά τους. Αυτό σημαίνει πως οι αγοραστές μπορούν να ζητήσουν μια τιμή χαμηλότερη από την παρούσα τιμή, και να δημιουργήσουν έτσι μια καθοδική πίεση στις τιμές. Η μόνη τιμή στην οποίο το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία είναι η λ^*, δηλαδή η τομή των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης.

Σχήμα 26: Μια τιμή αγοράς μεγαλύτερη ή μικρότερη του λ^* αφήνει αταίριαστους παραγωγούς και καταναλωτές, οι οποίοι μπορούν να έχουν επικερδείς διμερείς συναλλαγές.



Για οποιαδήποτε δεδομένη τιμή, πράκτορες οι οποίοι μεγιστοποιούν το κέρδος θα προσαρμόσουν την ποσότητά τους ούτως ώστε να μεγιστοποιήσουν το κέρδος. Η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως προσαρμογή ποσότητας. Οι δυνάμεις της προσαρμογής τιμής και ποσότητας οδηγούν μια ανταγωνιστική αγορά σε μια ισορροπία: μεγιστοποίηση κέρδους εκ μέρους των πρακτόρων της αγοράς, και μια πίεση στις τιμές όταν το σύστημα είναι εκτός ισορροπίας, δηλαδή όταν υπάρχουν ευκαιρίες για επικερδείς συναλλαγές. Οι έννοιες αυτές ορίζονται τώρα επακριβώς.

Η *προσαρμογή ποσότητας* είναι η διαδικασία κατά την οποία ένας πράκτορας που δέχεται την τιμή ως εξωγενή παράμετρο αυξάνει την ποσότητα παραγωγής αν το οριακό του κόστος είναι χαμηλότερο από την τιμή της αγοράς, και μειώνει την ποσότητα παραγωγής του αν το οριακό του κόστος είναι χαμηλότερο από την τιμή της αγοράς. Στην περίπτωση του προβλήματος οικονομικής κατανομής, ο παραγωγός επιλύει το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\max \lambda \cdot p_g - \int_0^{p_g} MC_g(x)dx \tag{4.3}$$

$$(\mu_g): p_g \leq P_g, g \in G \tag{4.4}$$

$$p_g \geq 0 \tag{4.5}$$

Παρομοίως, ένας καταναλωτής που δέχεται τις τιμές της αγοράς ως δεδομένες θα μειώσει την κατανάλωσή του αν το οριακό του όφελος είναι μικρότερο από την τιμή της αγοράς και θα την αυξήσει αν είναι μεγαλύτερο, δηλαδή ο καταναλωτής επιλύει το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\max \int_0^{d_l} MB_l(x)dx - \lambda \cdot d_l \quad (4.6)$$

$$(\nu_l): d_l \leq D_l, l \in L \quad (4.7)$$

$$d_l \geq 0 \quad (4.8)$$

Η *προσαρμογή τιμής* αναφέρεται στη διαδικασία κατά την οποία οι τιμές αυξάνονται όποτε η ζήτηση ξεπερνά την προσφορά, και μειώνονται όποτε η προσφορά ξεπερνά τη ζήτηση. Αυτό συνεπάγεται πως για κάθε αγαθό που συναλλάσεται στην αγορά, είτε η προσφορά για το αγαθό είναι ίση με τη ζήτηση, ή τιμή του αγαθού είναι ίση με μηδέν αν η προσφορά ξεπερνά τη ζήτηση. Μαθηματικά, αυτό εκφράζεται ως μια συνθήκη συμπληρωματικότητας που ονομάζεται **συνθήκη εκκαθάρισης της αγοράς**:

$$0 \leq \lambda \perp \sum_{g \in G} p_g - \sum_{l \in L} d_l \geq 0 \quad (4.9)$$

Μια αγορά είναι σε ισορροπία όταν δεν υπάρχουν επικερδείς ευκαιρίες για συναλλαγές. Αυτό επιτυγχάνεται όταν οι τιμές και οι ποσότητες είναι τέτοιες ώστε οι πράκτορες να μεγιστοποιούν τα κέρδη τους και ισχύουν η συνθήκες εκκαράρισης της αγοράς. Η τιμή εκκαθάρισης της αγοράς είναι η τιμή που ισορροπεί την αγορά. Αυτός ο ορισμός ισχύει για οποιαδήποτε αγορά, ακόμη κι αν δεν είναι ανταγωνιστική. Μια ισορροπία σε μια ανταγωνιστική αγορά ονομάζεται **ανταγωνιστική ισορροπία αγοράς**, και η τιμή στην οποία επιτυγχάνεται είναι η **ανταγωνιστική τιμή**. Ο ακριβής ορισμός είναι ο εξής.

Ορισμός 4.5. Μια ανταγωνιστική ισορροπία είναι ένας συνδυασμός τιμών λ^* και κατανομών παραγωγής p^* και ζήτησης d^*, τέτοιος ώστε

- δοθείσης της τιμής λ^*, οι παραγωγοί και οι καταναλωτές μεγιστοποιούν το κέρδος τους, και
- η αγορά εκκαθαρίζει, δηλαδή $0 \leq \lambda^* \perp \sum_{g \in G} p_g^* - \sum_{l \in L} d_l^* \geq 0$.

Το έργο του αόρατου χεριού της αγοράς αποκαλύπτεται όταν οι συνθήκες ΚΚΤ των παραγωγών και καταναλωτών που μεγιστοποιούν το κέρδος (προσαρμογή ποσότητας) και οι συνθήκες εκκαθάρισης της αγοράς (προσαρμογή τιμής) συγκεντρώνονται σε ένα μοναδικό σύστημα περιορισμών συμπληρωματικότητας:

Παραγωγοί:

$$0 \leq p_g \perp -\lambda + MC_g(p_g) + \mu_g \geq 0, g \in G \quad (4.10)$$

$$0 \leq \mu_g \perp P_g - p_g \geq 0, g \in G \quad (4.11)$$

Καταναλωτές:

$$0 \leq d_l \perp \lambda - MB_l(d_l) + \nu_l \geq 0, l \in L \quad (4.12)$$

$$0 \leq \nu_l \perp D_l - d_l \geq 0, l \in L \quad (4.13)$$

Εκκαθάριση αγοράς:

$$0 \leq \lambda \perp \sum_{g \in G} p_g - \sum_{l \in L} d_l \geq 0 \quad (4.14)$$

Παρατηρεί κανείς ότι οι συνθήκες αυτές είναι πανομοιότυπες με τις συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος οικονομικής κατανομής, εξισώσεις (4.1) - (4.3). Αυτό αποδεικνύει την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.6: Η ανταγωνιστική ισορροπία οδηγεί σε μια κατανομή η οποία είναι βέλτιστη για το πρόβλημα οικονομικής κατανομής.

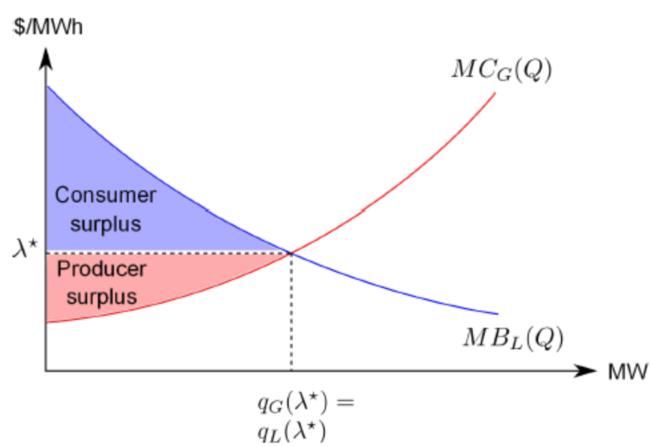
Απόδειξη. Οι συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος οικονομικής κατανομής είναι πανομοιότυπες με τις συνθήκες οι οποίες ορίζουν μια ανταγωνιστική ισορροπία αγοράς. Εφόσον οι συνθήκες ΚΚΤ είναι αναγκαίες και ικανές για να χαρακτηρίσουν τη βέλτιστη λύση του προβλήματος οικονομικής κατανομής, η πρόταση αποδεικνύεται.

■

Οι συνέπειες αυτής της πρότασης είναι βαθιές, και ενδεχομένως εκπλήσσουν εκ πρώτης όψεως. Ο λόγος που το αποτέλεσμα ενδεχομένως να αποκλίνει από τη διαίσθηση σε πρώτη ματιά είναι ότι μια ανταγωνιστική αγορά οδηγείται από εγωϊστικούς πράκτορες που επιδιώκουν να μεγιστοποιήσουν το προσωπικό τους κέρδος, και όχι το κοινωνικό όφελος. Είναι επίσης ενδιαφέρον να παρατηρήσει κανείς ότι οι πράκτορες ακολουθούν την ίδια κατανομή με ένα κεντρικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, παρ'όλο που η διαδικασία λήψης αποφάσεων είναι αποκεντρωμένη σε μια αγορά. Για την ακρίβεια, οι πράκτορες δεν επικοινωνούν απευθείας μεταξύ τους,παρά μόνο συντονίζονται μέσω της τιμής της αγοράς. Το αποτέλεσμα της πρότασης 4.6 γενικεύεται στην πρόταση 4.6 της επόμενης ενότητας. Το γενικευμένο αποτέλεσμα χρησιμοποιείται επανειλημμένα στο κείμενο, και είναι μάλλον το πιο χρήσιμο αποτέλεσμα του κειμένου.

Έχοντας ορίσει την τιμή ισορροπίας, μπορούμε τώρα να ορίσουμε ορισμένα μεγέθη οικονομικής σημασίας. Η επίδοση στις αγορές μετράται από την ευημερία. Η ευημερία είναι το συνολικό όφελος των οικονομικών συναλλαγών, το οποίο μπορεί να αποσυντεθεί στο πλεόνασμα παραγωγών και το πλεόνασμα καταναλωτών. Το πλεόνασμα παραγωγών, πλεόνασμα καταναλωτών, και η ευημερία παρουσιάζονται γραφικά στο .

Σχήμα 27: Πλεόνασμα παραγωγών και πλεόνασμα καταναλωτών Η ευημερία είναι το άθροισμα της μπλε και της κόκκινης επιφάνειας.



Ορισμός 4.7: Για μια δεδομένη τιμή, το **πλεόνασμα παραγωγών** είναι το κέρδος των παραγωγών οι οποίοι είναι διατεθιμένοι να πουλήσουν στη δεδομένη τιμή, το οποίο εκφράζεται μαθηματικά ως

$$\lambda q_G(\lambda) - \int_0^{q_G(\lambda)} MC_G(x)dx$$

όπου το $q_G(\lambda)$ είναι η ποσότητα ενέργειας που πωλείται στην τιμή λ.

Ορισμός 4.8: Το **πλεόνασμα καταναλωτών** είναι το κέρδος των καταναλωτών οι οποίοι είναι διατεθιμένοι να αγοράσουν στη δεδομένη τιμή, το οποίο εκφράζεται μαθηματικά ως

$$\int_0^{q_L(\lambda)} MB_L(x)dx - \lambda q_L(\lambda)$$

όπου το $q_L(\lambda)$ είναι η ποσότητα ενέργειας που αγοράζεται στην τιμή λ.

Ορισμός 4.9: Το **συνολικό πλεόνασμα**, ή **ευημερία**, είναι το άθροισμα του πλεονάσματος παραγωγών και του πλεονάσματος καταναλωτών.

Μια αγορά είναι αποδοτική όταν το συνολικό πλεόνασμα μεγιστοποιείται. Αυτό συμπεριλαμβάνει την ελαχιστοποίηση του κόστους αυτού που παράγεται, και τη μεγιστοποίηση της αποτίμησης αυτού που καταναλώνεται, καθώς και την παραγωγή και κατανάλωση ίσων ποσοτήτων.

4.3 Μοντελοποίηση ισορροπίας αγοράς ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης

Το κεντρικό αποτέλεσμα της προηγούμενης ενότητας, η πρόταση 4.6, συνεπάγεται πως μια ανταγωνιστική αγορά μπορεί να αναλυθεί επιλύοντας ένα μοναδικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, και πως η δυϊκή βέλτιστη λύση αυτού του προβλήματος έχει οικονομική ερμηνεία και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό μεγεθών οικονομικής απόδοσης όπως το κέρδος των συμμετεχόντων στην αγορά και η ευημερία. Η παρούσα ενότητα γενικεύει την πρόταση 4.6 σε πολλαπλά αγαθά, και συζητά τη χρήση μοντέλων βελτιστοποίησης για την προσομοίωση αγορών.

Το πρόβλημα οικονομικής κατανομής που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, καθώς και πλήθος άλλων μοντέλων που παρουσιάζονται σε αυτό το κείμενο, υπακούει την ακόλουθη δομή:

$$\text{(Sep)}: \max_x \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

$$(\rho_i): g_i(x_i) \leq 0, i = 1, \dots, n$$

$$(\lambda): \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) \leq 0$$

Σύμφωνα με αυτήν τη δομή, υπάρχουν n πράκτορες οι οποίοι αποφασίζουν για ιδιωτικές μεταβλητές απόφασης $x_i \in \mathbb{R}^n$. Ο στόχος του συστήματος είναι να μεγιστοποιήσει μια συνολική αντικειμενική συνάρτηση η οποία είναι το άθροισμα των ιδιωτικών συναρτήσεων οφέλους f_i των πρακτόρων, οι οποίες συναρτήσεις υποθέτουμε ότι είναι *κοίλες* και διαφορίσιμες. Το όφελος του κάθε πράκτορα εξαρτάται *μόνο* από την απόφαση του εν λόγω πράκτορα, δηλαδή η συνάρτηση f_i είναι συνάρτηση του x_i μόνον, με $f_i: \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$. Κάθε πράκτορας υποχρεούται να υπακούσει ένα σύνολο περιορισμών $g_i(x_i) \leq 0$. Ωστόσο, ως σύνολο, οι πράκτορες οφείλουν να υπακούν ένα επιπλέον σύνολο περιορισμών $\sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) \leq 0$. Οι συναρτήσεις g_i και h_i θεωρούμε ότι είναι κυρτές και διαφορίσιμες, με $h_i: \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^m$ και $g_i: \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{a_i}$. Οι περιορισμοί συντονισμού $\sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) \leq 0$ είναι αθροίσιμοι ως προς τους πράκτορες, και μπορούν συνεπώς να ερμηνευτούν με τον ακόλουθο τρόπο: (i) υπάρχει ένα σύνολο m πόρων που είναι πεπερασμένοι; (ii) κάθε πράκτορας, αποφασίζοντας x_i, χρησιμοποιεί (ή παράγει, αν το $h_i(x_i)$ είναι αρνητικό) μια ποσότητα $h_i(x_i)$ καθενός από τους m πεπερασμένους πόρους; (iii) η συνολική ποσότητα πεπερασμένων πόρων που καταναλώνεται δεν μπορεί να ξεπεράσει την ποσότητα των πόρων που παράγονται.

Ας θεωρήσουμε τις συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος (Sep), και ας υποθέσουμε πως αυτές οι συνθήκες ΚΚΤ είναι αναγκαίες και ικανές για να είναι η λύση του προβλήματος βέλτιστη. Τότε οι συνθήκες αυτές μπορούν να εκφραστούν ως:

$$-\nabla_{x_i} f_i(x_i) + \left(\nabla_{x_i} g_i(x_i)\right)^T \rho_i - \left(\nabla_{x_i} h_i(x_i)\right)^T \lambda = 0, i = 1, \dots, n \tag{4.15}$$

$$0 \leq \rho_i \perp -g_i(x_i) \geq 0, i = 1, \dots, n \tag{4.16}$$

$$0 \leq \lambda \perp -\sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) \geq 0 \tag{4.17}$$

όπου $\nabla_{x_i} f_i(x_i) \in \mathbb{R}^{n_i}$ είναι η παράγωγος του f_i και $\nabla_{x_i} g_i(x_i) \in \mathbb{R}^{a_i} \times \mathbb{R}^{n_i}$ είναι ο πίνακας Jacobi του g_i (παρομοίως για το $\nabla_{x_i} h_i(x_i)$).

Αντί να επιλυθεί αυτό το πρόβλημα κεντρικά, ας θεωρήσουμε πώς θα συμπεριφερθεί μια ανταγωνιστική αγορά αν κάθε ένας από τους m πόρους συναλλάσεται ανάμεσα στους n πράκτορες. Οι πεπερασμένοι αυτοί πόροι αναφέρονται ως **αγαθά**: πεπερασμένοι πόροι που συναλλάσονται σε μια μοναδική τιμή αγοράς χωρίς διαφοροποίηση. Κάθε εμπόρευμα το οποίο συναλλάσεται έχει μια τιμή λ_i, και οι παραγωγοί πληρώνονται λ_i για να πουλήσουν το εμπόρευμα ενώ οι καταναλωτές πληρώνουν λ_i για να αγοράσουν το εμπόρευμα. Συνεπώς, σε μια αγορά κάθε πράκτορας επιλύει το ακόλουθο πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους δεδομένου ενός διανύσματος τιμών λ^*:

$$\begin{array}{lc} \text{(Κέρδος-i):} & max_{x_i, q_i}(f_i(x_i) - (\lambda^*)^T) \\ (\rho_i): & g_i(x_i) \leq 0 \\ (\lambda_i): & h_i(x_i) = q_i \end{array}$$

όπου το q_i αντιπροσωπεύει το διάνυσμα των πόρων που αγοράζονται (ή πωλούνται, αν η τιμή είναι αρνητική) από τον πράκτορα i.

Γενικεύοντας τον ορισμό της ανταγωνιστικής αγοράς ο οποίος παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, μια ανταγωνιστική ισορροπία αγοράς για πολλαπλά αγαθά ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 4.10. Μια **ανταγωνιστική ισορροπία** σε μια αγορά πολλαπλών αγαθών ορίζεται ως ένα σύνολο τιμών λ^*, αποφάσεων πρακτόρων x_i^*, και αγορών αγαθών q_i^*, τέτοια ώστε:

- τα (x_i^*, q_i^*) μεγιστοποιούν το κέρδος δεδομένου του , δηλαδή επιλύουν το πρόβλημα (Κέρδος-i) που ορίστηκε προηγουμένως, και
- η αγορά εκκαθαρίζει:

$$0 \leq \lambda^* \perp \sum_{i=1}^{n} q_i^* \leq 0$$

Μια ανταγωνιστική ισορροπία περιγράφει συνεπώς ένα σύνολο τιμών αγαθών και αποφάσεων των πρακτόρων τέτοιες ώστε, δεδομένων των τιμών κανένας πράκτορας δεν ενδιαφέρεται να αλλάξει την απόφασή του, και τέτοια ώστε η προσφορά για τα αγαθά ισούται με τη ζήτηση για τα αγαθά. Το επίθετο *ανταγωνιστική* αναφέρεται στο γεγονός ότι οι πράκτορες θεωρούν τις τιμές των αγαθών δεδομένες, υπό την έννοια ότι οι τιμές αυτές δεν μπορούν να επηρρεαστούν από τις πράξεις των πρακτόρων.

Ένας τρόπος να αναπαρασταθεί μια ανταγωνιστική ισορροπία αγοράς είναι να περιγραφούν οι συνθήκες ΚΚΤ των προβλημάτων μεγιστοποίησης κέρδους των πρακτόρων, και να προστεθούν στις συνθήκες αυτές οι συνθήκες ισορροπίας της αγοράς. Μπορεί τότε να επιλυθεί το σύστημα ΚΚΤ προκειμένου να υπολογιστούν οι τιμές της αγοράς λ, οι αποφάσεις των πρακτόρων x_i, και οι κατανομές των αγαθών q_i. Τα συστήματα ΚΚΤ είναι εν γένει δύσκολο να επιλυθούν, γιατί ανάγονται στην επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησηςη (η μη γραμμικότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η συνθήκη συμπληρωματικότητας $a \perp b$ μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως $a^T b = 0$ για $a, b \geq 0$). Απενταντίας, μια ανταγωνιστική ισορροπία αγοράς μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως ένα απλό πρόβλημα βελτιστοποίησης, όπως δείχνει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.11. Έστω ότι οι συνθήκες ΚΚΤ είναι αναγκαίες και ικανές για τη βέλτιστη λύση του (Sep) και του (Κέρδος $- i$). Μια ανταγωνιστική ισορροπία αγοράς ικανοποιεί τις συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος (Sep), εξισώσεις (4.15) - (4.17). Συνεπώς, μια ανταγωνιστική ισορροπία αγοράς αντιστοιχεί σε βέλτιστη λύση του (Sep), δηλαδή σε μια βέλτιστη κατανομή πόρων. Ισχύει επίσης το αντίστροφο, δηλαδή πως μια πρωταρχική-δυϊκή λύση των συνθηκών ΚΚΤ του (Sep) είναι ανταγωνιστική ισορροπία.

Απόδειξη. Η βέλτιστη λύση του προβλήματος μεγιστοποίησης κέρδους (Κέρδος-i) ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες ΚΚΤ:

$$-\nabla_{x_i} f_i(x_i) + \left(\nabla_{x_i} g_i(x_i)\right)^T \rho_i - \left(\nabla_{x_i} h_i(x_i)\right)^T \lambda = 0$$

$$\lambda^* - \lambda = 0$$

$$0 \leq \rho_i \perp -g_i(x_i) \geq 0$$

$$h_i(x_i) = q_i$$

Συλλέγοντας τις συνθήκες ΚΚΤ όλων των προβλημάτων μεγιστοποίησης κέρδους όλων των πρακτόρων και τις συνθήκες εκκαθάρισης αγοράς, μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι η ισορροπία αγοράς ικανοποιεί τις εξισώσεις (4.15) - (4.17). Εφόσον βάσει υποθέσεως οι συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος (Sep) είναι αναγκαίες και ικανές για μια βέλτιστη λύση, αυτό συνεπάγεται πως μια ανταγωνιστική ισορροπία οδηγεί σε μια βέλτιστη κατανομή πόρων. Το αντίστροφο επίσης επιβεβαιώνεται συγκρίνοντας τις συνθήκες ΚΚΤ.

■

Σε σύνθετα χρηματιστήρια, ο διαχειριστής συστήματος επιλύει ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης το οποίο καθορίζει την κατανομή μεταφοράς, την παραγωγή και την κατανάλωση ενέργειας, καθώς και την παροχή επικουρικών υπηρεσιών, και χρησιμοποιεί τους δυϊκούς πολλαπλασιαστές της βέλτιστης λύσης για να προσδιοριστούν οι τιμές της αγοράς. Η διαδικασία αυτή καθορίζει την τιμή κάθε 5 με 15 λεπτά για δεκάδες αγορών οι οποίες συναλλάσουν δισεκατομμύρια ευρώ ετησιώς. Η τιμολόγηση μεταφοράς, ενέργειας και επικουρικών υπηρεσιών μέσω δημοπρασιών πολλαπλών προϊόντων σε σύνθετα χρηματιστήρια δικαιολογείται θεωρητικά από την πρόταση 4.11.

Μια ακόμη σημαντική συνέπεια του αποτελέσματος αυτού σχετίζεται με τη μοντελοποίηση και την ανάλυση πολιτικής. Ένα μονοκόμματο πρόβλημα βελτιστοποίησης όπως το (Sep) μπορεί να επιλυθεί από αποδοτικούς αλγορίθμους, σε αντίθεση με το μεγάλο σύστημα συνθηκών ΚΚΤ που είναι απαραίτητο για να εκφραστεί η ισορροπία της αγοράς. Το σημαντικό αυτό συμπέρασμα της πρότασης 4.11 χρησιμοποιήθηκε σε κάποια από τα πιο πρώιμα μοντέλα της παγκόσμιας οικονομίας και της οικονομίας των ΗΠΑ από το Υπουργείο Ενέργειας των ΗΠΑ, συμπεριλαμβανομένων των μοντέλων National Energy Modeling System (NEMS) και Project Independence Evaluation System (PIES).

Η πρόταση 4.11 δικαιολογεί τη χρήση μοντέλων βελτιστοποίησης για την ανάλυση ανταγωνιτικών αγορών ηλεκτρισμού, ωστόσο υπάρχουν συνθήκες υπό τις οποίες οι υποθέσεις των ανταγωνιστικών αγορών παραβιάζονται, και για τις οποίες τα μοντέλα βελτιστοποίησης δεν είναι πλέον κατάλληλη επιλογή μοντελοποίησης. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, την περίπτωση ενός παιγνίου Cournot, όπου ο παραγωγός συνειδητοποιεί ότι η ποσότητα την οποία επιλέγει μπορεί να επηρρεάσει την τιμή εκκαθάρισης της αγοράς.

Παράδειγμα 4.1. Ας θεωρήσουμε μια αγορά με γραμμιλή καμπύλη οριακού ωφέλους, $MB(Q) = a = b \cdot q$, και δύο πράκτορες με συναρτήσεις κόστους TC_1 και TC_2 αντιστοίχως. Η μεγιστοποίηση ευημερίας αντιστοιχεί στην επίλυση του ακόλουθου προβλήματος βελτιστοποίησης:

$$max_{p_1,p_2,d} a \cdot d - 0.5 \cdot b \cdot d^2 - TC_1(p_1) - TC_2(p_2)$$

$$p_1 + p_2 = d$$

$$p_1 \in dom\, TC_1, p_2 \in dom\, TC_2$$

$$p_1, p_2, d \geq 0$$

όπου τα τεχνικά όρια των γεννητριών αναπαρίστανται εμμέσως στο πεδίο ορισμού των συναρτήσεων συνολικού κόστος. Υποθέτωντας μια εσωτερική λύση (δηλαδή όπου p_1 και p_2 είναι μεγαλύτερα του μηδενός), τότε χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ΚΚΤ μπορούμε να δείξουμε ότι η λύση είναι βέλτιστη όταν τα οριακά κόστη είναι ίση με το οριακό όφελος:

$$MC_1(p_1) = MC_2(p_2) = a - b \cdot (p_1 + p_2) \Leftrightarrow p_i = \frac{1}{b}\big(a - MC_i(p_i)\big).$$

Έστω, απεναντίας, ότι κάθε πράκτορας συνειδητοποιεί ότι η ποσότητα την οποία επιλέγει να παράγει επηρρεάζει τις τιμές βάσει της καμπύλης ζήτησης της αγοράς. Τότε ο πράκτορας i επιλύει το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\max(a - b \cdot (p_1 + p_2)) \cdot p_i - TC_i(p_i)$$

$$p_i \geq 0$$

Θεωρώντας πάλι μια εσωτερική λύση όπου $p_i > 0$, η βέλτιστη λύση χαρακτηρίζεται από τη σχέση

$$p_i = \frac{1}{b}\big(a - MC_i(p_i)\big) - 2 \cdot p_{-i}$$

όπου το p_{-i} συμβολίζει την απόφαση του αντίπαλου πράκτορα. Παρατηρούμε ότι κάθε παίκτης μειώνει την παραγωγή του, προκειμένου να αυξήσει την τιμή, μέχρι το σημείο όπου το οριακό έσοδο ισούται με το οριακό κόστος. Η λύση αυτή διαφέρει από τη λύση του κεντρικού προβλήματος βελτιστοποίησης, και συνεπώς είναι λιγότερο αποδοτική από άποψης μεγιστοποίησης ευημερίας.

■

Το προηγούμενο παράδειγμα καταδεικνύει πως αποκλίσεις από την αποδοτικότητα μπορούν να συμβούν σε αγορές με μικρό αριθμό παραγωγών, οι οποίοι συνειδητοποιούν ότι οι αποφάσεις τους μπορούν να έχουν μια απευθείας επίπτωση στις τιμές. Η στρατηγική απόσυρση παραγωγής από την αγορά ηλεκτρισμού από παραγωγούς με πρόθεση την *επικερδή* αύξηση τιμών ορίζεται ως **εκμετάλλευση δεσπόζουσας θέσης** (market power). Η εκμετάλλευση δεσπόζουσας θέσης είναι ένα πραγματικό φαινόμενο στις αγορές ηλεκτρισμού, το οποίο έχει οδηγήσει σε ορισμένα δραματικά γεγονότα, συμπεριλαμβανομένης της κατάρρευσης της αγοράς της Καλιφόρνια το 2001. Για το λόγο αυτό, οι ρυθμιστές παρακολουθούν προσεκτικά τη συμπεριφορά των συμμετεχόντων στην αγορά και μετριάζουν τη στρατηγική συμπεριφορά με μια πληθώρα ρυθμιστικών παρεμβάσεων όπως τα πλαφόν τιμών ή ο μετριασμός των οικονομικών προσφορών (bid mitigation). Δυστυχώς, τέτοιες παρεμβάσεις έχουν τη δυνατότητα να παρεμβάλλονται με τη μακροπρόθεσμη αποδοτικότητα της αγοράς γιατί τα σήματα τιμών που παράγει η αγορά επηρρεάζονται από τη ρυθμιστική παρέμβαση, αντί να καθορίζονται από τις ανταγωνιστικές δυνάμεις της αγοράς.

Η εκμετάλλευση δεσπόζουσας θέσης είναι ένα σημαντικό φαινόμενο στις αγορές ηλεκτρισμού, και τοπιο κατάλληλο εργαλείο ανάλυσης είναι η θεωρία παιγνίων. Υπάρχει ιδιαιτέρως εκτεταμένη βιβλιογραφία στο θέμα μοντέλων θεωρίας παιγνίων για την ανάλυση των αγορών ηλεκτρισμού. Το μοντέλα βελτιστοποίησης γενικώς δεν είναι επαρκή για την ανάλυση της στρατηγικής αλληλεπίδρασης μεταξύ πρακτόρων. Εφόσον το κείμενο εστιάζει σε μοντέλα βελτιστοποίησης, η υπόθεση που υιοθετείται στην πλειονότητα του κειμένου είναι ότι οι πράκτορες συμπεριφέρονται ανταγωνιστικά (θεωρώντας τις τιμές της αγοράς δεδομένες) και τα μοντέλα θεωρίας παιγνίων δε χρησιμοποιούνται παρά μόνο για σύγκριση με τα μοντέλα τέλειου ανταγωνισμού.

Προβλήματα

4.1 Επαναλάβετε την ανάλυση των συνθηκών ΚΚΤ του προβλήματος οικονομικής κατανομής όταν εισάγεται ένας περιορισμός τεχνικού ελαχίστου στο μοντέλο: $p_g \geq P_g^-$.

4.2 Έστω ένα σύστημα με τρεις γεννήτριες. Η μία είναι πυρηνική μονάδα βάσης με οριακό κόστος 10 €/MWh και μέγιστη χωρητικότητα 800 MW. Η άλλη είναι μονάδα άνθρακα με οριακό κόστος 25 €/MWh και μέγιστη χωρητικότητα 400 MW. Η τρίτη είναι μονάδα αιχμής με οριακό κόστος 35 €/MWh και μέγιστη χωρητικότητα 200 MW. Η ζήτηση αποτελείται από τρεις παρόχους.

- Έστω ότι η συνολική ζήτηση του συστήματος είναι 1360 MW. Επιλύστε το πρόβλημα οικονομικής κατανομής σε μια γλώσσα μαθηματικού προγραμματισμού. Ποιο είναι το κόστος; Ποια είναι η τιμή εκκαθάρισης αν υποθέσουμε ότι η ζήτηση είναι ανελαστική;
- Έστω ότι η ζήτηση στο προηγούμενο πρόβλημα είναι ελαστική, και ο Πίνακας 8 περιγράφει τις οικονομικές προσφορές.
  - Ποιο είναι το κόστος του συστήματος; Ποιο είναι το όφελος καταναλωτών; Ποιο είναι το κέρδος των παραγωγών; Ποιο είναι το πλεόνασμα των καταναλωτών; Ποια είναι η ευημερία;
  - Έστω ότι η μονάδα φυσικού αερίου αστοχεί και τίθεται εκτός λειτουργίας. Ποια είναι η τιμή εκκαθάρισης; Πόσα MW είναι εντός τιμής; Πόσα είναι εκτός τιμής; Θα μπορούσε η τιμή εκκαθάρισης να είναι 249 €/MWh; Θα μπορούσε να είναι 251 €/MWh;

Πίνακας 8: Οι προσφορές ζήτησης της άσκησης 4.2.

Πάροχος 1	Πάροχος 2	Πάροχος 3
200 MW στα 800 €/MWh	300 MW στα 600 €/MWh	300 MW στα 500 €/MWh
100 MW στα 300 €/MWh	100 MW στα 300 €/MWh	300 MW στα 250 €/MWh
50 MW στα 80 €/MWh		10 MW στα 40 €/MWh

4.3 Καταγράψτε τις συνθήκες KKT του προβλήματος οικονομικής κατανομής της προηγούμενης άσκησης (με όλες τις μονάδες σε λειτουργία). Επιλύστε τις εξισώσεις συμπληρωματικότητας χρησιμοποιώντας ένα solver μη γραμμικού προγραμματισμού. Χωρίστε τις συνθήκες KKT σε εφτά ομάδες, αναλόγως του αν αντιστοιχούν σε προβλήματα μεγιστοποίησης ενός εκ των τριών γεννητριών, προβλήματα μεγιστοποίησηη κέρδους ενός εκ των τριών παρόχων, ή τη συνθήκη εκκαθάρισης της αγοράς.

4.4 Θεωρήστε το παράδειγμα 4.1, και μια αγορά με n συμμετρικούς παραγωγούς. Βρείτε τις συνθήκες της ισορροπίας Cournot και δείξτε ότι όταν $n \to \infty$ τότε η ισορροπία συγκλίνει στην ανταγωνιστική ισορροπία της αγοράς.

Βιβλιογραφία

Κεφάλαιο 4.2. Η συζήτηση σχετικά με τους λόγους ύπαρξης αγορών ηλεκτρικής ενέργειας βασίζεται στους (Green, 2000), (Stoft, 2002) και (Oren, 2004).

5. Το δίκτυο μεταφοράς

‘Ελα

5.1 Βέλτιστη ροή φορτίου συνεχούς ρεύματος (DCOPF)

Ελ

5.1.1 Βέλτιστη DC ροή φορτίου βασιζόμενη σε συντελεστές διανομής μεταφοράς ισχύος

Ελ

5.1.2 Βέλτιστη DC ροή φορτίου βασισμένη σε επαγωγή

Ελ

5.2 Τοπική οριακή τιμολόγηση

Ε

5.3 Ζωνική τιμολόγηση

Ε

6. Επικουρικές υπηρεσίες

‘Ελα

6.1 Κατηγοριοποίηση επικουρικών υπηρεσιών και εφεδρειών

Ε

6.2 Συνβελτιστοποίηση ενέργειας και εφεδρειών

Ε

6.3 Αγορές εφεδρειών

Ε

6.3.1 Ένα είδος εφεδρειών

Ε

6.3.2 Πολλαπλά είδη εφεδρειών

Ε

6.4 Εξισορρόπηση

Ε

7. Δέσμευση μονάδων

‘Ελα/

7.1 Μοντέλα βελτιστοποίησης δέσμευσης μονάδων

Ε

7.2 Σχεδιασμός αγοράς με δέσμευση μονάδων

Ε

7.3 Χρηματιστήρια με απλά προϊόντα

Ε

7.4 Χρηματιστήρια με σύνθετα προϊόντα

Ε

8. Χρηματοοικονομικά παράγωγα

Τα κεφάλαια 4-7 έχουν καλύψει τη λειτουργία των βραχυπρόθεσμων αγορών (επόμενης ημέρας και πραγματικού χρόνου). Ωστόσο, η πλειονότητα της ηλεκτρικής ενέργειας συναλλάσσεται πριν τη λειτουργία επόμενης ημέρας και τον πραγματικό χρόνο. Οι προθεσμιακές αγορές οι οποίες λειτουργούν ημέρες, μήνες ή και έτη πριν τον πραγματικό χρόνο είναι λιγότερο συγκεντρωτικές, και είναι το θέμα του παρόντος κεφαλαίου.

Στις προθεσμιακές αγορές, η πλειονότητα των συναλλαγών είναι χρηματοοικονομικές. Συνεπώς, οι προθεσμιακές αγορές έχουν μια πιο αδύναμη σύνδεση με τις φυσικές πτυχές της λειτουργίας του συστήματος. Οι πιο διαδεδομένες μορφές χρηματοοικονομικών παραγώων που χρησιμοποιούνται στις αγορές ηλεκτρισμού είναι τα προθεσμιακά συμβόλαια, οι επιλογές, και οι παραλλαγές και συνδυασμοί τους. Η ενότητα 8.1 εισάγει τα προθεσμιακά συμβόλαια. Ένας από τους πιο σημαντικούς τύπους προθεσμιακών συμβολαίων, τα χρηματοοικομικά δικαιώματα μεταφοράς, εισάγονται στην ενότητα 8.2. Η ενότητα 8.3 εισάγει τις επιλογές, και πώς μπορούν να συντεθούν με τα προθεσμιακά συμβόλαια για να δημιουργήσουν χρηματοοικονικά εργαλεία διαχείρισης ρίσκου.

8.1 Προθεσμιακά συμβόλαια

Τα **προθεσμιακά συμβόλαια** είναι χρηματοοικονομικά εργαλεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη συναλλαγή ενός αγαθού σε μια τιμή η οποία μπορεί να αποφασιστεί πριν τον πραγματικό χρόνο. Αυτό επιτρέπει στους αντισυμβαλόμενους να προστατευτούν από την αβεβαιότητα που παρουσιάζουν οι τιμές σε πραγματικό χρόνο. Τα προθεσμιακά συμβόλαια χρησιμοποιούνται εκτεταμένα σε αγορές ηλεκτρικής ενέργειας για την αγοραπωλησία μεγάλων ποσοτήτων ισχύος μήνες ή χρόνια πριν την παράδοσή τους, προκειμένου να διασφαλιστούν οι επενδύσεις σε μονάδες παραγωγής.

Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο πωλείται από τον *πωλητή* του συμβολαίου προς τον *αγοραστή* του συμβολαίου και χαρακτηρίζεται από (i) την τιμή πώλησης f_t, (ii) την ποσότητα x του αγαθού το οποίο συναλλάσεται, και (iii) το χρόνο παράδοσης T του αγαθού, που ονομάζεται επίσης **χρόνος λήξης** του προθεσμιακού συμβολαίου.

Το συμβόλαιο υπόσεχται στον αγοραστή του συμβολαίου μια πληρωμή που είναι ίση με την τιμή πραγματικού χρόνου του υποκείμενου αγαθού, στο χρόνο λήξης του συμβολαίου. Αυτό συνεπάγεται πως ένα προθεσμιακό συμβόλαιο είναι συνδεδεμένο με την αγορά πραγματικού χρόνου ενός αγαθού. Εφόσον είναι μια καθαρά χρηματοοικονομική υποχρέωση, η απόδοση της οποίας *παράγεται* από την τιμή του υποκείμενου αγαθού, αναφέρεται και ως χρηματοοικονομικό παράγωγο.

Ορισμός 8.1: Προθεσμιακό συμβόλαιο

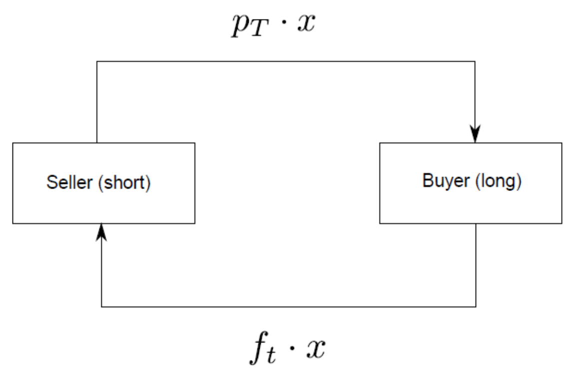
Πωλητής. Ο πωλητής ενός προθεσμιακού συμβολαίου με ημερομηνία λήξης T πουλα το συμβόλαιο σε χρόνο $t < T$ σε μια τιμή f_t. Ο πωλητής λέγεται ότι έχει **θέση short** στο συμβολαιο.

Αγοραστής. Ο αγοραστής του προθεσμιακού συμβολαίου με ημερομηνία λήξης T αγοράζει το συμβολαιο σε χρόνο $t < T$ για μια τιμή f_t. Ο αγοραστής λέγεται ότι έχει **θέση long** στο συμβόλαιο.

Υποχρεώσεις και αποδόσεις. Τη χρονική στιγμή $t < T$ ο αγοραστής πληρώνει τον πωλητή $f_t \cdot x$. Τη χρονική στιγή $t = T$ ο πωλητής του συμβολαίου πληρώνει τον αγοραστή $p_T \cdot x$, όπου p_T είναι η τιμή πργματικού χρόνου του υποκείμενου αγαθού.

Οι πληρωμές που σχετίζονται με ένα προθεσμιακό συμβόλαιο παρουσιάζονται στο Σχήμα 28.

Σχήμα 28: Πληρωμές σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο.



8.1.1 Οι αρετές των προθεσμιακών συμβολαίων

Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο επιτρέπει στον πωλητή και τον αγοραστή να συναλλάξουν ένα αγαθό σε μια τιμή f_t η οποία μπορεί να συμφωνηθεί εκ των προτέρων. Για να δούμε πώς επιτυγχάνεται αυτό, παρατηρούμε ότι ένας παραγωγός ενός αγαθού μπορεί να πουλήσει (θέση short) το προθεσμιακό συμβόλαιο σε χρονική στιγμή $t < T$ για μια ποσότητα x και να πουλήσει x μονάδες του αγαθού στην αγορά πραγματικού χρόνου, ενώ ο καταναλωτής του αγαθού μπορεί να αγοράσει (θέση long) το προθεσμιακό συμβόλαιο από τον παραγωγό τη στιγμή $t < T$ για ποσότητα x, και να αγοράσει x μονάδες του αγαθού στην αγορά πραγματικού χρόνου. Οι χρηματορροές προς τον παραγωγό είναι οι εξής:

- $+f_t \cdot x$ (από την πώληση του προθεσμιακού συμβολαίου)
- $+p_T \cdot x$ (από την παραγωγή σε πραγματικό χρόνο)
- $-p_T \cdot x$ (από τη διευθέτηση του συμβολαίου)

Οι χρηματορροές προς τον καταναλωτή είναι οι εξής:

- $-f_t \cdot x$ (από την αγορά του προθεσμιακού συμβολαίου)
- $-p_T \cdot x$ (από την κατανάλωση σε πραγματικό χρόνο)
- $+p_T \cdot x$ (από τη διευθέτηση του συμβολαίου)

Κατ'ουσίαν, ο παραγωγός πληρώνεται $f_t \cdot x$ και ο καταναλωτής πληρώνει $f_t \cdot x$. Χρησιμοποιώντας το προθεσμιακό συμβόλαιο, ο αγοραστής και ο πωλητής παρακάμπτουν την αγορά ηλεκτρισμού και συναλλάσουν το προϊόν σε μια τιμή f_t την οποία μπορούν να συμφωνήσουν διμερώς πριν το χρόνο παράδοσης T.

Οι χρηματορροές ενός παραγωγού που πουλά μια ποσότητα x του αγαθού σε μια τιμή f_t σε χρόνο t είναι

$$R = f_t \cdot x + p_T \cdot (q - x),$$

όπου q είναι η παραγωγή σε πραγματικό χρόνο. Σε πραγματικό χρόνο, το μέρος των εισοδημάτων που σχετίζεται με παρελθούσες αποφάσεις, $f_t \cdot x - p_T \cdot x$, μπορεί να θεωρηθεί ως παρελθόν ($sunk$) από την πλευρά του παραγωγού, υπό την έννοια ότι έχει ήδη αποφασιστεί και τίποτα δεν μπορεί να γίνει για να αλλάξει. Ο μόνος παράγων που είναι σε θέση να επηρρεάσει τη χρηματορροή του παραγωγού σε πραγματικό χρόνο είναι το πόσο παράγει σε πραγματικό χρόνο, q. Σημειώνεται από την παραπάνω εξίσωση πως ο πωλητής λαμβάνει την τιμή πραγματικού χρόνου για το σύνολο της παραγωγής του στο χρόνο T. Αυτό σημαίνει πως τα κίνητρα του παραγωγού δε στρεβλώνονται, υπό την έννοια ότι είναι πανομοιότυπα με τα κίνητρα που θα είχε ο παραγωγός αν δεν είχε συνάψει το προθεσμιακό συμβόλαιο. Ο παραγωγός έχει πάντα την επιλογή να παράγει ακριβώς την ποσότητα που έχει συναλλάξει στο προθεσμιακό συμβόλαιο, $q = x$, στην οποία περίπτωση ο παραγωγός πληρώνεται ακριβώς την προθεσμιακή τιμή f_t για κάθε μονάδα παραγωγής. Συμπερασματικά, το προθεσμιακό συμβόλαιο επιτρέπει στον παραγωγό να μηδενίσει το ρίσκο του λόγω της αβεβαιότητας των τιμών πραγματικού χρόνου συντηρώντας όμως ταυτόχρονα τα κατάλληλα κίνητρα για τον παραγωγό σε πραγματικό χρόνο. Το επιχείρημα και το συμπέρασμα είναι ταυτόσημα για τους καταναλωτές.

Η ευρεία χρήση προθεσμιακών συμβολαίων για τη διαχείριση ρίσκου έχει οδηγήσει στον ορισμό τυποποιημένων προθεσμιακών συμβολαίων με άκαμπτους όρους των οποίων η συναλλαγή γίνεται σε χρηματιστήρια και για τα οποία τα χρηματιστήρια φέρουν τον **κίνδυνο αθέτησης** (default risk), που είναι ο κίνδυνος του να μην πληρώσει ο πωλητής του συμβολαίου το προβλεπόμενο ποσό που συνεπάγεται το συμβόλαιο στη λήξη του συμβολαίου. Αυτά τα τυποποιημένα προθεσμιακά συμβόλαια ονομάζονται **συμβόλαια futures**. Τα τυποποιημένα συμβόλαια έχουν το συγκριτικό πλεονέκτημα σε σχέση με τα προθεσμιακά συμβόλαια πως ο κίνδυνος αθέτησης ελαχιστοποιείται (η αθέτηση του χρηματιστηρίου είναι σχεδόν απίθανη σε σχέση με την αθέτηση σε διμερείς συμφωνίες), και αυξάνεται η ρευστότητα της αγοράς. Ωστόσο, τα προθεσμιακά συμβόλαια είναι πιο ευέλικτα από τα τυποποιημένα συμβόλαια, εφόσον οι συμβαλλόμενοι είναι σε θέση να διαπραγματευτούν τους ακριβείς όρους της αγοραπωλησίας.

Είναι σχετικά απλό να ενσωματωθούν τα προθεσμιακά συμβόλαια με τη λειτουργία των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας και τις αγορές ηλεκτρισμού. Όσοι επιθυμούν να παρακάμψουν την αγορά μπορούν να προσφύγουν σε διμερή συναλλαγή με προθεσμιακό συμβόλαιο. Στον πραγματικό χρόνο, ο παραγωγός υποβάλλει προσφορά οριακού κόστους στο κάτω όριο που επιτρέπει η δημοπρασία, και ο καταναλωτής υποβάλει προσφορά στο άνω όριο της τιμής που επιτρέπει η δημοπρασία (προκειμένου να διασφαλίσουν και οι δύο πως είναι μέσα στην τιμή) για την ποσότητα που επιθυμούν να ανταλλάξουν. Οι δύο πλευρές κατόπιν διευθετούν το προθεσμιακό συμβόλαιο έξω από την αγορά. Ο διαχειριστής συστήματος χρεώνει ή αντίστοιχα πιστώνει τις δύο πλευρές ανάλογα με την τιμή πραγματικού χρόνου για την ποσότητα που καταναλώνουν ή αντίστοιχα παράγουν, όπως αυτή καταγράφεται από μετρητές.

Τα τυποποιημένα συμβόλαια μπορούν να συναλλάσονται με το διαχειριστή συστήματος. Αυτό δεν επηρρεάζει το φυσικό προγραμματισμό των μονάδων, αν και οι θέσεις των συμβολαίων παρέχουν πληροφορία στο διαχειριστή του συστήματος όσον αφορά τη μελλοντική παραγωγή και κατανάλωση του συστήματος.

8.1.2 Η τιμή των προθεσμιακών συμβολαίων

Ένας πράκτορας που είναι ουδέτερος προς το ρίσκο αποτιμά ένα προθεσμιακό συμβόλαιο ανάλογα με τη μέση τιμή της τιμής του υποκείμενου αγαθού στη χρονική στιγμή λήξης του συμβολαίου p_T:

$$f_t = \mathbb{E}[p_T | \xi_{[t]}] \tag{8.1}$$

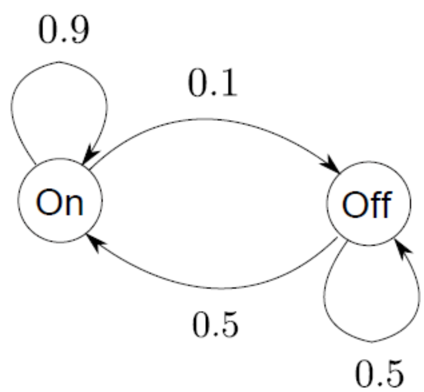
όπου το $\xi_{[t]}$ περιγράφει τη διαθέσιμη πληροφορία τη στιγμή t.

Παράδειγμα 8.1: Έστω ένα σύστημα με γραμμική συνάρτηση ζήτησης η οποία δίνεται από την ακόλουθη έκφραση:

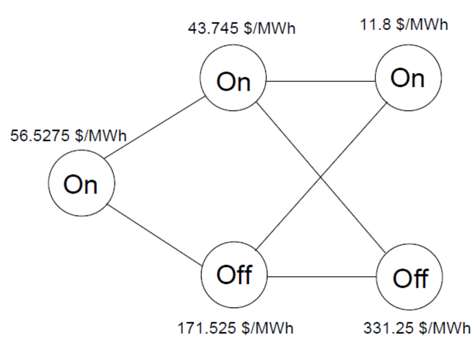
$$D(p) = 1620 - 4p.$$

Υπάρχουν δύο γεννήτριες στο σύστημα. Η πρώτη γεννήτρια έχει χωρητικότητα 1880 MW και οριακό κόστος 11.8 €/MWh. Η δεύτερη γεννήτρια έχει χωρητικότητα 295 MW και οριακό κόστος 65.1 €/MWh. Η πρώτη γεννήτρια είναι αναξιόπιστη, και οι αστοχίες και αποκαταστάσεις της περιγράφονται από μια αλυσίδα Markov στο Σχήμα 29.

Σχήμα 29: Μια αλυσίδα Markov που αναπαριστά τη λειτουργία μιας αναξιόπιστης μονάδας.



Σχήμα 30: Οι προθεσμιακές τιμές στο παράδειγμα 8.1.



Εδώ, το 0.1 αντιστοιχεί στην πιθανότητα μιας αστοχίας της γεννήτριας όταν η γεννήτρια είναι σε λειτουργία, και το 0.5 αντιστοιχεί στην πιθανότητα αποκατάστασης όταν μια γεννήτρια έχει αστοχήσει. Έστω ότι η γεννήτρια 1 είναι λειτουργική την περίοδο 0. Τότε η τιμή των προθεσμιακών συμβολαίων που λήγουν στην περίοδο 2 μπορεί να υπολογιστεί πηγαίνοντας προς τα πίσω. Όταν η αναξιόπιστη μονάδα είναι εκτός λειτουργίας, η ανταγωνιστική αγορά εκκαθαρίζει στα 295 MW, με τιμή εκκαθάρισης 331.25 €/MWh. Όταν η αναξιόπιστη γεννήτρια είναι εντός λειτουργίας, η αγορά εκκαθαρίζει στα 1572.8 MW, σε τιμή 11.8 €/MWh. Ο προς τα πίσω υπολογισμός των προθεσμιακών τιμών παρουσιάζεται στο . Η τιμή στην περίοδο 1 μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση 8.1 ως

$$f_1 = \begin{cases} 0.9 \cdot 11.8 + 0.1 \cdot 331.25 = 43.745 \dfrac{€}{\mathrm{MWh}}, & \xi_{[1]} = \mathrm{On} \\ 0.5 \cdot 11.8 + 0.5 \cdot 331.25 = 171.525 \dfrac{€}{\mathrm{MWh}}, & \xi_{[1]} = \mathrm{Off} \end{cases}$$

Παρομοίως, η τιμή στην περίοδο 0 υπολογίζεται ως

$$f_0 = 0.9 \cdot 43.745 + 0.1 \cdot 171.525 = 56.5275 \frac{€}{\mathrm{MWh}}$$

■

8.1.3 Συμβόλαια διαφορών

Ένα εναλλακτικό χρηματοοικονομικό παράγωγο που υπηρετεί την ίδια λειτουργία με ένα προθεσμιακό συμβόλαιο είναι το συμβόλαιο διαφορών (contract for differences, CfD). Όπως τα προθεσμιακά συμβόλαια, έτσι και τα συμβόλαια διαφορών χαρακτηρίζονται από τη στιγμή λήξης T, την ποσότητα x, και την τιμή συναλλαγής f_t.

Ορισμός 8.2: Συμβόλαιο διαφορών

Πωλητής. Ο πωλητής πουλά ένα συμβόλαιο διαφορών με χρόνο λήξης T τη χρονική στιγμή $t < T$ για x μονάδες του αγαθού.

Αγοραστής. Ο αγοραστής αγοράζει ένα συμβόλαιο διαφορών με χρόνο λήξης T τη στιγμή $t < T$ για x μονάδες του αγαθού.

Υποχρεώσεις και αποδόσεις. Τη στιγμή T ο πωλητής πληρώνει τον αγοραστή $(f_t - p_T) \cdot x$, όπου p_T είναι η τιμή πραγματικού χρόνου του αγαθού τη χρονική στιγμή T.

Το συμβόλαιο διαφοράς έχει ακριβώς τον ίδιο σκοπό με το προθεσμιακό συμβόλαιο. Ένα φορτίο μπορεί να αγοράσει ένα συμβόλαιο διαφοράς για ποσότητα x τη στιγμή $t < T$ και να καταναλώσει x μονάδες στον πραγματικό χρόνο T. Τότε πληρώνει ένα καθαρό ποσό ίσο με $f_t \cdot x$. Παρομοίως, αν ένας παραγωγός παράγει ποσότητα του αγαθού x σε πραγματικό χρόνο, πληρώνεται $f_t \cdot x$. Οι επιθυμητές ιδιότητες των προθεσμιακών συμβολαίων, που περιγράφονται στην ενότητα 8.1.1, ισχύουν πανομοιότυπα για τα συμβόλαια διαφορών.

8.2 Χρηματοοικονομικά δικαιώματα μεταφοράς

Η προηγούμενη ενότητα δείχνει πώς τα προθεσμιακά συμβόλαια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επιτρέψουν τις διμερείς συναλλαγές χωρίς να αφαιρέσουν το κίνητρο από τους συμμετέχοντες στην αγορά να λειτουργήσουν αποδοτικά σε πραγματικό χρόνο. Αν και τα προθεσμιακά συμβόλαια εξυπηρετούν το σκοπό τους σε μια αγορά με μια ενιαία τιμή σε όλες τις τοποθεσίες, αποτυγχάνουν να εκμηδενίσουν το ρίσκο σε μια αγορά με κομβική τιμολόγηση.

Παράδειγμα 8.2: Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με κομβική τιμολόγηση. Ένας παραγωγός A που βρίσκεται στον κόμβο A επιθυμεί να ανταλλάξει 400 MW με ένα φορτίο στον κόμβο B στα 40 €/MWh. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν ο παραγωγός πουλήσει ένα προθεσμιακό συμβόλαιο για $x = 400$ MW σε τιμή $f_t = 40$ €/MWh στο φορτίο. Έστω ότι δεν υπάρχει συμφόρηση, και ότι οι τιμές σε πραγματικό χρόνο είναι $p_A = p_B = 50$ €/MWh. Οι χρηματορροές του παραγωγού είναι:

- $+40 \cdot 400 = +16000$ € (από την πώληση του προθεσμιακού συμβολαίου)
- $+50 \cdot 400 = +20000$ € (από την παραγωγή στην αγορά πραγματικού χρόνου)
- $-50 \cdot 400 = -20000$ € (από την εκκαθάριση του προθεσμιακού συμβολαίου)

Οι χρηματορροές του φορτίου είναι:

- $-40 \cdot 400 = -16000$ € (από την αγορά του προθεσμιακού συμβολαίου)
- $-50 \cdot 400 = -20000$ € (από την κατανάλωση στην αγορά πραγματικού χρόνου)
- $+50 \cdot 400 = +20000$ € (από την εκκαθάριση του προθεσμιακού συμβολαίου)

Το καθαρό αποτέλεσμα αυτών των συναλλαγών είναι ότι ο παραγωγός πληρώνεται 16000 € και το φορτίο πληρώνει 16000 €. Οι δύο πλευρές έχουν πετύχει μια συναλλαγή στα 40 €/MWh, όπως ήταν ο αρχικός σκοπός. Έστω, απεναντίας, ότι υπάρχει συμφόρηση στο σύστημα με τιμές πραγματικού χρόνου ίσες με $p_A = 36$ €/MWh και $p_B = 45$ €/MWh στις τοποθεσίες του παραγωγού και του φορτίου αντιστοίχως. Έστω ότι το προθεσμιακό συμβόλαιο είναι για ενέργεια στην τοποθεσία A. Οι χρηματορροές προς τον παραγωγό είναι:

- $+40 \cdot 400 = +16000$ € (από την πώληση του προθεσμιακού συμβολαίου)
- $+36 \cdot 400 = +14400$ € (από την παραγωγή στην αγορά πραγματικού χρόνου)
- $-36 \cdot 400 = -14400$ € (από την εκκαθάριση του προθεσμιακού συμβολαίου)

Οι χρηματορροές του φορτίου είναι:

- $-40 \cdot 400 = -16000$ € (από την αγορά του προθεσμιακού συμβολαίου)
- $-45 \cdot 400 = -18000$ € (από την κατανάλωση στην αγορά πραγματικού χρόνου)
- $+36 \cdot 400 = +14400$ € (από την εκκαθάριση του προθεσμιακού συμβολαίου)

Αν και ο παραγωγός πληρώνεται 40 €/MWh, όπως ήταν η αρχική πρόθεση, το φορτίο πληρώνει 19600 €, άρα 49 €/MWh. Κατ'ουσίαν, το φορτίο πληρώνει τη διαφορά τιμών $p_B - p_A = 9$ €/MWh μεταξύ της τοποθεσίας του παραγωγού και του φορτίου. Διαπιστώνεται ότι το προθεσμιακό συμβόλαιο δεν μπορεί να απορροφήσει τον κίνδυνο από τις διαφορές τιμών μεταξύ τοποθεσιών. Η λειτουργία των χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων μεταφοράς είναι να απορροφήσουν τον κίνδυνο από τις διαφορές τιμών που ανακύπτουν σε συνθήκες συμφόρησης.

■

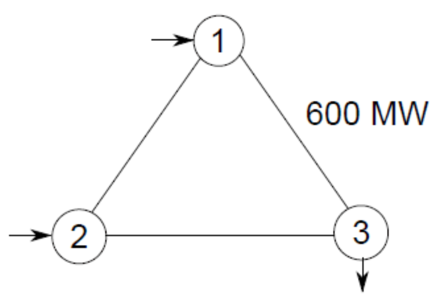
Η ρίζα του προβλήματος στο παράδειγμα 8.2 είναι το γεγονός πως τα προθεσμιακά συμβόλαια δεν μπορούν να προστατέχουν από το κόστος της πρόσβασης στο δίκτυο μεταφοράς. Προκειμένου να αναπτυχθούν χρηματοοικονομικά εργαλεία που προστατεύουν από τις διαφορές τιμών μεταξύ τοποθεσιών, είναι απαραίτητο να οριστούν δικαιώματα για τη χρήση των γραμμών. Το πώς ορίζονται αυτά τα δικαιώματα είναι μη προφανές. Αυτό καταδεικνύεται από το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.3: Ας θεωρήσουμε το δίκτυο που παρουσιάζεται στο Σχήμα 31. Οι παραγωγοί βρίσκονται στους κόμβους 1 and 2, και το φορτίο βρίσκεται στον κόμβο 3. Η γραμμή 1-3 μπορεί να μεταφέρει μόνο 600 MW ισχύος. Τα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά των γραμμών είναι πανομοιότυπα. Οι παραγωγοί και το φορτίο δεν μπορούν να συναλλάσουν ελεύθερα, λόγω του θερμικού ορίου της γραμμής 1-3. Έστω πως, προκειμένου να διευκολυνθούν οι προθεσμιακές συναλλαγές, ορίζεται μια διαδρομή συμβολαίων από την περιοχή της γεννήτριας προς των περιοχή φορτίου, προκειμένου να αποτραπεί η υπερφόρτιση της γραμμής. Πόσα δικαιώματα πρέπει να εκδωθούν για αυτή τη διαδρομή; Ας εξετάσουμε τις ακόλουθες δύο δυνατότητες:

1. Μια επιλογή θα ήταν η έκδοση 900 MW δικαιωμάτων. Στην περίπτωη αυτή, ενξαρτήτως του ποια γεννήτρια παράγει στο δίκτυο, το θερμικό όριο της γραμμής 1-3 θα γίνει σεβαστό. Αυτό γίνεται ξεκάθαρο αν παρατηρήσουμε ότι η μεγαλύτερη πίεση ασκείται στο σύστημα όταν αποστέλλεται ισχύς από τον κόμβο 1 στο φορτίο. Η επιβολή ενός ορίου 900 MW στην ποσότητα ισχύος που μπορεί να μεταφερθεί στο φορτίο συνεπάγεται ότι η γραμμή 1-3 θα χρησιμοποιηθεί ακριβώς μέχρι το όριό της, τα 600 MW. Το πρόβλημα με αυτήν την προσέγγιση είναι ότι αν η παραγωγή ισχύος στον κόμβο 1 ελλατωθεί και η παραγωγή στον κόμβο 2 αυξηθεί (π.χ. αν οι γεννήτριες στον κόμβο 2 είναι φθηνότερες), τότε μπορεί να αποσταλεί επιπλέον ισχύς στο φορτίο, αλλά η αγορά δεν το επιτρέπει αν υπάρχει ένα όριο 900 MW στα δικαιώματα της διαδρομής συμβολαίων.
2. Μια εναλλακτική επιλογή είναι η έκδοση 1800 MW δικαιωμάτων. Στην περίπτωση αυτή, μπορεί να αποσταλεί επιπλέον ισχύς στο φορτίο χρησιμοποιώντας τις γεννήτριες στον κόμβο 2. Ωστόσο, στην περίπτωη αυτή, αν οι γεννήτριες στον κόμβο 1 αγοράσουν αρκετά μεγάλο αριθμό δικαιωμάτων, τότε είναι σε θέση να παραβιάσουν το θερμικό όριο των γραμμής 1-3.

Γίνεται συνεπώς προφανές ότι η χρήση διαδρομών συμβολαιών οδηγεί είτε σε ένα μη αποδοτικό περιορισμό των αγοραπωλησιών, είτε σε μια πιθανή παραβίαση των θερμικών ορίων του δικτύου.

Σχήμα 31: Το δίκτυο του παραδείγματος 8.2.



■

Το προηγούμενο παράδειγμα ορίζει δικαιώματα για τη μεταφορά ισχύος μεταξύ ζωνών. Τα δικαιώματα αυτά αναφέρονται ως **διαδρομές συμβολαίων** (contract paths). Οι διαδρομές συμβολαίων είναι προβληματικές διότι στην πραγματικότητα η ικανότητα χρήσης των γραμμών μεταφοράς δεν είναι μια σταθερά, παρά εξαρτάται από την παραγωγή και τη ζήτηση σε κάθε κόμβο ενός δικτύου λόγω των νόμων του Kirchoff. Η ιδέα των **χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων μεταφοράς** (financial transmission rights, FTRs) είναι να ορίσουν μακροπρόθεσμα δικαιώματα μεταφοράς ισχύος μεταξύ ζευγών κόμβων του δικτύου, αντί επί διαδρομών.

Ορισμός 8.3: Τα χρηματοοικονομικά δικαιώματα μεταφοράς είναι χρηματοοικονομικά εργαλεία τα οποία ορίζονται ως εξής.

Πωλητής. Τη στιγμή $t < T$ ο πωλητής πουλά ένα χρηματοοικονομικό δικαίωμα μεταφοράς για την αποστολή ενέργειας από την τοποθεσία A στην τοποθεσία B για x MW με στιγμή λήξης T.

Αγοραστής. Τη στιγμή $t < T$ ο αγοραστής του χρηματοοικονομικού δικαιώματος μεταφοράς με στιμή λήξης T αγοράζει το συμβόλαιο.

Υποχρεώσεις και αποδόσεις. Τη στιγμή T ο πωλητής πληρώνει τον αγοραστή του χρηματοοικονομικού δικαιώματος μεταφοράς $(p_B - p_A) \cdot x$, όπου τα p_A, p_B είναι οι κομβικές τιμές του ηλεκτρισμού στις τοποθεσίες A και B αντιστοίχως.

Παράδειγμα 8.4: Επιστρέφοντας στο παράδειγμα 8.2, ας υποθέσουμε ότι το φορτίο στην τοποθεσία B αγοράζει ένα προθεσμιακό συμβόλαιο από τον παραγωγό στην τοποθεσία A καθώς και ένα χρηματοοικονμοικό δικαίωμα μεταφοράς για την αποστολή ισχύος από το A στο B. Η χρηματορροή στον παραγωγό δεν αλλάζει, δηλαδή ο παραγωγός πουλά ενέργεια στα 40 €/MWh. Η χρηματορροή στο φορτίο είναι:

- $-40 \cdot 400 = -16000$ € (από την αγορά του προθεσμιακού συμβολαίου)
- $-45 \cdot 400 = -18000$ € (από την κατανάλωση στην αγορά πραγματικού χρόνου)
- $+36 \cdot 400 = +14400$ € (από την εκκαθάριση του προθεσμιακού συμβολαίου)
- $+9 \cdot 400 = +3600$ € (από την εκκαθάριση του χρηματοοικονομικού δικαιώματος μεταφοράς)

Το καθαρό αποτέλεσμα αυτών των συναλλαγών είναι πως το φορτίο πληρώνει 16000 €. Συνεπώς, το FTR συνδυασμένο με το προθεσμιακό συμβόλαιο επιτρέπει στο φορτίο να αγοράσει ενέργεια από τον παραγωγό σε σταθερή τιμή, ανεξάρτητα της τιμής της αγοράς.

■

8.2.1 Δημοπρασίες χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων μεταφοράς

Σε αντίθεση με τα προθεσμιακά συμβόλαια, τα οποία συναλλάσονται διμερώς μεταξύ φορέων της αγοράς, ο πωλητής των FTRs είναι ο διαχειριστής συστήματος. Ο λόγος είναι ότι τα FTRs πρέπει να κατανέμονται με τέτοιο τρόπο που να διασφαλίζει ότι οι περιορισμού μεταφοράς γίνονται σεβαστοί, και η μόνη οντότητα που έχει πλήρη εικόνα των φυσικών περιορισμών είναι ο διαχειριστής συστήματος. Τα FTRs κατανέμονται μέσω μιας δημοπρασίας FTR. Η κατανομή των FTRs σε μια δημοπρασία FTR πρέπει να είναι τέτοια ώστε οι συνεπαγόμενες ροές να ικανοποιούν τους πριορτισμούς μεταφοράς του δικτύου.

Τα FTRs κατά κανόνα δημοπρατούνται από το διαχειρσιτή συστήματος προς τους συμμετέχοντες στην αγορά, και μετά συναλλάσονται μεταξύ των συμμετεχόντων σε δευτερογενείς αγορές. Εφόσον ο διαχειριστής συστήματος είναι ο αρχικός πωλητής των FTRs, ο διαχειριστής συστήματος είναι επίσης υπεύθυνος για να απολπληρώσει τις FTRs σε πραγματικό χρόνο. Μια σημαντική ιδιότητα των FTRs είναι πως, δεδομένου ότι τα FTRs που πωλούνται αρχικά σέβονται τους περιορισμιύς μεταφοράς του δικτύου, ο διαχειριστής συστήματος συλλέγει επαρκή εισοδήματα σε μια δημοπρασία LMP για να καλύψει τις πληρωμές των FTRs. Η ιδιότητα αναφέρεται ως **επάρκεια εσόδων** (revenue adequacy) των FTRs.

Πρόταση 8.4: Τα χρηματοοικονομικά δικαιώματα μεταφοράς παράγουν δημιουργούν επάρκεια εσόδων.

Απόδειξη Αυτό είναι συνέπεια της πρότασης 5.9 εφόσον το $-\sum_n \rho_n r_n$ είναι το ενοίκιο συμφόρησης και το $-\sum_n \rho_n \tilde{r}_n$ είναι οι πληρωμές των FTRs.

■

8.2.2 Οι αρετές των χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων μεταφοράς

Τα FTRs μπορούν να συνδυαστούν με τα προθεσμιακά συμβόλαια προκειμένου να επιτρέψουν στις δύο πλευρές να συναλλάξουν ενέργεια σε μια σταθερή τιμή την οποία συμφωνούν οι συμβαλόμενοι εκ των προτέρων, ακόμη κι αν η τιμή μεταβάλλεται μεταξύ τοποθεσιών. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εφόσον ο παραγωγός πουλήσει ένα προθεσμιακό συμβόλαιο στην τοποθεσία του, και εφόσον το φορτίο αγοράσει το προθεσμιακό συμβόλαιο και ένα FTR για την αποστολή ισχύος από την τοποθεσία του πωλητή στη δική του τοποθεσία.

Τα FTRs διατηρούν τα κίνητρα των συμμετεχόντων να παράγουν / καταναλώσουν αποδοτικά σε πραγματικό χρόνο. Το επιχείρημα είναι πανομοιότυπο με το επιχείρημα που χρησιμοποιείται για τα προθεσμιακά συμβόλαια.

Δεδομένου ότι τα FTRs είναι καθαρά χρηματοοικονομικά εργαλεία, και δεν παρμεβάλλονται με τη φυσική λειτουργία του δικτύου, μπορούν να ενταχθούν με ευκολία στις λειτουργίες του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας. Κατ'αντίθεση, τα **φυσικά δικαιώματα μεταφοράς** (physical transmission rights, PTRs) είναι φυσικά δικαιώματα για τη χρήση γραμμών μεταφοράς τα οποία αποδίδουν αποκλειστικό δικαίωμα πρόσβασης στις γραμμές μεταφοράς από τους ιδιοκτήτες των δικαιωμάτων, και δεν αποδίδουν πληρωμή, εκτός αν τα PTRs συναλλαγούν πριν τη λήξη τους. Τα PTRs παρεμβάλλονται με τη φυσική λειτουργία του δικτύου εφόσον το δικαίωμα πρόσβασης στις γραμμές δεν μπορεί να μεταφερθεί, εκτός αν τα ίδια τα PTRs πωληθούν από τον κάτοχό τους.

Τα FTRs, όπως τα προθεσμιακά συμβόλαια, παρέχουν πληροφορία στο διαχειριστή συστήματος, πριν τη λειτουργία πραγματικού χρόνου. Η πληροφορία αυτή μπορεί να υποστηρίξει τον αποδοτικό προγραμματισμό των μονάδων παραγωγής.

8.3 Προθεσμιακά συμβόλαια με επιλογή αγοράς

Τα προθεσμιακά συμβόλαια με επιλογή αγοράς είναι μια επέκταση των προθεσμιακών συμβολαίων, τα οποία παρουσιάστηκαν στην ενότητα 8.1, που έχουν τη δυνατότητα να είναι ιδιαιτέρως χρήσιμα για την ένταξη της απόκρισης ζήτησης στα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας. Προκειμένου να εισαχθούν τα προθεσμιακά συμβόλαια με επιλογή αγοράς, είναι πρώτα απαραίτητο να εισάγουμε τις επιλογές αγοράς (call options).

Ορισμός 8.5: Οι **επιλογές αγοράς** είναι χρηματοοικονομικά εργαλεία τα οποία χαρακτηρίζονται από μια **τιμή εξάσκησης** (strike price), μια στιγμή λήξης, και ένα υποκείμενο αγαθό. Λειτουργούν ως εξής:

Πωλητής. Ο πωλητής μιας επιλογής αγοράς με ημερομηνία λήξης T και τιμή εξάσκησης k πουλά την επιλογή τη στιγμή $t < T$ για μια ποσότητα x του υποκείμενου αγαθού. Ο πωλητής παίρνει *θέση short* στην επιλογή αγοράς.

Αγοραστής. Ο αγοραστής της επιλογής αγοράς με στιγμή λήξης T σε τιμή εξάσκησης k αγοράζει το συμβόλαιο τη στιγμή $t < T$ για μια ποσότητα x του υποκείμενου αγαθού. Ο αγοραστής παίρνει *θέση long* στην επιλογή αγοράς.

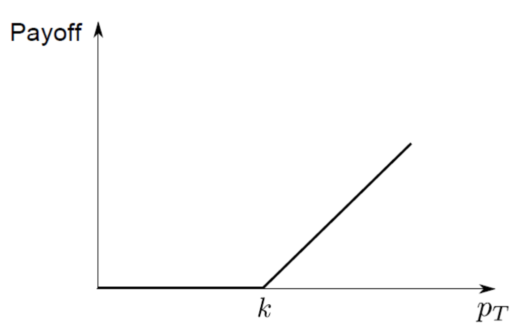
Υποχρεώσεις και αποδόσεις. Τη στιγμή $t<T$ ο αγοραστής πληρώνει τον πωλητή την τιμή της επιλογής αγοράς. Τη στιγμή T ο πωλητής της επιλογής πληρώνει τον αγοραστή $\max(p_T - k, 0) \cdot x$, όπου p_T είναι η τιμή πραγματικού χρόνου του υποκείμενου αγαθού.

Η επιλογή αγοράς προσδίδει στον αγοραστή το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει το υποκείμενο αγαθό από τον πωλητή σε μια ορισμένη τιμή εξάσκησης k τη στιγμή λήξης T. Για να γίνει αυτό ξεκάθαρο, παρατηρούμε πως αν η τιμή του αγαθού είναι χαμηλότερο του k τότε η επιλογή αγοράς δεν έχει αξία τη στιγμή της λήξης της. Αν η τιμή του αγαθού είναι μεγαλύτερη του k τότε ο αγοραστής της επιλογής λαμβάνει $(p_T - k) \cdot x$ από τον πωλητή και αγοράζει το αγαθό από την αγορά πραγματικού χρόνου, με ένα καθαρό έξοδο k ανά μονάδα του αγαθού που συναλλάσεται.

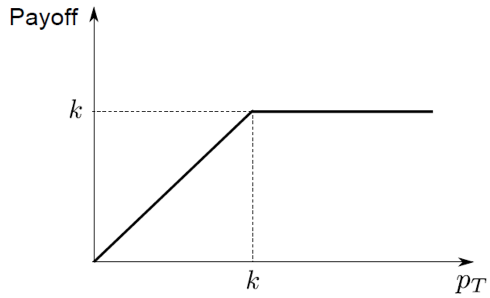
Η ευρύτερη χρήση, συνεπώς, των επιλογών αγοράς είναι πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν εργαλεία για προστασία από το ρίσκο για καταναλωτές του υποκείμενου αγαθού οι οποίοι δεν επιθυμούν να είναι εκτεθιμένοι σε υψηλές τιμές πραγματικού χρόνου. Όπως και στην περίπτωση των προθεσμιακών συμβολαίων και άλλων χρηματοοικονομικών εργαλείων, υπάρχει δευτερογενής αγορά για τη συναλλαγή των επιλογών αγοράς.

Η απόδοση της επιλογής αγοράς ως συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου αγαθού παρουσιάζεται στο Σχήμα 32. Η επιλογή αγοράς μπορεί να συνδυαστεί με τα προθεσμιακά συμβόλαια προκειμένου να δημιουργηθούν προθεσμιακά συμβόλαια με επιλογή αγοράς.

Σχήμα 32: Η απόδοση της επιλογής αγοράς.



Σχήμα 33: Η απόδοση του προθεσμιακού συμβολαίου με επιλογή αγοράς.



Ορισμός 8.6: Τα προθεσμιακά συμβόλαια με επιλογή αγοράς ορίζονται ως εξής:

Πωλητής: Ο πωλητής του προθεσμιακού συμβολαίου με επιλογή αγοράς με χρόνο λήξης T και τιμή εξάσκησης k πουλά το συμβόλαιο τη στιγμή $t < T$ για μια ποσότητα x ενός υποκείμενου αγαθού.

Αγοραστής: Ο αγοραστής του προθεσμιακού συμβολαίου με επιλογή αγοράς με χρόνο λήξης T και τιμή εξάσκησης k αγοράζει το συμβόλαιο τη στιγμή $t < T$ για μια ποσότητα x για ένα υποκείμενο αγαθό.

Υποχρεώσεις και αποδόσεις. Τη στιγμή $t < T$ ο αγοραστής πληρώνει τον πωλητή την τιμή του προθεσμιακού συμβολαίου με επιλογή αγοράς. Τη στιγμή T ο πωλητής του συμβολαίου πληρώνει τον αγοραστή $\min(p_T, k) \cdot x$, όπού το p_T είναι η τιμή πραγματικού χρόνου για το υποκείμενο αγαθό.

Η απόδοση του προθεσμιακόυ συμβολαίου με επιλογή αγοράς ως συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου αγαθού παρουσιάζεται στο Σχήμα 33. Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με επιλογή αγοράς είναι ο συνδυασμός μιας θέσης short σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο και μιας θέσης long σε μια επιλογή αγοράς. Αυτό συνεπάγεται πως στη λήξη του συμβολαίου ο πωλητής του συμβολαίου πληρώνει τον αγοραστή p_T για να ρυθμίσει τη θέση short στο προθεσμιακό συμβόλαιο και λαμβάνει μια πληρωμή $\max(p_T - k, 0)$ για να ρυθμίσει τη θέση long στην επιλογή αγοράς, δηλαδή ο αγοραστής του προθεσμιακού συμβολαίου με επιλογή αγοράς λαμβάνει μια πληρωμή $\max(p_T, k)$ από τον πωλητή.

Το προθεσμιακό συμβόλαιομε επιλογή αγοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διακοπεί η παροχή του αγαθού στον αγοραστή του συμβολαίου όταν η τιμή πραγματικού χρόνου του αγαθού ξεπερνά την τιμή εξάσκησης k. Για να γίνει αυτό ξεκάθαρο, παρατηρούμε πως στη λήξη ο αγοραστής του συμβολαίου λαμβάνει p_T από τον πωλητή αν $p_T \leq k$ και μπορεί να χρησιμοποιήσει την πληρωμή για να αγοράσει το αγαθό από την αγορά πραγματικού χρόνου. Αν $p_T > k$ τότε ο αγοραστής του συμβολαίου λαμβάνει k.

Τα προθεσμιακά συμβόλαια με επιλογή αγοράς μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να διασφαλιστεί μια αποζημίωση k σε περίπτωση που η τιμή ηλεκτρισμού πραγματικού χρόνου ξεπερνά το k. Χωρίς τέτοια συμβόλαια, τα φορτία με αποτίμηση v που υποβάλουν αληθείς προσφορές δε λαμβάνουν ισχύ όταν $p_T \geq v$. Αγοράζοντας ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με επιλογή αγοράς με τιμή εξάσκησης k ίση με την αποτίμησή τους, $k = v$, τα φορτία διασφαλίζουν πως ακόμη κι αν η προσφορά τους είναι εκτός τιμής τότε λαμβάνουν αποζημίωση ίση με την αποτίμησή τους.

Κατ'ουσίαν, τα προθεσμιακά συμβόλαια με επιλογή αγοράςμε $k = v$ διασφαλίζουν πως τα φορτία λαμβάνουν πάντα την πλήρη αξία της παροχής ηλεκτρισμού, ανεξαρτήτως της τιμής του ηλεκτρισμού σε πραγματικό χρόνο.

Ο διαχειριστής συστήματος ωφελείται επίσης από τα προθεσμιακά συμβόλαια με επιλογή αγοράς. Φορτία τα οποία αγοράζουν αυτά τα συμβόλαια εισέρχονται σε μακροπρόθεσμες δεσμεύσεις για απόκριση ζήτησης. Πουλώντας προθεσμιακά συμβόλαια με επιλογή αγοράς, ο διαχειριστής συστήματος λαμβάνει πληροφορία για τη μορφή της συνάρτησης ζήτησης πριν τη λειτουργία πραγματικού χρόνου. Αυτό μπορεί να είναι ωφέλιμο όσον αφορά τον προγραμματισμό της επέκτασης δυναμικότητας του συστήματος με βέλτιστο τρόπο, ιδίως σε συστήματα με μεγάλη κλίμακα διείσδυσης ανανεώσιμων πηγών ενέργειας. Όπως τα χρηματοοικονομικά δικαιώματα μεταφοράς, τα προθεσμιακά συμβόλαια με επιλογή αγοράς μπορούν να πουληθούν από το διαχειριστή συστήματος και μεταπωλούνται σε δευτερογενείς αγορές. Στην άσκηση 8.3 δείχνουμε πως όταν καταναλωτές με ουδέτερη στάση προς το ρίσκο αντιμετωπίζουν προθεσμιακά συμβόλαια με δικαίωμα επιλογής και διαφορετικές τιμές εξάσκησης, θα διαλέξουν το συμβόλαιο για το οποίο η τιμή εξάσκησης ισούται με την αποτίμησή τους.

Προβλήματα

8.1 Γιατί υπάρχουν τα συμβόλαια διαφορών, δεδομένου ότι επιτυγχάνουν τον ίδιο ακριβώς σκοπό με τα προεθσμιακά συμβόλαια;

8.2 Έστω $j_t(k) = \mathbb{E}[\min(p_T, k)]$ η τιμή που αποδίδει ένας πάροχος με ουδέτερη στάση προς το ρίσκο σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με επιλογή αγοράς με τιμή εξάσκησης k, όπου η μέση τιμή λαμβάνεται σε σχέση με την πληροφορία που είναι διαθέσιμη τη στιγμή t και p_T είναι η τιμή του αγαθού τη στιγμή T. Δείξτε ότι:

1. το $j_t(k)$ είναι μη φθίνουσα, κοίλη συνάρτηση του k.

2. $j_t(k) \leq k$.

3. $lim_{k\to\infty} j_t(k) = \mathbb{E}[p_T]$.

8.3 Ας θεωρήσουμε έναν καταναλωτή με ουδετερότητα προς το ρίσκο, και αποτίμηση v, ο οποίος εξετάζει την πιθανή αγορά ενός προθεσμιακού συμβολαίου με επιλογή αγοράς και τιμή εξάσκησης k. Δείξτε ότι ο καταναλωτής θα διαλέξει ένα προθεσμιακού συμβολαίου με επιλογή αγοράς και τιμή εξάσκησης $k = v$.

Βιλβιογραφία

Κεφάλαιο 8.1.

Το υλικό σε αυτήν την την ενότητα βασίζεται στους (Kaye, et al., 1990).

Chapter 8.2.

Το υλικό σε αυτήν την ενότητα βασίζεται στους (Hogan, 1992) και (Lyons, Fraser & Parmesano 2000). Το παράδειγμα 8.2 είναι βασισμένο στον (Hogan, 1992).

Κεφάλαιο 8.3.

Το υλικό αυτής της παραγράφου βασίζεται στους (Gedra & Varaiya, 1998).

9. Απόκριση ζήτησης

E

9.1 Νυχτερινό τιμολόγιο

E

9.2 Τιμολόγηση βάσει προτεραιότητας υπηρεσίας

E

10. Επέκταση συστήματος

Το παρόν κεφάλαιο εστιάζει σε μακροπρόθεσμα μοντέλα. Η ενότητα 10.1 εισάγει το πρόβλημα προγραμματισμού **επέκτασης χωρητικότητας** (capacity expansion) ως ένα κεντρικό πρόβλημα προγραμματισμού. Η ενότητα 10.2 παρουσιάζει το μοντέλο ισορροπίας με επενδυτές οι οποίοι επενδύουν σε μονάδες παραγωγής και συσχετίζει το μοντέλο αυτό με το κεντρικό μοντέλο προγραμματισμού. Το κεφάλαιο πραγματεύεται επιπλέον διλήμματα σχεδιασμού αγοράς.

10.1 Προγραμματισμός επέκτασης συστήματος

Το πρόβλημα προγραμματισμού επέκτασης χωρητικότητας παραγωγής είναι το πρόβλημα της κατασκευής νέων μονάδων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας προκειμένου να διασφαλιστεί ότι η μελλοντική ζήτηση του συστήματος μπορεί να ικανοποιηθεί σε ελάχιστο κόστος επένδυσης και λειτουργίας.

Στην απλούστερή του μορφή, το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σε δύο στάδια, όπου το πρώτο στάδιο αποτελείται από αποφάσεις κατασκευής μονάδων και το δεύτερο στάδιο αποτελείται από αποφάσεις λειτουργίας δεδομένης της κατασκευής μονάδων που έχει αποφασιστεί στο προώτο στάδιο.

Είναι χρήσιμο να γίνει διάκριση μεταξύ φορτίου και ζήτησης στην ακόλουθη συζήτηση. Το **φορτίο** ορίζεται ως η ποσότητα ισχύος η οποία θα μπορούσε να καταναλωθεί αν η ενέργεια γινόταν διαθέσιμη σε μηδενική τιμή. Αυτό διακρίνεται από τη **ζήτηση**, που είναι η κατανάλωση η οποία λαμβάνει χώρα όταν η ηλεκτρική ενέργεια καταναλώνεται με μια ορισμένη μη μηδενική τιμή. Η ζήτηση είναι ίση με την προσφορά του συστήματος και δεν μπορεί να είναι μεφαλύτερη από το φορτίο.

Παράδειγμα 10.1: Έστω ένα σύστημα που αποτελείται από μια μονδαδική γεννήτρια με χωρητικότητα 100 MW και μια συνάρτηση ζήτησης $D(v) = 110 - 5v$, όπου το v είναι η αποτίμηση. Το φορτίο ισούται με 110 MW, αλλά η ζήτηση δεν μπορεί να ξεπεράσει τα 100 MW.

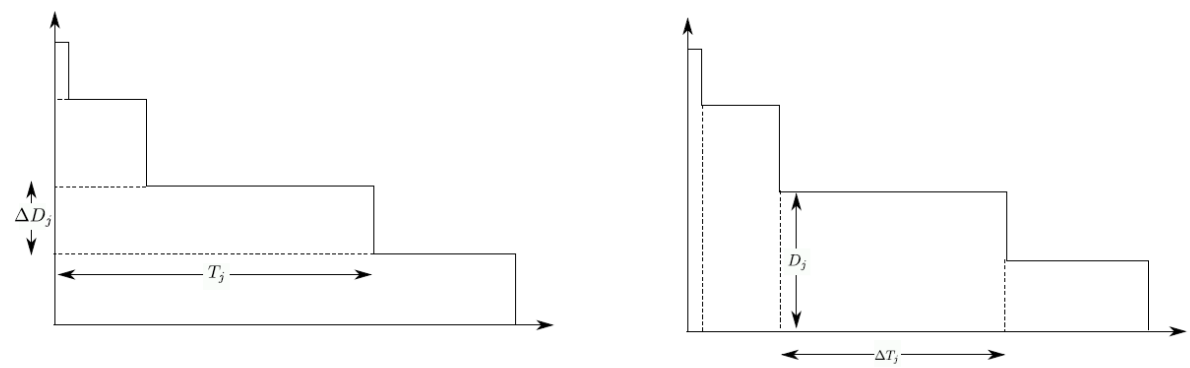
■

Τα δύο βασικά συστατικά ενός μοντέλου επέκτασης δυναμικότητας παραγωγής είναι το κόστος επένδυσης και το οριακό κόστος των γεννητριών, καθώς και το προφίλ του φορτίου. Το οριακό κόστος μετράται σε €/MWh. Το κόστος επένδυσης κατά κανόντα μετατρέπεται σε ένα ωριαίο κόστος επένδυσης το οποίο απαιτείται για την κατασεκυή 1 MW χωρητικότητας (βλέπε ενότητα 3.1.1). Το κόστος επένδυσης μετριέται συνεπώς σε €/MWh. Είναι προφανές πως, προκειμένου να είναι υποψήφια προς επένδυση η τεχνολογία, το κόστος καυσίμου της πρέπει να είναι χαμηλότερο από το κόστος καυσίμου οποιασδήποτε ανταγωνιστικής τεχνολογίας η οποία έχει χαμηλότερο κόστος επένδυσης. Με άλλα λόγια, οι τεχνολογίες μπορούν να ταξινομηθούν σε σειτά αυξανόμενου κόστους κεφαλαίου και μειώμενου κόστους καυσίμου: αν $I_1 \leq I_2 \leq \cdots \leq I_n$, τότε $C_1 \geq C_2 \geq \cdots \geq C_n$.

Το φορτίο αναπαριστάται χρησιμοποιώντας μια καμπύλη διάρκειας φορτίου (η ενότητα 1.2 αναπτύσσει μια λεπτομερή συζήτηση για τις καμπύλες διάρκειας φορτίου). Οι καμπύλες διάρκειας φορτίου παρουσιάζουν τον αριθμό των ωρών σε ένα έτος για τις οποίες το φορτίο είναι μεγαλύτερο ή ίσο ενός δεδομένου επιπέδου. Οι καμπύλες διάρκειας φορτίου κατασκευάζονται οργανώνοντας τη χρονοσειρά του φορτίου συστήματος σε φθίνουσα σειρά. Μια βαθμωτή προσέγγιση της καμπύλης διάρκειας φορτίου χρησιμοποιείται ως δεδομένου εισόδου σε μοντέλα επέκτασης δυναμικότητας παραγωγής.

Η καμπύλη διάρκειας φορτίου μπορεί να διαχωριστεί με δύο τρόπους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 34. Ένας οριζόντιος διαχωρισμός χωρίζει την καμπύλη σε m φέτες φορτίου, κάθε μία από τις οποίες διαρκεί T_j. Κάθε φέτα φορτίου προσθέτει επιπλέον φορτίο ΔD_j στο σύστημα. Αυτή είναι η αναπαράσταση που χρησιμοποιείται στην ενότητα 1.2. Ο κάθετος διαχωρισμός χωρίζει την καμπύλη διάρκειας φορτίου σε m φέτες χρόνου, κάθε μία από τις οποίες διαρκεί ΔT_j. Κάθε φέτα j αντιστοιχεί σε ένα συνολικό φορτίο D_j. Αυτός ο διαχωρισμός είναι κατάλληλος για την ανάλυση του μακροπρόθεσμου μοντέλου ισορροπίας της αγοράς, διότι κάθε κάθετη φέτα αντιστοιχεί σε ένα χρονικό διάστημα κτά το οποίο η τιμή του ηλεκτρισμού στην αγορά είναι σταθερή.

Σχήμα 34: Αριστερά: ένας οριζόντιος διαχωρισμός της καμπύλης διάρκειας φορτίου σε φέτες φορτίου. Δεξιά: ένας κάθετος διαχωρισμός της καμπύλης διάρκειας φορτίου σε φέτες χρόνου.



Το πρόβλημα προγραμματισμού επέκτασης δυναμικότητας χρησιμοποιώντας τον κάθετο διαχωρισμό μοντελοποιείται ως εξής. Συμβολίζουμε με x_i την επένδυση στην τεχνολογία i (σε MW), με p_{ij} την ποσότητα ισχύος που κατανέμεται από την τεχνολογία i στο κομμάτι ζήτησης j (σε MWh), και ως d_j το μέρος του φορτίου του κομματιού j που εν τέλει εξυπηρετείται, δηλαδή τη ζήτηση του κομματιού αυτού. Ο κάθετος διαχωρισμός της καμπύλης διάρκειας φορτίου οδηγεί στο ακόλουθο αιτιοκρατικό μοντέλο επέκτασης δυναμικότητας δύο σταδίων:

$$\max \sum_{j=1}^{m} \Delta T_j (V_j d_j - \sum_{i=1}^{n} MC_i p_{ij}) - \sum_{i=1}^{n} I_i x_i$$

$$(\rho_j \cdot \Delta T_j): \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = d_j, j = 1, \dots, m$$

$$(\mu_{ij} \cdot \Delta T_j): p_{ij} \leq x_i, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

$$(\nu_j \cdot \Delta T_j): d_j \leq D_j, j = 1, \dots, m$$

$$p, d, x \geq 0$$

όπου το ΔT_j είναι το μέρος του χρόνου που αντιστοιχεί στην κάθετη φέτα φορτίου j, D_j είναι το φορτίο του κομματιού j (σε MW), I_i είναι το ωριαίο κόστος επένδυσης της τεχνολογίας i (σε €/MWh), και C_i είναι το οριακό κόστος της τεχνολογίας i (σε €/MWh). Η αξία χαμένου φορτίου (value of lost load, VOLL) V_j, που ορίζεται στο κεφάλαιο 3, αντιστοιχεί στη μέση αποτίμηση των καταναλωτών για ηλεκτρική ισχύ. Υπενθυμίζεται ότι το VOLL είναι μια εκτίμηση της *μέσης* αξίας που προσδίδει ο ηλεκτρισμός στον πληθυσμό των καταναλωτών εφόσον, όταν διακόπτεται η εξυπηρέτηση καταναλωτών, γίνεται με τρόπο τυχαίο αφού ο διαχειριστής συστήματος δεν μπορεί να διακρίνει τους καταναλωτές με υψηλή αποτίμηση από τους καταναλωτές με χαμηλή αποτίμηση σε ένα σύστημα όπου οι καταναλωτές δεν ανταποκρίνονται στην τιμή του ηλεκτρισμού. Η απόκριση ζήτησης μπορεί να ενταχθεί στο μοντέλο αν αντικαταστήσουμε το VOLL με μια συνάρτηση οριακού οφέλους.

Η ισορροπία που αναζητάται σε ένα πρόβλημα επέκτασης δυναικότητας είναι να διαλέξει κανείς τεχνολογίες που είναι φθηνότερες στην καταστκευή τους και πιο ακριβές στη λειτουργία τους, έναντι τεχνολογιών που είναι πιο ακριβές στην κατασκευή αλλά πιο φθηνές στη λειτουργία. Το δίλημμα αυτό γίνεται καλύτερα κατανοητό αν θεωρήσουμε τον οριζόντιο διαχωρισμό της καμπύλης διάρκειας φορτίου. Οι οριζόντιες φέτες φορτίου που αντιστοιχούν σε φορτίο βάσης έχουν μεγαλύτερη διάρκεια T_j και εξυπηρετούνται καλύτερα από τεχνολογίες με χαμηλότερο κόστος καυσίμου MC_i. Οι οριζόντιες φέτες φορτίου που αντιστοιχούν σε φορτίο αιχμής έχουν μικρότερη διάρκεια T_j και εξυπηρετούνται καλύτερα από τεχνολογίες με χαμηλότερο κόστος επένδυσης, μιας και το κόστος καυσίμου δεν επηρεάζει σημαντικά το συνολικό κόστος εξυπηρέτησης αυτών των κομματιών του φορτίου. Ακολουθώντας αυτήν τη λογική, μπορούμε να αναπτύξουμε μια γραφική επίλυση του προβλήματος επέκτασης δυναμικότητας χρησιμοποιώντας *καμπύλες διαλογής*. Οι καμπύλες διαλογής περιγράφονται λεπτομερώς στην ενότητα 1.2.

Σημειώνεται ότι οι δυϊκοί πολλαπλασιαστές των αντίστοιχων περιορισμών σταθμίζονται κατά ΔT_j για κάθε $j = 1, \dots m$. Ο λόγος είναι πως αυτό μας επιτρέπει να αποφύγουμε τη διάδοση της σταθεράς ΔT_j σε μετέπειτα εκφράσεις, όταν αναλύουμε τις συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος. Μπορεί να δει κανείς τη στάθμιση ενός δυϊκού πολλαπλασιαστή ως μια προκαταβολική αντικατάσταση του αντίστοιχου δυϊκού πολλαπλασιαστή ενός περιορισμού, $\tilde{\nu}_j$, με το γινόμενο μιας σταθεράς ΔT_j και του νέου δυϊκού πολλαπλασιαστή ν_j, όπου $\tilde{\nu}_j = \nu_j \cdot \Delta T_j$.

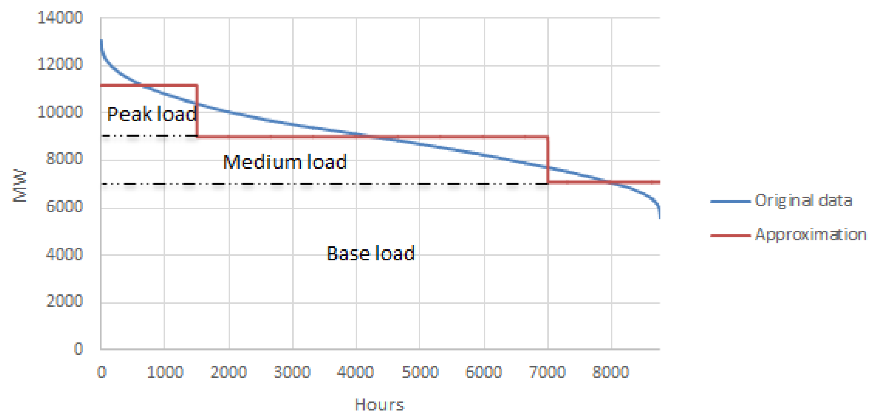
Το μοντέλο που έχει παρουσιαστεί μέχρι στιγμής αγνοεί πλήθος λεπτομερειών, και μπορεί να τροποιηθεί ώστε να τις συμπεριλάβει: οι περιορισμοί δικτύου και οι συντελεστές διαθεσιμότητας διαφορετικών τεχνολογιών μπορούν να συμπεριληφθούν στο μοντέλο. Η εισαγωγή πολλαπλών χρονικών σταδίων στο πρόβλημα προγραμματισμού επέκτασης δυναμικότητας επιτρέπει την αναπαράσταση της μακροπρόθεσμης εξέλιξης του κόστους εξοπλισμού, την αναπαράσταση της μακροπρόθεσμης εξέλιξης του φορτίου (λόγω αλλαγών στη δραστηριότητα της βιομηχανίας, ενεργειακής αποδοτικότητας, ή αλλαγών στα τιμολόγια), καθώς και την αναπαράσταση της εμφάνισης νέων τεχνολογιών ή της απόσυρσης υπάρχοντος εξοπλισμού. Για παρόμοιους λόγους (αβεβαιότητα στην εξέλιξη του κόστους εξοπλισμού, αβεβαιότητα ως προς τη μορφή της καμπύλης διάρκειας φορτίου, κ.ο.κ.), είναι ενδεχομένως επιθυμητό να εισαχθεί αβεβαιότητα στο μοντέλο. Αυτό οδηγεί στη διατύπωση ενός προβλήματος στοχαστικού προγραμματισμού πολλαπλών χρονικών σταδίων.

Πίνακας 9: Το σύνολο των επιλογών για την εξυπηρέτηση της ζήτησης στο παράδειγμα 10.2.

Τεχνολογία	Κόστος καυσίμου (€/MWh)	Κόστος επένδυσης (€/MWh)

Άνθρακας	25	16
Πετρέλαιο	80	5
Πυρηνικά	6.5	32
Φυσικό αέριο	160	2

Σχήμα 35: Η καμπύλη διάρκειας φορτίου του παραδείγματος 10.2. Η βαθμωτή προσέγγιση υποδεικνύει πως το φορτίο του συστήματος κυμαίνεται στα 0-7086 MW για ολόκληρο το έτος, μεταξύ 7086-9004 MW για 7000 ώρες ετησίως και μεταξύ 9004-11169 MW για 1500 hours ετησίως..



Παράδειγμα 10.2: Επανερχόμαστε στο σύστημα της ενότητας 1.2. Ο Πίνακας 9 παρουσιάζει τις τεχνολογίες οι οποίες είναι διαθέσιμες για την εξυπηρέτηση της ζήτησης. Παρατηρούμε ότι τόσο το κόστος επένδυσης όσο και το κόστος καυσίμου εκφράζονται σε €/MWh. Η καμπύλη διάρκειας φορτίουτου συστήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 35, μαζί με μια βαθμωτή προσέγγιση η οποία χρησιμοποιείται ως είσοδος στο πρόβλημα επέκτασης δυναμικότητας. Ο Πίνακας 10 παρουσιάζει τη βέλτιστη λύση του προβλήματος. Η πυρηνική τεχνολογία χρησιμοποιείται για να καλυφθεί το φορτίο βάσης, ο άνθρακας χρησιμοποιείται για να ικανοποιηθεί το μέσο φορτίο, και το φυσικό αέριο χρησιμοποιείται για να καλυφθεί το φορτίο αιχμής. Το πετρέλαιο δε χρησιμοποιείται.

Πίνακας 10: Βέλτιστη ανάθεση τεχνολογιών στο παράδειγμα 10.2.

	Διάρκεια (ώρες)	Επίπεδο (MW)	Τεχνολογία
Φορτίο βάσης	8760	0-7086	Πυρηνικά
Μέσο φορτίο	7000	7086-9004	Άνθρακας
Φορτίο αιχμής	1500	9004-11169	Φυσικό αέριο

■

Οι συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος προγραμματισμού επέκτασης δυναμικότητας μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

$$d_j - \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 0, j = 1, \dots, m$$

$$0 \leq \Delta T_j \cdot \mu_{ij} \perp x_i - p_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

$$0 \leq \Delta T_j \cdot \nu_j \perp D_j - d_j \geq 0, j = 1, \dots, m$$

$$0 \leq p_{ij} \perp \Delta T_j \cdot MC_i + \Delta T_j \cdot \mu_{ij} - \Delta T_j \cdot \rho_j \geq 0, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$$

$$0 \leq d_j \perp -\Delta T_j \cdot V_j + \Delta T_j \cdot \nu_j + \Delta T_j \cdot \rho_j \geq 0, j = 1, \ldots, m$$

$$0 \leq x_i \perp I_i - \sum_{j=1}^{m} \Delta T_j \cdot \mu_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, n$$

Πρόταση 10.1: Η βέλτιστη κατανάλωση μπορεί να χαρακτηριστεί ως εξής:

- Αν $0 < d_j < D_j$, τότε $V_j = \rho_j$.
- Αν $d_j = 0$, τότε $V_j \leq \rho_j$.
- Αν $d_j = D_j$, τότε $V_j \geq \rho_j$.

Για γεννήτριες για τις οποίες $x_i > 0$, η βέλτιστη παραγωγή χαρακτηρίζεται ως εξής:

- Αν $0 < p_{ij} < x_i$, τότε $MC_i = \rho_j$.
- Αν $p_{ij} = 0$, τότε $MC_i \geq \rho_j$.
- Αν $p_{ij} = x_i$, τότε $MC_i \leq \rho_j$.

Η βέλτιστη επένδυση μπορεί να χαρακτηριστεί ως εξής:

- Αν $x_i = 0$, τότε $I_i \geq \sum_{j=1}^{m} \Delta T_j \cdot \mu_{ij}$.
- Αν $x_i > 0$, τότε $I_i = \sum_{j=1}^{m} \Delta T_j \cdot \mu_{ij}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι συνέπεια των συνθηκών KKT.

■

Η πρόταση συνεπάγεται πως φορτία με αποτίμηση πάνω από το κατώφλι ρ_j καταναλώνουν ενέργεια, ενώ φορτία με αποτίμηση κάτω από το κατώφλι δεν καταναλώνουν ενέργεια. Παρομοίως, γεννήτριες με κόστος καυσίμου κάτω από το κατώφλι ρ_j παράγουν ενέργεια στο τεχνικό τους μέγιστο, ενώ γεννήτριες με οριακό κόστος κάτω από αυτό το κατώφλι δεν παράγουν ενέργεια. Τα κατώφλια $\sum_{j=1}^{m} \Delta T_j \cdot \mu_{ij}$ καθορίζουν αν μια τεχνολογία αξίζει να κατασκευαστεί ή όχι.

Πρόταση 10.2: Έστω ότι $I_i > 0$ για όλες τις τεχνολογίες, τότε αν μια τεχνολογία κατασκευαστεί ($x_i > 0$) αυτό συνεπάγεται ότι λειτουργεί στην πλήρη της δυναμικότητα ($p_{ij} = x_i$ για κάποιο j).

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει τεχνολογία για την οποία $p_{ij} < x_i$ για όλα τα $j = 1, \ldots, m$. Τότε από τις συνθήκες KKT μπορεί κανείς να δείξει πως $\mu_{ij} = 0$ για όλα τα j και $I_i = \sum_{j=1}^{m} \Delta T_j \cdot \mu_{ij}$, το οποίο είναι αντίφαση.

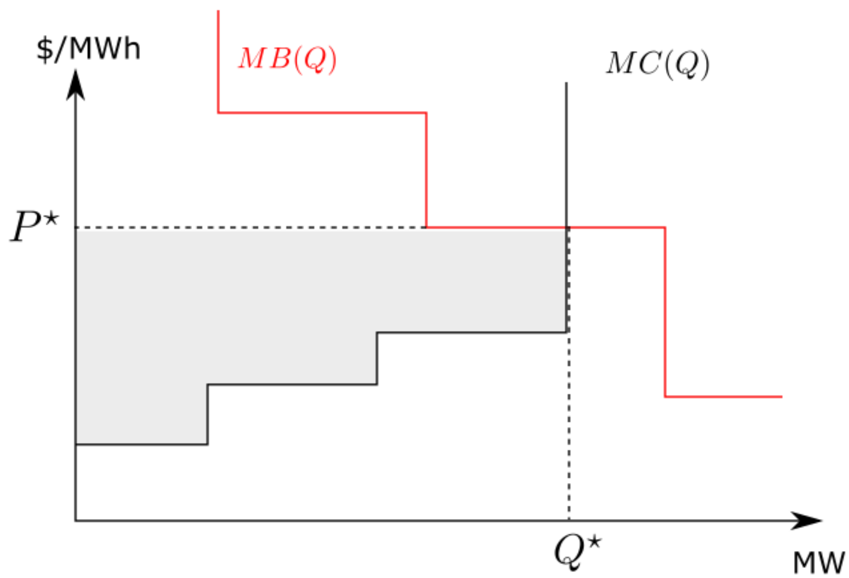
■

10.2 Επενδύσεις σε μονάδες παραγωγής

Σε ένα περιβάλλον αγοράς, οι τεχνολογίες κατασκευάζονται βάσει της πρόβλεψης των επενδυτών σχετικά με τα μελλοντικά έσοδα που μπορούν να προκύψουν από την αγορά. Στην παρούσα ενότητα δείχνουμε πως, σε μια ιδανική αγορά με ελαστική ζήτηση, οι επενδύσεις που προκύπτουν είναι πανομοιότυπες με αυτές που θα προέκυπταν από έναν κεντρικό προγραμματισμό.

Οι **αγορές που εμπορεύονται μόνο ενέργεια** (energy-only markets, EOM) στηρίζονται σε αιχμές στην τιμή ενέργειας για να χρηματοδοτήσουν το κοστος κεφαλαίου που απαιτείται για επενδύσεις σε νέες τεχνολογίες. Η χρηματοδότητση αυτή επιτυγχάνεται από το **ενοίκιο σπανιότητας** (scarcity rent), που ορίζεται ως το εισόδημα της αγοράς ενέργειας πλην το μεταβλητό κόστος (το κόστος εκκίνησης και το κόστος ελαχίστου φορτίου παραλείπονται). Το ενοίκιο σπανιότητας μπορεί να προκύψει από παραγωγούς που εσωτερικεύουν το κόστος επένδυσής τους στις προσφορές τους, ή από την περικοπή ζήτησης. Το ενοίκιο σπανιότητας στην περίπτωση περικοπής ζήτησης παρουσιάζεται στο Σχήμα 36.

Σχήμα 36: Μια αναπαράσταση του ενοικίου σπανιότητας. Το $MC(\cdot)$ αντιπροσωπεύει την καμπύλη οριακού κόστους, και το $MB(\cdot)$ την καμπύλη οριακού οφέλους. Τα P^* και Q^* αντιστοιχούν στην τιμή και ποσότητα εκκαθάρισης αντίστοιχα. Η γκρι επιφάνεια είναι το ενοίκιο σπανιότητας που κερδίζουν οι παραγωγοί.



Λίγη σκέψη αποκαλύπτει πως τα ενοίκια σπανιότητας είναι αναπόφευκτα σε μια αγορά. Αν οι τιμές ενέργειας δεν ξεπερνούν ποτέ το οριακό κόστος της τεχνολογίας αιχμής, τότε η ταχνολογία αιχμής δεν μπορεί να επιβιώσει και να καλύψει το κόστος επένδυσής της, και συνεπώς θα εκλείψει από την αγορά

Ένα μοντέλο μακροπρόθεσμης ισορροπίας της αγοράς που εμπορεύεται αποκλειτστικά ενέργεια αποτελείται από παραγωγούς οι οποίοι αποφασίζουν τη δυναμικότητα νέων τεχνολογιών καθώς και την ποσότητα παραγωγής της κάθε τεχνολογίας, και καταναλωτές οι οποίοι αγοράζουν ενέργεια από τους παραγωγούς. Οι παραγωγοί αποφασίζουν ταυτόχρονα τη χωρητικότητα των μονάδων και την παραγωγή των μονάδων, με στόχο να μεγιστοποιήσουν το κέρδος τους. Έστω ρ_j η τιμή ενέργειας που επικρατεί στις περιόδους της κάθετης φέτας j της καμπύλης διάρκειας φορτίου. Το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους του παραγωγού περιγράφεται ως εξής:

$$\max \sum_{j=1}^{m} \Delta T_j \cdot (\rho_j - MC_i) \cdot p_{ij} - I_i \cdot x_i$$

$$(\mu_{ij} \cdot \Delta T_j): p_{ij} \le x_i, j = 1, \dots, m$$

$$p, x \ge 0$$

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης οφέλους των καταναλωτών μπορεί να εκφραστεί ως εξής για κάθε κάθετη φέτα φορτίου j:

$$\max \Delta T_j \cdot (V_j - \rho_j) \cdot d_j$$

$$(\nu_j \cdot \Delta T_j): d_j \le D_j$$

$$d \ge 0$$

Η διαδικασία προσαρμογής τιμής της αγοράς ενέργειας για κάθε κάθετη φέτα φορτίου j εκφράζεται από την ακόλουθη συνθήκη:

$$d_j - \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 0$$

Ορισμός 10.3: Η ισορροπία μιας αγοράς που εμπορεύεται μόνο ενέργεια είναι ένας συνδυασμός επένδυσης και κατανομής παραγωγής και κατανάλωσης καθώς και τιμών, (x^*, p^*, d^*, ρ^*), τέτοιος ώστε: (i) δεδομένων των τιμών, οι πράκτορες μεγιστοποιούν το ιδιωτικό τους κέρδους, και (ii) η αγορά ενέργιεας εκκαθαρίζεται σε όλες τις χρονικές περιόδους.

Συγκρίνοντας τις συνθήκες ΚΚΤ, μπορεί κανείς να δείξει (άσκηση 10.1) πως η ισορροπία της αγοράς που εμπορεύεται αποκλειστικά ενέργεια οδηγεί σε μια βέλτιστη επένδυση και μια βέλτιστη κατανομή παραγωγής και ζήτησης. Η ισοδυναμία του κεντρικού σχεδιασμού με τις αγορές που εμπορεύονται αποκλειστικά ενέργεια μπορεί να γενικευτεί και σε συνθήκες αβεβαιότητας ζήτησης, καθώς και στην περίπτωση περιορισμών στο δίκτυο μεταφοράς, ακολουθώντας την ίδια λογική. Από τις συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος μεγιστοποίησης κέρδους των παραγωγών μπορεί να σημειωθεί πως αν $p_{ij} > 0$ τότε

$$\mu_{ij} = \rho_j - C_i.$$

Αυτό αντιστοιχεί ακριβώς στο ενοίκιο σπανιότητας που ορίστηκε προηγουμένως. Το ακόλουθο κριτήριο επένδυσης μπορεί να εξαχθεί από τις συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος μεγιστοποίησης κέρδους των παραγωγών:

$$0 \le x_i \perp I_i - \sum_{j=1}^{m} \mu_{ij} \cdot \Delta T_j \ge 0$$

Η συνθήκη αυτή ερμηνεύεται ως εξής: αν το κόστος επένδυσης της τεχνολογίας i δεν μπορεί να ανακτηθεί από ενοίκια σπανιότητας, τότε ο παραγωγός δεν πρέπει να επενδύσει στην τεχνολογία i. Και αν ένας παραγωγός επενδύσει σε μια ορισμένη τεχνολογία, τότε ο ανταγωνισμός θα οδηγήσει την τιμή ενέργειας στο επίπεδο όπου το κόστος επένδυσης καλύπτεται ακριβώς από τα ενοίκια σπανιότητας.

Το πλεονέκτημα της αγοράς που εμπορεύεται αποκλειστικά ενέργεια είναι πως οδηγεί σε βέλτιστη επένδυση και λειτουργία του συστήματος σε συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού. Ωστόστο, η αγορά ενέργειας υποφέρει στην πράξη από χαμηλή ελαστικότητα ζήτησης και από το γεγονός ότι η ζήτηση δεν μπορεί να διακοπεί σε πραγματικό χρόνο. Η ανελαστική ζήτηση οδηγεί σε σημαντική μεταβλτότητα των τιμών, το οποίο οδηγεί σε επενδυτικό ρίσκο. Το μειονέκτημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί από εναλλακτικούς σχεδιασμούς που βασίζονται σε καμπύλες ζήτησης εφεδρειών. Το γεγονός ότι δεν μπορεί να διακοπεί η ζήτηση συνεπάγεται πως υπάρχουν περίδοοι στις οποίες το σύστημα δε θα έχει επαρκή χωρητικότητα για να καλύψει το πλήρες φορτίο. Τις στιγμές αυτές ο διαχειριστής του συστήματος πρέπει να αποφασίσει ποια είναι η τιμή εκκαθάρισης της αγοράς. Η απόφαση αυτή, που είναι μια ρυθμιστική παράμετρος, έχει μεγάλη επήρρεια στα κίνητρα επένδυσης.

Προβλήματα

10.1 Δείξτε ότι η ισορροπία μιας αγοράς ενέργειας οδηγεί σε βέλτιστες επενδύσεις και βέλτιστη κατανομή παραγωγής.

Βιβλιογραφία

Κεφάλαιο 10.1.

Το υλικό σε αυτήν την ενότητα βασίζεται στον (Stoft, 2002), παράγραφος 1-3.3, και στους (Birge & Louveaux, 2011), παράγραφος 1.3.

Κεφάλαιο 10.2.

Το υλικό σε αυτήν την ενότητα βασίζεται στον (Stoft, 2002), παράγραφος 2-2. Η ισοδυναμία μεταξύ κεντρικού προγραμματισμού και αγορών ενέργειας υπό συνθήκες αβεβαιότητα και παρουσία περιορισμών μεταφοράς αποδεικνύεται στην (Ozdemir, 2013).

Παράρτημα Α: Εισαγωγή στο γραμμικό προγραμματισμό

Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί μια συμοπτική εισαγωγή στις βασικές αρχές του γραμμικού προγραμματισμού που είναι απαραίτητες για να καλυφθεί η ύλη των σημειώσεων.

Α1 Μοντέλα μαθηματικού προγραμματισμού

Τα μοντέλα μαθηματικού προγραμματισμού είναι εργαλεία για τη λήψη βέλτιστων αποφάσεων σε σύνθετα συστήματα. Το αρχέτυπο μαθηματικό πρόγραμμα στοχεύει στον καθορισμό μιας *απόφασης* η οποία βελτιστοποιεί έναν ορισμένο *στόχο*, υποκείμενη σε ένα σύνολο *περιορισμών*.

Οι **μεταβλητές απόφασης** συμβολίζονται κατά κανόνα ως x, και αποτελούν μέλος ενός **εφικτού συνόλου** X το οποίο είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς, το $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ σημαίνει πως βελτιστοποιούνται n αποφάσεις. Ο στόχος τον οποίο επιθυμούμε να βελτιστοποιήσουμε μπορεί να εκφραστεί σε μορφή συνάρτησης, με $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια **αντικειμενική συνάρτηση** η οποία βαθμολογεί την επίδοση της απόφασης x. Τα μαθηματικά προγράμματα στοχεύουν είτε στην ελαχιστοποίηση είτε στη μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης f. Στην περίπτωση όπου ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση, το αρχέτυπο μαθηματικό πρόγραμμα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$min_x f(x)$$

$$\mathrm{s.t.}\, x \in X$$

Το x κάτω από τον τελεστή "min" υποδεικνύει τις μεταβλητές απόφασης του προβλήματος. Το "s.t." που προηγείται των περιορισμών $x \in X$ αντιστοιχεί στην έκφραση "subject to" (που μεταφράζεται στα ελληνικά σε "υπόκειται σε"), και υποδεικνύει πως οι περιορισμοί του προβλήματος έπονται. Ενίοτε το "s.t." γράφεται ως "subject to", ή παραλείπεται.

Τα προβλήματα ελαχιστοποίησης μπορούν να εκφραστούν ισοδύναμα ως προβλήματα μεγιστοποίησης, μιας και το ελάχιστο του $f(x)$ αντιστοιχεί στο μέγιστο του $-f(x)$. Συνεπώς το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως:

$$max_x g(x)$$

$$\mathrm{s.t.}\, x \in X$$

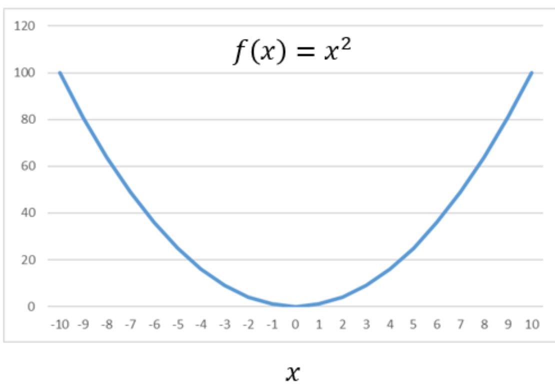
όπου $g(x) = -f(x)$.

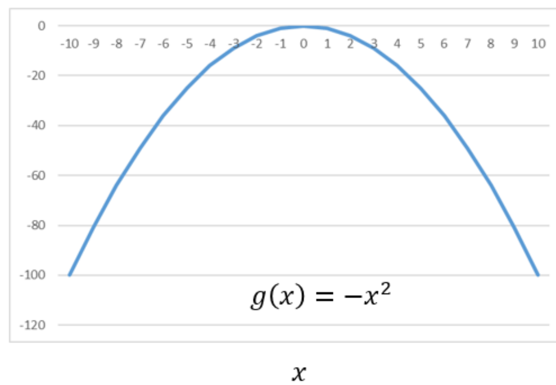
Μια λύση είναι **εφικτή** αν $x \in X$, που σημαίνει πως ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του προβλήματος. Μια λύση x^* είναι **βέλτιστη** αν είναι η καλύερη ανάμεσα σε όλες τις εφικτές λύσεις, που σημαίνει ότι $f(x^*) \leq f(x)$ για όλα τα $x \in X$ στην περίπτωση ελαχιστοποίησης (ή $f(x^*) \geq f(x)$ για όλα τα $x \in X$ στην περίπτωση μεγιστοποίησης). Ένα μαθηματικό πρόγραμμα είναι **ανέφικτο** αν το εφικτό σύνολο X είναι κενό, $X = \emptyset$. Αυτό σημαίνει πως το σύνολο περιορισμών του προβλήματος δεν είναι συμβατό. Ένα μαθηματικό πρόγραμμα είναι **απεριόριστο** αν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να γίνει αυθαίρετα χαμηλή στο χώρο των εφικτών λύσεων (στην περίπτωση ελχαιστοποίησης), ή αυθαίρετα υψηλή (στην περίπτωση μεγιστοποίησης). Ανέφικτα και απεριόριστα μαθηματικά προγράμματα είναι ενδείξεις πως το υποκείμενο πρόβλημα δεν είναι καλώς ορισμένο. Παρατηρούμε πως δεν υπάρχει βέλτιστη λύση για ανέφικτα και απεριόριστα μαθηματικά προγράμματα, υπό την έννοια ότι δεν μπορούμε να εντοπίσουμε ένα διάνυσμα x^* για το οποίο ισχύει ότι $f(x^*) \leq f(x)$ για όλα τα $x \in X$.

Η παραπάνω διατύπωση ενός μαθηματικού προγράμματος είναι αρκετά γενική, και καλύπτει ειδικές περιπτώσεις όπου οι αποφάσεις είναι είτε διακριτές είτε συνεχείς, όπως παρατηρούμε στα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα Α.1: Έστω ότι ελαχιστοποιούμε τη συνάρτηση x^2 στους πραγματικούς αριθμούς. Στην περίπτωση αυτή, η αντικειμενική συνάρτηση είναι $f(x) = x^2$, και οι περιορισμοί του μοντέλου είναι $X = \mathbb{R}$, το οποίο σημαίνει πως το x μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή στο $\mathbb{R}$. Το πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού εκφράζεται ως $min_x x^2$, ή ισοδύναμα ως $max_x - x^2$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 37.

Σχήμα 37: Η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι ισοδύναμη με τη μεγιστοποίηση της $g(x) = -f(x)$. Για παράδειγμα, το ελάχισο της $f(x) = x^2$ στο παράδειγμα Α.1 είναι ισοδύναμο με το μέγιστο της $g(x) = -f(x)$, και είναι ίσο με $x^* = 0$.





Παράδειγμα Α.2: Έστω το πρόβλημα απόφασης αγοράς αεροπορικών εισιτηρίων για ένα επερχόμενο ταξίδι από την Αθήνα στις Βρυξέλλες. Ένα ταξίδι μετ'επιστροφής που δε συμπεριλαβάνει το Σαββατοκύριακο κοστίζει 600 €. Ένα ταξίδι μετ'επιστροφής που συμπεριλαμβάνει το Σαββατοκύριακο κοστίζει 400 €. Τα εισιτήρια μίας κατεύθυνσης κοστίζουν 350 € για κάθε κατεύθυνση. Υπάρχουν συνεπώς τρεις επιλογές, οι οποίες μπορούν να απαριθμηθούν ως $X = \{1,2,3\}$, με $f(1) = 600$, $f(2) = 400$, και $f(3) = 700$. Αν ο στόχος μας είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους του ταξιδιού, τότε διαλέγουμε να ταξιδέψουμε με το εισιτήριο μετ'επιστροφής το οποίο συμπεριλαμβάνει το Σαββατοκύριακο, δηλαδή $x^* = 2$ και $f(x^*) = 400$.

■

Παρατηρούμε πως το γενικό πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού το οποίο παρουσιάζεται στην παρούσα ενότητα καλύπτει μια γενική κλάση προβλημάτων. Δεν υπάρχει μια μοναδική προσέγγιση που να είναι κατάλληλη για την επίλυση γενικών μαθηματικών προγραμμάτων, απεναντίας είναι απαραίτητο να εκμεταλλεύεται κανείς τη δομή του συγκεκριμένου εκάστοτε προβλήματος. Στην περίπτωση του παραδείγματος Α.1, το βέλτιστο μπορεί να εντοπιστεί μέσω του διαφορικού λογισμού, συγκεκριμένα με το να βρει κανείς το σημείο στο οποίο η παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης ισούται με μηδέν. Για λόγους που αναπτύσσονται λεπτομερώς στην ενότητα 2.2, αυτή η συνθήκη είναι αναγκαία και ικανή για να είναι ένα σημείο βέλτιστο. Απναντίας, το παράδειγμα Α.2 μπορεί να επιλυθεί με απαρίθμηση των εφικτών λύσεων.

Καμία από αυτές τις στρατηγικές (απαρίθμηση, ή το να θέσει κανείς την παράγωγο της αντικειμενικής αυνάρτησης ίση με το μηδέν) δεν είναι πλήρως γενική ή κατάλληλη για προβλήματα μεγάλης κλίμακας. Στρατηγικές οι οποίες είναι κατάλληλες για προβλήματα μεγάλης κλίμακας εκμεταλλεύονται τη συγκεκριμένη δομή των προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού. Εκ πρώτης ίσως κάποιος να έχει την εντύπωση πως ένας παράγοντας που καθορίζει αν ένα μαθηματικό πρόγραμμα είναι δύσκολο ή όχι είναι η διάκριση του αν η αντικειμενική συνάρτηση f και οι περιορισμοί X είναι *γραμμικοί* ή όχι. Αποδεικνύεται πως η γραμμικότητα δεν είναι η ειδοποιός διαφορά, αλλά αντιθέτως η *κυρτότητα*. Σε αδρές γραμμές, τα μαθηματικά προγράμματα είναι πολύ ευκολότερα υπολογιστικά αν η συνάρτηση f είναι κυρτή συνάρτηση, και αν το σύνολο X είναι κυρτό (οι κυρτές συναρτήσεις και τα κυρτά σύνολα ορίζονται στο κεφάλαιο 2).

Α2 Προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού

Ένα **μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού** είναι ένα μοντέλο μαθηματικού προγραμματισμού όπου η αντικειμενική συνάρτηση f μπορεί να εκφραστεί ως γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης, και όπου οι περιορισμοί X μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικές ισότητες ή ανισότητες των μεταβλητών απόφασης.

Παράδειγμα Α.3: Έστω το πρόβλημα οικονομικής κατανομής όπου δύο παραγωγοί ανταγωνίζονται για να παράγουν ηλεκτρισμό ώστε να καλύψουν 100 MWh ζήτησης. Ο παραγωγός 1 είναι διατεθιμένος να παράγει έως 60 MWh ενέργειας στα 20 €/MWh, ενώ ο παραγωγός 2 είναι διατεθιμένος να παράγει έως 80 MWh ενέργειας στα 50 €/MWh. Ο στόχος μας είναι να καλύψουμε τη ζήτηση με ελάχιστο κόστος. Οι μεταβλητές απόφασης του προβλήματος συμμβολίζονται ως p_1 και p_2, και αντιστοιχούν στην ποσότητα ενέργειας που παράγει ο παραγωγός 1 και ο παραγωγός 2 αντίστοιχα. Το πρόβλημα οικονομικής κατανομής μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$min_{p_1,p_2} 20 \cdot p_1 + 50 \cdot p_2$$

$$p_1 + p_2 \geq 100$$

$$p_1 \leq 60$$

$$p_2 \leq 80$$

$$p_1, p_2 \geq 0$$

Ο πρώτος περιορισμός εκφράζει το γεγονός πως η παραγωγή ηλεκτρισμού πρέπει τουλάχιστον να καλύπτει τη ζήτηση. Ο δεύτερος και ο τρίτος περιορισμός αντιστοιχούν στα τεχνικά όρια του πρώτου και του δεύτερου παραγωγού αντίστοιχα. Ο τελευταίος περιορισμός εκφράζει το γεγονός πως η παραγωγή δεν μπορεί να είναι αρνητική. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι $f(p) = 20 \cdot p_1 + 50 \cdot p_2$, που είναι γραμμική συνάρτηση του p. Το σύνολο των περιορισμών εκφράζεται ως ένα σύνολο πέντε γραμμικών ανισοτήτων των μεταβλητών απόφασης.

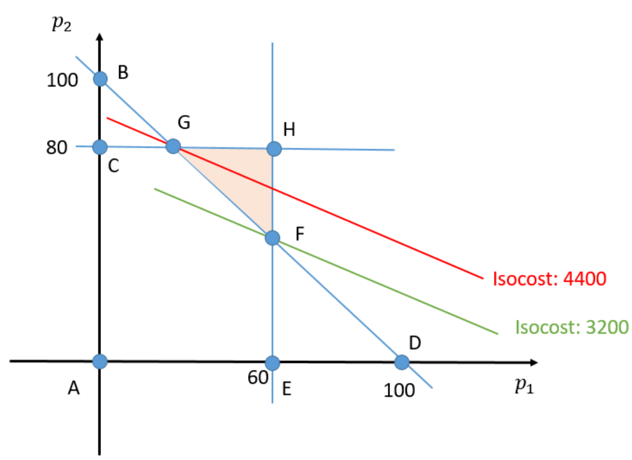
■

Παρατηρούμε πως οι ανισότητες ενός γραμμικού προγράμματος μπορούν να είναι σε οποιαδήποτε από τις δύο κατευθύνσεις, δηλαδή μικρότερο ή ίσο (≤) ή μεγαλύτερο ή ίσο (≥), και πως οι δύο κατευθύνσεις μπορούν να εναλλαγούν πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές της ανισότητας με έναν αρνητικό αριθμό. Επιπλέον, οι μεταβλητές απόφασης μπορούν να ορίζονται ως μη αρνητικές (όπως στο παραπάνω παράδειγμα), μη θετικές, ή ελεύθερες. Στην ανάλυση των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας, παραδείγματα μη αρνητικών μεταβλητών είναι η παραγωγή και η ζήτηση, ή το επίπεδο ενέργειας αποθηκευμένο ως νερό σε μια υδροηλεκτρική μονάδα. Παραδείγματα ελεύθερων μεταβλητών είναι η ροή ισχύος στη γραμμή ενός δικτύου ηλεκτρισμού ή η ποσότητα ισχύος που παράγεται από μια αντλησιοταμιευτική μονάδα (που είναι θετική όταν η μονάδα παράγει ηλεκτρισμό, και αρνητική όταν η μονάδα αντλεί νερό).

Α3 Γραφική επίλυση μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού

Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που παρουσιάζεται στο παράδειγμα Α.3 μπορεί να επιλυθεί γραφικά, αναπαριστώντας το εφικτό σύνολο και την αντικειμενική συνάρτηση στη διδιάστατη επιφάνεια των μεταβλητών απόφασης p_1 και p_2. Αυτό το εφικτό σύνολο απεικονίζεται από τη ροζ επιφάνεια στο Σχήμα 38.

Σχήμα 38: Το διδιάστατο εφικτό σύνολο του παραδείγματος Α.3 και διαφορετικές καμπύλες ίσου κόστους.



Η ροζ επιφάνεια καθορίζεται ως η τομή των περιορισμών ανισότητας του προβλήματος. Συγκεκριμένα, οι περιορισμοί $p_1 \geq 0$ και $p_2 \geq 0$ συνεπάγονται πως το εφικτό σύνολο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του χώρου. Η ανισότητα $p_1 + p_2 \geq 100$ αντιστοιχεί στο ημιεπίπεδο πάνω και δεξιά από τη γραμμή η οποία διέρχεται από τα σημεία $(p_1, p_2) = (100, 0)$ και $(p_1, p_2) = (0,100)$. Παρομοίως, η ανισότητα $p_1 \leq 60$ αντιστοιχεί στο ημιεπίπεδο αριστερά από τη γραμμή $p_1 = 60$ και η ανισότητα $p_1 \leq 80$ αντιστοιχεί στο ημιεπίπεδο κάτω από τη γραμμή $p_2 = 80$.

Έχοντας προσδιορίσει το εφικτό σύνολο του προβλήματος, προχωράμε τώρα στην ανεύρεση της βέλτιστης λύσης. Η συμπεριφορά της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να γίνει κατανοητή απεικονίζοντας διαφορετικές καμπύλες ίσου κόστους της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 20 \cdot p_1 + 50 \cdot p_2$. Για παράδειγμα, το κόστος 4400 € αντιστοιχεί στη γραμμή $20 \cdot p_1 + 50 \cdot p_2 = 4400$ η οποία απεικονίζεται με κόκκινο στο Σχήμα 38. Υπάρχουν άπειρα σημεία εντός του εφικτού συνολου τα οποία επιτυγχάνουν αυτό το κόστος, και αντιστοιχούν στην τομή της κόκκινης γραμμής με τη ροζ επιφάνεια, συμπεριλαμβάνοντας το σημείο G. Το κόστος των 3200 € είναι παράλληλο στην καμπύλη ίσου κόστους των 4400 €, και απεικονίζεται στο Σχήμα 38 με πράσινο χρώμα. Είναι προτιμότερο από την κόκκινη καμπύλη ίσου κόστους γιατί οδηγεί σε χαμηλότερο κόστος. Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό αυτής της καμπύλης ίσου κόστους είναι πως είναι όσο κάτω αριστερά (το οποίο είναι η επιθυμητή κατεύθυνση προς την οποία θέλουμε να κινηθούμε, δεδομένου ότι ελαχιστοποιούμε) επιτρέπει το εφικτό σύνολο. Το μόνο σημείο στο ροζ σύνολο που μπορεί να επιτύχει αυτήν την αντικειμενική τιμή είναι το σημείο F, το οποίο είναι και η βέλτιστη λύση του προβλήματος. Αυτό είναι γεωμετρικά ξεκάθαρο από το σχήμα, αφού οποιοδήποτε κόστος χαμηλότερο των 4000 € οδηγεί σε καμπύλη ίσου κόστους η οποία δεν τέμνει το ροζ σύνολο. Οι συντεταγμένες του σημείου F προσδιορίζονται ως η τομή των δύο γραμμών $p_1 = 60$ και $p_1 + p_2 = 100$, ήτοι $(p_1^*, p_2^*) = (60,40)$.

Αυτή η διδιάστατη ανάλυση είναι αρκετά περιορισμένη, γιατί δεν μπορούμε να μεταφέρουμε αυτή τη γεωμετρική διαίσθηση πέρα από τρεις διαστάσεις, εφόσον δεν μπορούμε να αντιληφθούμε γεωμετρικά τους πολυδιάστατους χώρους. Ωστόσο, αποσαφηνίζει μια σημαντική γεωμετρική διαίσθηση: τα “γωνιακά σημεία” του εφικτού συνόλου έχουν έναν ειδικό ρόλο στα γραμμικά προγράμματα, γιατί είναι υποψήφια για βέλτιστες λύσεις. Ορίζουμε τα “γωνιακά σημεία” με ακρίβεια στην ενότητα Α5, και εξηγούμε πώς αυτή η γεωμετρική διαίσθηση σχηματίζει τη βάση του περίφημου αλγορίθμου simplex.

Α4 Γραμμικά προβλήματα σε κανονική μορφή

Ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού σε **κανονική μορφή** με n μεταβλητές απόφασης και m περιορισμούς ισότητας μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$min_x \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} A_{ij} x_i = b_j, j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$$

Οι παράμετροι c_i μπορούν να οργανωθούν σε ένα διάνυσμα c του οποίου το ανάστροφο $c^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ αποτελεί τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του γραμμικού προγράμματος. Οι παράμετροι A_{ij} που είναι οι συντελεστές των περιορισμών του προβλήματος μπορούν να οργανωθούν σε έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με m σειρές (μία σειρά για κάθε περιορισμό) και n στήλες (μία στήλη για κάθε μεταβλητή απόφασης). Οι παράμετροι c_j μπορούν να οργανωθούν σε ένα διάνυσμα-στήλη $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Χρησιμοποιώντας αυτήν τη συμπυκνωμένη σημειολογία, το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως:

$$min_x c^T x$$

$$\text{s.t.}\, Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Οποιοδήποτε γραμμικό πρόγραμμα μπορεί να εκφραστεί σε κανονική μορφή χρησιμοποιώντας τους ακόλουθους μετασχηματισμούς:

- εναλλαγή μεγιστοποίησης με ελαχιστοποίηση
- εισαγωγή μη αρνητικών μεταβλητών χαλάρωσης

Η εναλλαγή της μεγιστοποίησης με την ελαχιστοποίηση συνίσταται στην εναλλαγή του $\max_x c^T x$ με $\min_x - c^T x$.

Η χρήση μη αρνητικών **μεταβλητών χαλάρωσης** (*slack variables*) μας επιτρέπει να μετατρέψουμε οποιαδήποτε ανισότητα σε ισότητα προσθέτωντας ή αφαιρώντας μη αρνητικές ποσότητες με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρούμε ισοδυναμία με την αρχική ανισότητα. Για παράδειγμα, η ανισότητα $p_1 \leq 60$ του παραδείγματος A.3 μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως $p_1 + s = 60$, όπου $s \geq 0$. Αυτό είναι ισοδύναμο με την αρχική συνθήκη, γιατί αν μπορούμε να βρούμε μη αρνητική μεταβλητή $s \geq 0$ τέτοια ώστε $p_1 + s = 60$, τότε πρέπει να ισχύει ότι $p_1 = 60 - s \leq 60$.

Παράδειγμα A.4: Επιστρέφοντας στο πρόβλημα οικονομικής κατανομής του παραδείγματος A.3, μπορούμε να το εκφράσουμε σε κανονική μορφή ως:

$$min_{p_1,p_2,s_1,s_2,s_3} 20 \cdot p_1 + 50 \cdot p_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3$$

$$p_1 + p_2 - s_1 = 100$$

$$p_1 + s_2 = 60$$

$$p_2 + s_3 = 80$$

$$p_1, p_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Ενώ στον πρώτο περιορισμό *αφαιρείται* μια μεταβλητή χαλάρωσης προκειμένου να τον μετατρέψει σε ισοδύναμο περιορισμό ισότητας, η δεύτερη και η τρίτη ανισότητα μετατρέπονται σε ισότητες *προσθέτωντας* μη αρνητικές μεταβλητές χαλάρωσης στην αριστερή πλευρά των ανισοτήτων.

■

Ο μεταχηματισμός γραμμικών προγραμμάτων σε κανονική μορφή μας επιτρέπει να κατανοήσουμε καλύτερα τη σχέση μεταξύ ακραίων σημείων του εφικτού συνόλου και των υποκείμενων υπολογισμών γραμμικής άλγεβρας τις οποίες εκτελεί ο αλγόριθμος simplex για να επιλύσει το πρόβλημα. Αν και ο αλγόριθμος simplex δεν αναπτύσσεται λεπτομερώς στο παρόν κείμενο, γιατί δεν είναι απαραίτητος για την κατανόηση του περιεχομένου των σημειώσεων, ωστόσο περιγράφεται εν συντομία στην επόμενη ενότητα, προκειμένου να γίνει καλύτερα κατανόητη η γεωμετρία των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

A5 Ακραία σημεία και ο αλγόριθμος simplex

Ας θεωρήσουμε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή, και ας αγνοήσουμε προς το παρόν το γεγονός ότι οι μεταβλητές απόφασης είναι μη αρνητικές. Αν υπάρχουν περισσότεροι περιορισμού (m ισότητες, όπως εξηγείται στην ενότητα A.4) από μεταβλητές απόφασης (n μεταβλητές απόφασης, όπως εξηγείται στην ενότητα Α.4), τότε το γραμμικό σύστημα δεν έχει λύση εκτός αν υπάρχουν γραμμικώς εξαρτημένοι περιορισμοί. Συνεπώς, χωρίς απώλεια στη γενικότητα, εστιάζουμε στην περίπτωση όπου υπάρχουν περισσότερες μεταβλητές από περιορισμούς, $n \geq m$.

Στην περίπτωση αυτή, το σύνολο των εφικτών λύσεων είναι διαστάσεως έως $n - m$. Μια σχετικά απλή διαδικασία για να αποπειραθούμε να υπολογίσουμε εφικτές λύσεις στο αρχικό πρόβλημα είναι θέτοντας $n - m$ από τις μεταβλητές στο 0, και απομονώνοντας το υπολοιπο σύστημα γραμμικών εξισώσεων, το οποίο αποτελείται από m μεταβλητές σε m αγνώστους. Αυτό είναι σα να χωρίζουμε τον αρχικό πίνακα A σε δύο μέρη, $A = [B\ N]$, όπου ο πίνακας B είναι $m \times m$ και ο πίνακας N είναι $m \times (n - m)$. Εάν ο εναπομείναν υποπίνακας B, που ονομάζεται **βάση**, είναι αντιστρέψιμος, τότε το γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση. Η λύση αυτή ονομάζεται **βασική λύση**. Οι $n - m$ μεταβλητές οι οποίες εξισώνονται με το μηδέν στην αρχή αυτής της διαδικασίας αναφέρονται ως **μη βασικές μεταβλητές**. Οι εναπομείνασες m μεταβλητές που συμμετέχουν στο γραμμικό σύστημα ονομάζονται **βασικές μεταβλητές**. Αν η μοναδική λύση συστήματος $m \times m$ είναι μη αρνητική, τότε έχουμε μια **βασική εφικτή λύση** στο αρχικό πρόβλημα. Αξίζει να σημειωθεί πως μια τέτοια βασική εφικτή λύση αντιστοιχεί γεωμετρικά σε ένα **ακραίο σημείο** (*extreme point*) του αρχικού εφικτού συνόλου, δηλαδή ένα σημείο που δεν μπορεί να εκφραστεί ως κυρτός συνδυασμός δύο άλλων ξεχωριστών σημείων στο εφικτό σύνολο. Γεωμετρικά, τα ακραία σημεία αντιστοιχούν σε " γωνίες" του συνόλου εφικτών λύσεων.

Παράδειγμα Α.5: Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα οικονομικής κατανομής του παραδείγματος Α.4. Ο πίνακας περιορισμών του προβλήματος μπορεί να εκφραστεί ως:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου οι στήλες του πίνακα αντιστοιχούν στις μεταβλητές $(p_1, p_2, s_1, s_2, s_3)$ αντίστοιχα. Ο πίνακας έχει βαθμό 3, το οποίο σημαίνει ότι όλοι οι περιορισμοί του προβλήματος είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι. Διαλέγοντας (s_1, s_3) ως τις μη βασικές μεταβλητές οι οποίες τίθενται ίσες με μηδέν, το εναπομείναν γραμμικό σύστημα που αποτελείται μόνο από βασικές μεταβλητές (p_1, p_2, s_2) μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Επί της ουσίας, αυτό το σύστημα προκύπτει απομονώνοντας τις στήλες 1, 2 και 4 του αρχικού πίνακα A. Ο νέος πίνακας 3×3 είναι αναστρέψιμος γιατί και αυτός έχει βαθμό 3. Αντιστρέφοντας τον πίνακα, υπολογίζουμε τη βασική λύση που αντιστοιχεί στις βασικές μεταβλητές (p_1, p_2, s_2). Αλγεβραϊκά, αυτό αντιστοιχεί στην επίλυση ενός συστήματος 3 εξισώσεων σε 3 αγνώστους, το οποίο μας δίνει την ακόλουθη βασική λύση:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι βασικές μεταβλητές είναι μη αρνητικές, άρα το συγκεκριμένο γραμμικό σύστημα τυγχάνει να οδηγεί σε μια βασική λύση η οποία είναι επίσης εφικτή. Αντιστοιχεί στο ακραίο σημείο G στο Σχήμα 38. Το γεγονός ότι η μεταβλητή χαλάρωσης s_3 είναι ίση με το μηδέν σημαίνει πως ο τρίτος περιορισμός του αρχικού προβλήματος ισχύει ως ισότητα στο σημείο G, που σημαίνει πως το σημείο G βρίσκεται ακριβώς πάνω στη γραμμή $p_2 = 80$, το οποίο πράγματι επιβεβαιώνεται με μια επισκόπηση του σχήματος.

■

Μια από τις κεντρικές ιδέες πίσω από τον αλγόριθμο simplex είναι πως, αν το αρχικό πρόβλημα έχει μια βέλτιστη λύση (δηλαδή αν δεν είναι ούτε άνεφικτο ούτε απεριόριστο[7]), τότε μια από αυτές μπορεί να βρεθεί ανάμεσα στα ακραία σημεία του εφικτού συνολου. Με άλλα λόγια, αν απαριθμήσουμε όλα τα ακραία σημεία του εφικτού συνόλου, τότε αν διαλέξουμε αυτό που πετυχαίνει τη χαμηλότερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση αυτό το σημείο είναι και βέλτιστη λύση στο αρχικό πρόβλημα. Αυτό δε σημαίνει πως δεν μπορούν να υπάρχουν και βέλτιστες λύσεις οι οποίες δεν είναι ακραία σημεία, αλλά τουλάχιστον μία βέλτιστη λύση είναι ακραίο σημείο. Στην πράξη, η απαρίθμηση όλων των ακραίων σημείων είναι υπολογιστικά απαγορευτική (υπάρχουν έως $\binom{n}{n-m}$ τέτοια σημεία), αλλά τουλάχιστον το γεγονός αυτό μας δίνει έναν τρόπο να πλοηγηθούμε ανάμεσα σε πεπερασμένο πλήθος σημείων αντί για άπειρα, όπως στο αρχικό πρόβλημα.

Παράδειγμα Α.6: Επιστρέφουμε στο παράδειγμα Α.4 και περιγράφουμε το σύνολο των βασικών λύσεων. Ο Πίνακας 11παρουσιάζει το αποτέλεσμα. Υπολογίζουμε τον πίνακα θεωρώντας δύο μη-βασικές μεταβλητές κάθε φορά, ώστε να απομείνει ένα σύστημα τριών μεταβλητών σε τρεις περιορισμούς. Υπάρχουν $\binom{5}{2} = 10$ τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε μη-βασικές μεταβλητές. Υπάρχουν 8 επιλογές οι οποίες οδηγούν σε αντιστρέψιμους υπο-πίνακες, δηλαδή υπάρχουν 8 βασικές λύσεις στο πρόβλημα. Οι επιλογές οι οποίες οδηγούν σε μη-αντιστρέψιμους υπο-πίνακες 3×3 καταδεικνύονται με κόκκινη γραμματοσειρά στην πρώτη στήλη του πίνακα, και στην περίπτωση αυτή δεν μπορούν να υπολογιστούν βασικές λύσεις. Γεωμετρικά, αυτές οι περιπτώσεις αντιστοιχούν σε παράλληλες γραμμές οι οποίες ποτέ δεν τέμνονται, και άρα ποτέ δεν οδηγούν σε βασική λύση. Ο πίνακας παρουσιάζει τις βασικές λύσεις, είτε είναι εφικτές είτε όχι, καθώς και την αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Παρατηρούμε πως οι βασικές εφικτές λύσεις αντιστοιχούν ακριβώς στις γωνίες του εφικτού συνόλου στο Σχήμα 38, και πως η βέλτιση λύση του προβλήματος αντιστοιχεί σε ένα από αυτά τα ακραία σημεία. Συγκεκριμένα, η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στο σημείο F, το οποίο επιτυγχάνει κόστος 3200 €. Αυτό επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα της γραφικής επίλυσης στην ενότητα Α.3.

---

[7] Υπάρχουν μαθηματικά προγράμματα τα οποία δεν έχουν βέλτιστη λύση, και ας μην είναι ούτε απεριόριστα ούτε ανέφικτα. Για παράδειγμα, αυτό μπορεί να συμβεί όταν το εφικτό σύνολο είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Τα εφικτά σύνολα των γραμμικών προγραμμάτων είναι κλειστά σύνολα.

Πίνακας 11: Βασικές λύσεις του παραδείγματος Α.6. Η κόκκινη γραμματοσειρά στη στήλη 1 υποδεικνύει επιλογές μη βασικών μεταβλητών οι οποίες δεν οδηγούν σε βασική λύση, γιατί το σύστημα3×3 είναι μη αντιστρέψιμο.

Μη βασικές μεταβλητές	Βασικές μεταβλητές	Βασική λύση	Ακραίο σημείο	Εφικτό (≥);	Αντικειμενική συνάρτηση
(p_1, p_2)	(s_1, s_2, s_3)	(-100, 60, 80)	A	Όχι	-
(p_1, s_1)	(p_2, s_2, s_3)	(100, 60, -20)	B	Όχι	-
(p_1, s_2)	(p_2, s_1, s_3)		-	-	-
(p_1, s_3)	(p_2, s_1, s_2)	(80, -20, 60)	C	Όχι	-
(p_2, s_1)	(p_1, s_2, s_3)	(100, -40, 80)	D	Όχι	-
(p_2, s_2)	(p_1, s_1, s_3)	(60, -40, 80)	E	Όχι	-
(p_2, s_3)	(p_1, s_1, s_2)		-	-	-
(s_1, s_2)	(p_1, p_2, s_3)	(60, 40, 40)	F	Ναι	3200
(s_1, s_3)	(p_1, p_2, s_2)	(20, 80, 40)	G	Ναι	4400
(s_2, s_3)	(p_1, p_2, s_1)	(60, 80, 40)	H	Ναι	5200

■

Αντί να απαριθμεί όλα τα ακραία σημεία, ο αλγόριθμος simplex πλοηγείται εφαρμόζοντας μία **στροφή** (*pivot*) ανά επανάληψη. Αλγεβραϊκά, αυτό αντιστοιχεί στην εναλλαγή μιας μη-βασικής μεταβλητής με μια βασική μεταβλητή στο γραμμικό σύστημα $m \times m$. Γεωμετρικά, αντιστοιχεί στη μεταπήδηση σε γειτονικό ακραίο σημείο. Σε κάθε επανάληψη(δηλαδή σε κάθε βασική λύση που υπολογίζεται στην πορεία του αλγορίθμου), υπάρχει λεπτομερής θεωρία για τους αριθμητικούς ελέγχους που απαιτούνται ώστε να γνωρίζουμε αν η παρούσα λύση είναι η βέλτιστη. Αν η παρούσα βασική λύση δεν είναι βέλτιση, υπάρχουν διαδικασίες για την επιλογή της μη βασικής μεταβλητής η οποία πρέπει να εξέλθει από τη βάση, με τρόπο που εγγυάται πως η επόμενη επανάληψη θα παράγει μια λύση η οποία να είναι τουλάχιστον όσο καλή όσο η παρούσα λύση. Η ιδιότητα αυτή εξηγεί επίσης την υπολογιστική οικονομία του αλγορίθμου σε σχέση με την απαρίθμηση, καθώς και τη σύγκλιση του αλγορίθμου σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων: δεδομένου ότι η νέα λύση δεν είναι χειρότερη από την προηγούμενη, και εφόσον έχουμε μια διαδικασία να αποφύγουμε κυκλικές διαδρομές ανάμεσα σε λύσεις που πετυχαίνουν την ίδια τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση, έχουμε εγγύηση πως η διαδικασία θα τερματίσει σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων, και πως μπορεί να αποφύγει την εκερεύνηση ενός (δυνητικά τεράστιου) αριθμού σημείων τα οποία δεν είναι ελπιδοφόρα σε σχέση με το σημείο της παρούσας επανάληψης.

Α6 Δυϊκότητα γραμμικού προγραμματισμού

Η θεωρία δυϊκότητας είναι μέρος της θεωρίας μαθηματικού προγραμματισμού που αφορά όλες τις κλάσεις μαθηματικών προγραμμάτων. Έχει σημαντικές προεκτάσεις τόσο ως προς την ανάπτυξη αλγορίθμων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας καθώς και για την οικονομική ερμηνεία των μοντέλων μαθηματικού προγραμματισμού. Στην παρούσα ενότητα εστιάζουμε στην εφαρμογή της θεωρίας στο γραμμικό προγραμματισμό. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε γενικότερη μορφή στο κεφάλαιο 2. Η παρούσα ενότητα εστιάζει στην εφαρμογή των αποτελεσμάτων στο γραμμικό προγραμματισμό, ενώ η ενότητα 2.1 αποδεικνύει αυτά τα αποτελέσματα.

Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού έχει ένα **δυϊκό πρόβλημα**. Αν το αρχικό πρόβλημα, που ονομάζεται **πρωταρχικό πρόβλημα**, είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης τότε το δυϊκό είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης, ενώ αν το πρωταρχικό είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης τότε το δυϊκό είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης. Οι μεταβλητές απόφασης του δυϊκού προβλήματος προσδιορίζονται αντιστοιχώντας μια **δυϊκή μεταβλητή** σε κάθε περιορισμό του πρωταρχικού προβλήματος. Συνεπώς, για κάθε περιορισμό του πρωταρχικού προβλήματος υπάρχει μια δυϊκή μεταβλητή, και σε κάθε μεταβλητή του πρωταρχικού προβλήματος αντιστοιχεί ένας δυϊκός περιορισμός. Ο κανόνας βάσει του οποίου μπορεί να εξαχθεί ένα δυϊκό πρόβλημα από ένα πρωταρχικό πρόβλημα συνοψίζει ο Πίνακας 12, και τον οποίο επαναλαμβάνει ο Πίνακας 2 στην ενότητα 2.1 του κειμένου, όπου ο μνημομνικός πίνακας αποδεικνύεται και μαθηματικά.

Πίνακας 12: Μνημονικός πίνακας δυϊκότητας γραμμικού προγραμματισμού.

Πρωταρχικό	Ελαχιστοποίηση	Μεγιστοποίηση	Δυϊκό
Περιορισμοί	$\geq b_i$	≥ 0	Μεταβλητές
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	Ελεύθερες	
Μεταβλητές	≥ 0	$\leq c_j$	Περιορισμοί
	≤ 0	$\geq c_j$	
	Ελεύθερες	$= c_j$	

Ο τρόπος με τον οποίο ερμηνεύεται ο Πίνακας 12 είναι ο εξής:

- Έστω ότι το πρωταρχικό είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Τότε παρατηρούμε από τη σειρά 1 του πίνακα πως είμαστε στην αριστερά πλευρά του πίνακα, γιατί η βελτιστοποίηση αντιστοιχεί στη δεύτερη στήλη του πίνακα, όχι την τρίτη.
- Σε κάθε πρωταρχικό περιορισμό τύπου (≥) (σειρά 2, στήλη 2 του πίνακα), αντιστοιχεί μια μη αρνητική δυϊκή μεταβλητή (σειρά 2, στήλη 3 του πίνακα). Παρομοίως, από τη σειρά 2 παρατηρούμε πως σε κάθε πρωταρχικό περιορισμό τύπου (≤) αντιστοιχεί μια μη-θετική δυϊκή μεταβλητή, και από τη σειρά 3 παρατηρούμε πως σε κάθε ισότητα του πρωταρχικού προβλήματος αντιστοιχεί μια ελεύθερη δυϊκή μεταβλητή.
- Σε κάθε μη αρνητική πρωταρχική μεταβλητή (σειρά 4, στήλη 2) αντιστοιχεί ένας δυϊκός πειορισμός τύπου (≤) (σειρά 4, στήλη 3). Παρομοίως, η σειρά 5 υποδεικνύει πως σε κάθε μη-θετική πρωταρχική μεταβλητή αντιστοιχεί ένας δυϊκός περιορισμός τύπου (≥), και η σειρά 6 υποδεικνύει πως σε κάθε περιορισμό ισότητας του πρωταρχικού προβλήματος αντιστοιχεί μια ελεύθερη δυϊκή μεταβλητή.
- Αν το πρωταρχικό είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης, ακολουθούμε την αντιστοιχία του πίνακα από τα δεξιά στα αριστερά, αντί από αριστερά στα δεξιά.

Αν και έχουμε καθορίσει το πρόσημο των δυϊκών μεταβλητών και την κατεύθυνση του δυϊκών περιορισμών, απομένει να περιγράψουμε τις παραμέτρους του δυϊκού προβλήματος. Κάθε δυϊκή μεταβλητή στην αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού προβλήματος πολλαπλασιάζεται από την παράμετρο της δεξιάς πλευράς b_i του αντίστοιχου περιορισμού. Κατ'αναλογία, η παράμετρος της δεξιάς πλυράς ενός δυϊκού πειορισμού ισούται με το συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης c_j της αντίστοιχης πρωταρχικής μεταβλητής. Τέλος, η αριστερή πλευρά των δυϊκών περιορισμών καθορίζεται σαρώνοντας τους πρωταρχικούς περιορισμούς, πολλαπλασιάζοντας το συντελεστή της πρωταρχικής μεταβλητής στον οποίο αντιστοιχεί ο δυϊκός περιορισμός με την αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή, και αθροίζοντας το αποτέλεσμα στη συνολική έκφραση. Εφαρμόζουμε τη διαδικασία αυτή σε ένα απλό παράδειγμα, και κατόπιν στο παράδειγμα οικονομικής κατανομής το οποίο αναλύεται στην παρούσα ενότητα.

Παράδειγμα A.7: Έστω το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\min_x 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$(\pi_1): x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$(\pi_2): 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 0$$

$$(\pi_3): x_3 = 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

Οι δυϊκές μεταβλητές που αντιστοιχούν σε κάθε πρωταρχικό περιορισμό υποδεικνύονται στα αριστερά των περιορισμών, εντός παρενθέσεων, που ακολουθούνται από άνω-κάτω τελεία. Το δυϊκό πρόβλημα εκφράζεται ως εξής:

$$\mathrm{m}ax_\pi 3\pi_1 + 0\pi_2 + 5\pi_3$$

$$(x_1): \pi_1 + 2\pi_3 \leq 3$$

$$(x_2): \pi_1 + 2\pi_2 \geq 2$$

$$(x_3): \pi_1 + 2\pi_2 = 1$$

$$\pi_1 \leq 0, \pi_2 \geq 0$$

■

Παράδειγμα A.8: Επιστρέφουμε στο πρόβλημα οικονομικής κατανομής του παραδείγματος A.3 και το γράφουμε ισοδύναμα με τις αντίστοιχες δυϊκές μεταβλητές να υποδεικνύονται στα αριστερά των αντίστοιχων περιορισμών και με μια ελαφριά αναδιαρρύθμιση της αντικειμενικής συνάρτησης και του πρώτου πρωταρχικού περιορισμού:

$$\max_{p_1,p_2} - 20 \cdot p_1 - 50 \cdot p_2$$

$$(\lambda): -p_1 - p_2 \leq -100$$

$$(\mu_1): p_1 \leq 60$$

$$(\mu_2): p_2 \leq 80$$

$$p_1, p_2 \geq 0$$

Εφόσον η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του προβλήματος οικονομικής κατανομής του παραδείγματος A.3 είναι 3200, η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του προβλήματος μεγιστοποίησης είναι -3200. Το δυϊκό πρόβλημα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\max_{\lambda,\mu} -100\lambda + 60\mu_1 + 80\mu_2$$

$$(p_1): -\lambda + \mu_1 \geq -20$$

$$(p_2): -\lambda + \mu_2 \geq -50$$

$$\lambda \geq 0, \mu_1 \leq 0, \mu_2 \leq 0$$

Η βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος είναι $\lambda^* = 50$, $\mu_1^* = 30$, $\mu_2^* = 0$. Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος είναι -3200. Συνεπώς, η βέλτιστη αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού προβλήματος είναι ίση με τη βέλτιστη τιμή του πρωταρχικού προβλήματος. Αυτό δεν είναι σύμπτωση, και ονομάζεται ισχυρή δυϊκότητα.

■

Παρατηρούμε πως η διαδικασία που περιγράφεται λεκτικά για τον υπολογισμό του δυϊκού προβλήματος μπορεί να συνοψιστεί με τη μαθηματική σημειολογία που έχει εισαχθεί προηγουμένως. Για παράδειγμα, το δυϊκό ενός πρωταρχικού προβλήματος σε κανονική μορφή

$$\min_x c^T x$$

$$(\pi): Ax = b$$

$$x \geq 0$$

μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$\max_\pi b^T \pi$$

$$\pi^T A \leq c^T$$

Μια **χαλάρωση** ενός μαθηματικού προγράμματος είναι μια εκδοχή του αρχικού μαθηματικού προγράμματος στην οποία το εφικτό σύνολο διευρύνεται, για παράδειγμα αγνοώντας κάποιον περιορισμό. Συνεπώς, η χαλάρωση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης δίνει μια λύση η οποία οδηγεί σε μια τιμή αντικειμενικής συνάρτησης η οποία είναι μικρότερη ή ίση από την αντικειμενική συνάρτηση του αρχικού προβλήματος ελαχιστοποίησης. Παρομοίως, μια χαλάρωση ενός προβλήματος μεγιστοποίησης δίνει μια λύση η οποία οδηγεί σε μια τιμή αντικειμενικής συνάρτησης η οποία είναι μεγαλύτερη ή ίση από την τιμή αντικειμενικής συνάρτησης του αρχικού προβλήματος μεγιστοποίησης.

Ένα γενικό αποτέλεσμα της θεωρίας μαθηματικού προγραμματισμού δείχνει πως τα δυϊκά προβλήματα θέτουν ένα φράγμα στα αντίστοιχα πρωταρχικά προβλήματα, γιατί προέρχονατι από *χαλαρώσεις* των αρχικών πρωταρχικών προβλημάτων. Αυτό αναφέρεται ως **ασθενής δυϊκότητα**. Το αποτέλεσμα βασίζεται στην πρόταση 2.1 του κεφαλαίου 2.

Ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα του μαθηματικού προγραμματισμού δηλώνει πως, για ορισμένες κλάσεις μαθηματικών προγραμμάτων, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος είναι *ίση* με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωταρχικού προβλήματος. Αυτό αναφέρεται ως **ισχυρή δυϊκότητα**. Η ισχυρή δυϊκότητα ισχύει στην περίπτωση των γραμμικών προγραμμάτων. Ισχύει κατά κανόνα πως τα μαθηματικά προγράμματα για τα οποία ισχύει ισχυρή δυϊκότητα είναι υπολογιστικά διαχειρίσιμα.

Η ισχυρή δυϊκότητα του γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να εκφραστεί με πιο ακριβή τρόπο, προκειμένου να αποτυπωθούν και οι περιπτώσεις στις οποίες τα γραμμικά προγράμματα είναι ανέφικτα ή απεριόριστα. Συγκεκριμένα:

- Αν ένα πρωταρχικό πρόβλημα έχει βέλτιστη λύση, τότε το δυϊκό του έχει βέλτιστη λύση με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης η οποία είναι ίση με αυτήν του πρωταρχικού προβλήματος.
- Αν ένα πρωταρχικό πρόβλημα είναι απεριόριστο, τότε το δυϊκό του είναι ανέφικτο.
- Αν ένα πρωταρχικό πρόβλημα είναι ανέφικτο, τότε το δυϊκό μπορεί να είναι ανέφικτο ή απεριοόριστο.

Η δυϊκότητα χρησιμοποιείται σε αλγορίθμους βελτιστοποίησης για την επίλυση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας. Η γενική αρχή είναι να επιλύει κανείς το δυϊκό πρόβλημα, το οποίο είναι συχνά ευκολότερο να επιλυθεί από το πρωταρχικό πρόβλημα. Αυτό οδηγεί σε ένα φράγμα του αρχικού προβλήματος στην περίπτωση της ασθενούς δυϊκότητας (από το οποίο ενίοτε μπορούν να εξαχθούν πρωταρχικές λύσεις υψηλής ποιότητας), ή η βέλτιστη λυση του αρχικού προβλήματος στην περίπτωση ισχυρής δυϊκότητας.

Τέλος, σημειώνεται πως το δυϊκό ενός δυϊκού προβλήματος αντιστοιχεί στο πρωταρχικό πρόβλημα.

Α7 Ευαισθησία

Οι δυϊκές μεταβλητές περιέχουν σημαντική πληροφορία για τη συμπεριφορά της αντικειμενικής συνάρτησης στη γειτονιά της βέλτιστης λύσης. Συγκεκριμένα, μια δυϊκή μεταβλητή ποσοτικοποιεί την ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης του αρχικού προβλήματος ως προς μια αλλαγή στην τιμή της δεξιάς πλευράς του περιορισμού στον οποίο αντιστοιχεί. Το αποτέλεσμααυτό αποδεικνύεται μαθηματικά στην πρόταση 2.8 του κεφαλαίου 2. Περιγράφουμε την ιδιότητα αυτή επιστρέφοντας στο γνωστό παράδειγμα της οικονομικής κατανομής.

Παράδειγμα Α.9: Έστω η αναδιατύπωση του προβλήματος οικονομικής κατανομής του παραδείγματος Α.8, και έστω ότι αυξάνουμε τη δεξιά πλευρά του πρώτου περιορισμού ($-p_1 - p_2 \leq -100$) κατά μία μονάδα, μετατρέποντας έτσι την τιμή της δεξιάς πλευράς του περιορισμού σε -99 αντί -100:

$$\max_{p_1,p_2} -20 \cdot p_1 - 50 \cdot p_2$$

$$(\lambda): -p_1 - p_2 \leq -99$$

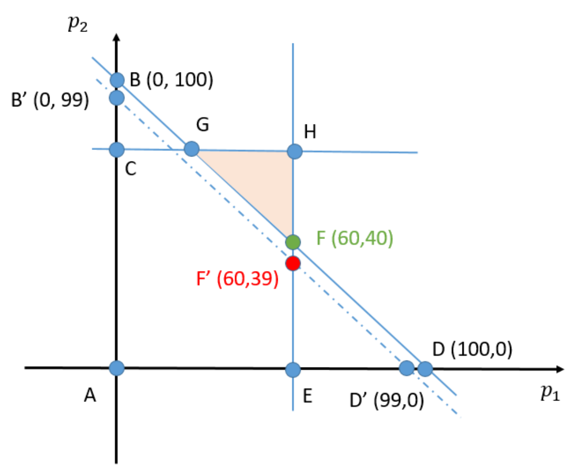
$$(\mu_1): p_1 \leq 60$$

$$(\mu_2): p_2 \leq 80$$

$$p_1, p_2 \geq 0$$

Μπορούμε να επιλύσουμε πάλι το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη γραφική προσέγγιση. Η βέλτιστη λύσει παρουσιάζεται στο Σχήμα 39, όπου το πράσινο σημείο αντιστοιχεί στην αρχική βέλτιστη λύση και το κόκκινο σημείο αντιστοιχεί στη νέα βέλτιστη λύση. Παρατηρούμε ότι το εφικτό σύνολο έχει αυξηθεί, εφόσον ο περιορισμός $p_1 + p_2 \geq 100$ έχει μετακινηθεί προς τα κάτω και αριστερά, εκφραζόμενος ως $p_1 + p_2 \geq 99$. Ο περιορισμός αυτός απεικονίζεται από τη γραμμή η οποία περνάει από το σημείο B' στις συντεταγμένες (0, 99) και το σημείο D' στις συντεταγμένες (99,0). Η επέκταση του εφικτού συνόλου οδηγεί σε μία νέα και φθηνότερη καμπύλη ίσου κόστους η οποία περνάει από το σημείο F' με συντεταγμένες (60, 39). Το κόστος της λύσης αυτής είναι 3150, άρα η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του προβλήματος εκφρασμένου σε μορφή μεγιτοποίησης είναι -3150. Η αλλαγή στη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι συνεπώς ίση με $-3150-(-3200)=50$. Παρατηρούμε πως αυτή είναι ακριβώς η τιμή της βέλτιστης δυϊκής μεταβλητής λ^*, που είναι η δυϊκή μεταβλητή του περιορισμού τον οποίο έχουμε χαλαρώσει. Συνεπώς, παρατηρούμε πως η δυϊκή μεταβλητή ήδη περιέχει την πληροφορία της ευαισθησίας της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης σε μια αλλαγή στη δεξιά πλευρά του αντίστοιχου περιορισμού.

Σχήμα 39: Ευαισθησία της βέλτιστης λύσης της οικονομικής κατανομής στο παράδειγμα A.9.



■

A8 Συνθήκες KKT για γραμμικά προγράμματα

Οι **συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT)** είναι ένα σύνολο μαθηματικών συνθηκών οι οποίες χαρακτηρίζουν τη βέλτιστη λύση ενός πρωταρχικού προβλήματος και του δυϊκού του για ορισμένες κλάσεις μαθηματικών προγραμμάτων, συμπεριλαμβανομένων των γραμμικών προγραμμάτων. Οι συνθήκες KKT είναι ένα σύνολο από ανισότητες και **συνθήκες συμπληρωματικότητας** οι οποίες εμπλέκουν τόσο τις πρωταρχικές καθώς και τις δυϊκές μεταβλητές, και οι οποίες αποτελούν πιστοποιητικά πως μια υποψήφια λύση του πρωταρχικού και δυϊκού προβλήματος είναι βέλτιστη. Είναι αναγκαίες και ικανές για ορισμένες κλάσεις προβλημάτων (συμπεριλαμβανομένων των γραμμικών προγραμμάτων), το οποίο σημαίνει πως (i) αν ένα πρωταρχικό-δυϊκό διάνυσμα (x, π) είναι υποψήφιο για να είναι βέλτιστο, αυτό μπορεί να ελεγχθεί με το να επιβεβαιώσουμε πως ικανοποιεί τις συνθήκες KKT, και (ii) οποιαδήποτε βέλτιστη λύση x του πρωταρχικού προβλήματος και π του δυϊκού προβλήματος πρέπει να ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες.

Ο τελεστής συμπληρωματικότητας συμβολίζεται ως $\perp$ και είναι δυαδικός τελεστής. Η έκφραση $a \perp b$ συνεπάγεται πως $a \cdot b = 0$. Χρησιμοποιούμε επίσης τη συμπυκνωμένη σημειολογία $0 \leq a \perp b \geq 0$ για να υποδείξουμε πως οι ακόλουθες τρεις συνθήκες πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα: $a \geq 0, b \geq 0$ και $a \cdot b = 0$. Συνεπώς, το $0 \leq a \perp b \geq 0$ σημαίνει πως είτε $a = 0$, ή , $b = 0$, ή και τα δύο, αλλά δεν μπορούν και οι δύο ποσότητες να είναι θετικές ταυτόχρονα, άρα αν η μία είναι θετική τότε η άλλη είναι ίση με το μηδέν.

Στην περίπτωση του γραμμικού προγραμματισμού, οι συνθήκες ΚΚΤ είναι αναγκαίες και ικανές για να είναι μια λύση βέλτιστη. Συγκεκριμένα, το ακόλουθο αποτέλεσμα ισχύει, το οποίο είναι μια επαναδιατύπωση της πρότασης 2.5 της ενότητας 2 για την περίπτωση μιας γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης:

Πρόταση Α.1: Έστω το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\max c_x^T x + c_y^T x$$

$$\text{s.t. } (\lambda): Ax + By \leq b$$

$$(\mu): Cx + Dy = d$$

$$(\lambda_2): x \geq 0$$

Οι συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος έχουν την εξής μορφή:

$$Cx + Dy - d = 0$$

$$0 \leq \lambda \perp Ax + By - b \leq 0$$

$$0 \leq x \perp \lambda^T A + \mu^T C - c_x^T \geq 0$$

$$\lambda^T B + \mu^T D - c_y^T = 0$$

και είναι ικανές και αναγκαίες για μια βέλτιστη λύση.

■

Οι συνθήκες ΚΚΤ μπορούν να συνοψιστούν με τον ακόλουθο μνημονικό κανόνα:

- Το πρώτο σύνολο συνθηκών ΚΚΤ είναι οι περιορισμοί ισότητας του πρωταρχικού προβλήματος.
- Το δεύτερο σύνολο συνθηκών ΚΚΤ είναι οι περιορισμοί ανισότητας του πρωταρχικού προβλήματος, οι οποίοι είναι συμπληρωματικοί προς τις μη αρνητικές δυϊκές μεταβλητές.
- Το τρίτο σύνολο συνθηκών ΚΚΤ είναι μη αρνητικές πρωταρχικές μεταβλητές οι οποίες είναι συμπληρωματικές προς δυϊκές ανισότητες τύπου ($\leq$). Οι δυϊκές ανισότητες υπολογίζονται ως με την ακόλουθη έκφραση: πλην[8] το συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης της αντίστοιχης πρωταρχικής μεταβλητής ($-c_x^T$) συν το γινόμενο του συντελεστή της αντίστοιχης πρωταρχικής μεταβλητής όποτε η μεταβλητή εμφανίζεται σε ένα πρωταρχικό περιορισμό επί την αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή ($\lambda^T A + \mu^T C$).

---

[8] Παρατηρούμε πως, για προβλήματα ελαχιστοποίησης, οι δυϊκές ανισότητες και δυϊκές ισότητες υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το συντελεστή της αντίστοιχης πρωταρχικής μεταβλητής στην αντικειμενική συνάρτηση (c_x^T), αντί για πλην το συντελεστή, το οποίο είναι συνεπές με το γεγονός ότι η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης f είναι ισοδύναμη με τη μεγιστοποίηση της $-f$.

- Το τέταρτο σύνολο συνθηκών ΚΚΤ είναι δυϊκές ισότητες οι οποίες αντιστοιχούν σε κάθε ελεύθερη πρωταρχική μεταβλητή. Οι δυϊκές ισότητες υπολογίζονται με την ακόλουθη διαδικασία: πλην το συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης της αντίστοιχης πρωταρχικής μεταβλητής $(-c_y^T)$ συν το γινόμενο του συντελεστή της αντίστοιχης πρωταρχικής μεταβλητής όποτε η μεταβλητή εμφανίζεται σε ένα πρωταρχικό περιορισμό επί την αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή $(\lambda^T B + \mu^T D)$.

Εφαρμόζουμε τώρα τη διαδικασία αυτή στο παράδειγμα οικονομικής κατανομής.

Παράδειγμα Α.10: Έστω η επαναδιατύπωση του προβλήματος οικονομικής κατανομής σε μορφή μεγιστοποίησης, όπως στο παράδειγμα Α.8:

$$\max_{p_1,p_2} -20 \cdot p_1 - 50 \cdot p_2$$

$$(\lambda): -p_1 - p_2 \leq -100$$

$$(\mu_1): p_1 \leq 60$$

$$(\mu_2): p_2 \leq 80$$

$$p_1, p_2 \geq 0$$

Παρατηρούμε πως το πρωταρχικό πρόβλημα είναι ήδη στη μορφή της πρότασης Α.1. Οι συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος συνοψίζονται ως εξής:

$$0 \leq \lambda \perp p_1 + p_2 - 100 \geq 0$$

$$0 \leq \mu_1 \perp 60 - p_1 \geq 0$$

$$0 \leq \mu_2 \perp 80 - p_2 \geq 0$$

$$0 \leq p_1 \perp 20 - \lambda + \mu_1 \geq 0$$

$$0 \leq p_2 \perp 50 - \lambda + \mu_2 \geq 0$$

Παρατηρούμε πως δεν υπάρχουν ελεύθερες πρωταρχικές μεταβλητές, άρα δεν υπάρχουν δυϊκές ισότητες. Ισχυριστήκαμε προηγουμένως πως το $\lambda^* = 50, \mu_1^* = 30, \mu_2^* = 0$ είναι μια βέλτιστη λύση στο δυϊκό πρόβλημα, χωρίς ωστόσο να το αποδείξουμε. Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί ελέγχοντας πως η υποψήφια βέλτιστη δυϊκή λύση ικανοποιεί τις συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος οικονομικής κατανομής όταν συνδυαστεί με την πρωταρχική λύση $p_1^* = 60, p_2^* = 40$, η οποία έχουμε επιβεβαιώσει γραφικά πως είναι η βέλτιστη λύση του πρωταρχικού προβλήματος.

■

Οι συνθήκες ΚΚΤ επανέρχονται συνεχώς στο κείμενο, γιατί μας επιτρέπουν να εξάγουμε ποσοτικά συμπεράσματα όσον αφορά τη συμπεριφορά μοντέλων τέλειου ανταγωνισμού. Τα οικονομικά μοντέλα τέλειου ανταγωνισμού είναι η βάση εκκίνησης για τα μοντέλα αγορών ηλεκτρικής ενέργειας. Οι συνθήκες ΚΚΤ χαρακτηρίζουν συνεπώς τη συμπεριφορά των τιμών της αγοράς σε συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού, και εξηγούν τη συμπεριφορά πλήθους μοντέλων, συμπεριλαμβανομένης της τιμολόγησης ενέργειας σε μοντέλα οικονομικής κατανομής, την τιμολόγηση της πρόσβασης στο δίκτυο σε προβλήματα βέλτιστης ροής φορτίου, την τιμολόγηση εφεδρειών σε προβλήματα συνβελτιστοποίησης ενέργειας και εφεδρειών, την τιμολόγηση χωρητικότητας σε μακροπρόθεσμα μοντέλα επένδυσης, την τιμολόγηση ενέργειας σε μοντέλα που υπόκεινται σε περιορισμούς ράμπας, την επίδραση της αποθήκευσης στις τιμές της αγοράς, την επίδραση της υποκατάστασης στις τιμές ενέργειας, και πλήθος άλλων σημαντικών εφαρμογών. Οι συνθήκες ΚΚΤ είναι συνεπώς κεντρικό εργαλείο του κειμένου, και επανερχόμαστε σε αυτές συνεχώς στις σημειώσεις.

Παράδειγμα Α.11: Προκειμένου να κατανοήσουμε γιατί οι δυϊκές μεταβλητές έχουν οικονομική ερμηνεία, επιστρέφουμε στο παράδειγμα οικονομικής κατανομής και αναλύουμε τις συνθήκες ΚΚΤ που αντιστοιχούν στο πρόβλημα σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Έστω πως, αντί να λαμβάνει εντολή για το πόση ενέργεια να παράγει, η γεννήτρια 1 ανταποκρίνεται σε μια τιμή αγοράς, την οποία συμβολίζουμε ως λ. Όπως θα γίνει σύντομα φανερό, η επιλογή της σημειολογείας δεν είναι τυχαία. Δεδομένης μιας εξωγενούς τιμής λ, το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους του παραγωγού μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\max_{p_1 \geq 0} \lambda \cdot p_1 - 20 \cdot p_1$$

$$(\mu_1): p_1 \leq 60$$

Παρατηρούμε πως η γεννήτρια παράγει με σκοπό να μεγιστοποιήσει το κέρδος της, αλλά σεβόμενη τους ιδιωτικούς περιορισμούς λειτουργίας της: $0 \leq p_1 \leq 60$. Η δυϊκή μεταβλητή που αντιστοιχεί στον περιορισμό $p_1 \leq 60$ συμβολίζεται ως μ_1. Και στην περίπτωση αυτή, η επιλογή σημειολογίας δεν είναι τυχαία. Ο περιορισμός αυτός είναι ανάλογος προς το δεύτερο περιορισμό του προβλήματος οικονομικής κατανομής του παραδείγματος Α.10, αλλά ισχύει για ένα διαφορετικό πρόβλημα βελτιστοποίησης: αυτό της μεγιστοποίησης κέρδους της γεννήτριας 1, όχι το συναολικό πρόβλημα οικονομικής κατανομής του συστήματος. Οι συνθήκες ΚΚΤ αυτού του προβλήματος μεγιστοποίησης κέρδους εκφράζονται ως εξής:

$$0 \leq p_1 \perp 20 - \lambda + \mu_1 \geq 0$$

$$0 \leq \mu_1 \perp 60 - p_1 \geq 0$$

Παρατηρούμε πως αυτές οι συνθήκες είναι *πανομοιότυπες* με τη δεύτερη και την τέταρτη συνθήκη ΚΚΤ του αρχικού προβλήματος οικονομικής κατανομής του παραδείγματος Α.10 (και αυτό εξηγεί γιατί επιλέξαμε αυτήν τη σημειολογία για τις δυϊκές μεταβλητές του προβλήματος μεγιστοποίησης κέρδους). Αυτή είναι μια σημαντική παρατήρηση: συνεπάγεται πως η βέλτιστη λύση του προβλήματος οικονομικής κατανομής *εμπεριέχει* το στόχο μεγιστοποίησης κέρδους της γεννήτριας 1. Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει πως η πρωταρχική-δυϊκή λύση $(\lambda^*, \mu_1^*, p_1^*)$ η οποία προκύπτει από το μοντέλο οικονομικής κατανομής επιλύει επίσης το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους της γεννήτριας 1, εφόσον η δυϊκή μεταβλητή λ αναλαμβάνει το ρόλο μιας *τιμής αγοράς* για τη συναλλαγή ενέργειας σε ένα αποκεντρωμένο πλαίσιο μεγιστοποίησης κέρδους. Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει, μέσω μιας πανομοιότυπης ανάλυσης, πως το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους της γεννήτριας 2 εμπεριέχεται στη δεύτερη και πέμπτη συνθήκη ΚΚΤ του παραδείγματος Α.10. Αυτό μας αφήνει με την ερμηνεία της πρώτης συνθήκης ΚΚΤ του προβλήματος οικονομικής κατανομής: $0 \leq \lambda \perp p_1 + p_2 - 100 \geq 0$. Επανερχόμαστε σε αυτήν τη συνθήκη λεπτομερώς στο κεφάλαιο 4, αλλά μπορούμε ήδη να δηλώσουμε πως η συνθήκη αυτή ερμηνεύεται ως *συνθήκη εκκαθάρισης της αγοράς*: δεδομένης μιας μη-μηδενικής τιμής αγοράς ($\lambda > 0$), η παραγωγή των γεννητριών πρέπει να ισούται με τη ζήτηση στην αγορά ($p_1 + p_2 = 100$), εκτός αν υπάρχει πλεονάζουσα παραγωγή στην αγορά

($p_1 + p_2 > 100$), στην οποία περίπτωση η τιμή της ενέργειας είναι μηδέν ($\lambda = 0$) γιατί υπάρχει υπερ-προσφορά. Συνεπώς, οι συνθήκες ΚΚΤ του κεντρικού προβλήματος οικονομικής κατανομής μπορεί να θωρηθεί ισοδύναμα ως ένα σύνολο συνθηκών οι οποίες εμπεριέχουν την εξής πληροφορία:

- Η πρωταρχική-δυϊκή λύση πρέπει να είναι τέτοια ώστε να μεγιστοποιείται το κέργος της γεννήτριας 1
- Η πρωταρχική-δυϊκή λύση πρέπει να είναι τέτοια ώστε να μεγιστοποιείται το κέργος της γεννήτριας 2
- Η αγορά εκκαθαρίζει

Η ανάλυση αυτή γενικέυεται στο κεφάλαιο 4, ωστόσο ο αναγνώστης μπορεί ήδη να εκτιμήσει την οικονομική ερμηνεία της δυϊκής μεταβλητής λ ως τιμή της αγοράς, δηλαδή ένα σήμα τιμής το οποίο να μπορεί να συντονίσει αποκεντρωμένους πράκτορες οι οποίοι μεγιστοποιούν το κέρδος ώστε να αντιδράσουν με τέτοιον τρόπο ώστε να μεγιστοποιήσουν τη συνολική επίδοση όλου του συστήματος (δηλαδή ελαχιστοποιούν το κόστος παραγωγής, στο συγκεκριμένο παράδειγμα).

■

Παράδειγμα Α.12: Έστω ένα πρόβλημα οικονομικής κατανομής σε δύο χρονικές περιόδους σε ένα σύστημα που αποτελείται από δύο γεννήτριες. Τα τεχνικά χαρακτηριστικά των μονάδων συνοψίζει ο Πίνακας 13. Η ζήτηση του συστήματος για τις δύο περιόδους του ορίζοντα βελτιστοποίησης είναι:

- Ζήτηση στην περίοδο 1: 100 MWh
- Ζήτηση στην περίοδο 2: 200 MWh

Πίνακας 13: Τα δεδομένα των γεννητριών του παραδείγματος Α.12.

Μονάδα	Οριακό κόστος (€/MWh)	Όριο ράμπας (MW)	Χωρητικότητα (MW)
1	20	60	$+\infty$
2	50	$+\infty$	$+\infty$

Το γραμμικό πρόγραμμα το οποίο περιγράφει τη βέλτιστη κατανομή μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$min_{p\geq 0} 20 \cdot (p_{11} + p_{12}) + 50 \cdot (p_{21} + p_{22})$$

$$(\lambda_1): 100 - p_{11} - p_{21} = 0$$

$$(\lambda_2): 200 - p_{12} - p_{22} = 0$$

$$(\delta^+): p_{12} - p_{11} \leq 60$$

$$(\delta^-): p_{11} - p_{12} \leq 60$$

Εδώ, το p_{11} συμβολίζει την παραγωγή της μονάδας i τη χρονική περίοδο t, άρα ο πρώτος δείκτης υποδεικνύει τη μονάδα ενώ ο δεύτερος δείκτης υποδεικνύει τη χρονική περίοδο. Η βέλτιστη λύση της οικονομικής κατανομής είναι $p_{11}^* = 100$ MW, $p_{12}^* = 160$ MW, $p_{22}^* = 40$ MW, δηλαδή το σύστημα αντλεί 100 MWh από τη γεννήτρια 1 και ανεβάζει την παραγωγή της μονάδας αυτής στα 160 MWh στην περίοδο 2, αναπληρώνοντας τη διαφορά προκειμένου να καλύψει τη ζήτηση της δεύτερης περιόδου με τη μονάδα 2. Οι συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος περιγράφονται ως εξής:

$$100 - p_{11} - p_{21} = 0$$

$$0 \leq 60 - p_{12} + p_{11} \perp \delta^{+} \geq 0$$

$$0 \leq 60 - p_{11} + p_{12} \perp \delta^{-} \geq 0$$

$$0 \leq 20 - \lambda_1 - \delta^{+} + \delta^{-} \perp p_{11} \geq 0$$

$$0 \leq 20 - \lambda_2 + \delta^{+} - \delta^{-} \perp p_{12} \geq 0$$

$$0 \leq 50 - \lambda_1 \perp p_{21} \geq 0$$

$$0 \leq 50 - \lambda_2 \perp p_{22} \geq 0$$

Κατ'αναλογία προς το παράδειγμα Α.11, οι δυϊκές μεταβλητές λ_1 και λ_2 ερμηνεύονται ως τιμές αγοράς σε ένα αποκεντρωμένο πλαίσιο. Συγκεκριμένα, η τρίτη, τέταρτη, πέμπτη και έκτη συνθήκη ΚΚΤ είναι ισοδύναμες με το ακόουθο πρόβλημα μεγιστοποίησηση για τη γεννήτρια 1:

$$\max_{p \geq 0} (\lambda_1 - 20) \cdot p_{11} + (\lambda_2 - 20) \cdot p_{12}$$

$$(\delta^{+}): p_{12} - p_{11} \leq 60$$

$$(\delta^{-}): p_{11} - p_{12} \leq 60$$

Παρομοίως, η έβδομη και όγδοη συνθήκη ΚΚΤ είναι ισοδύναμες με το ακόλουθο πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους της γεννήτριας 2:

$$\max_{p \geq 0} (\lambda_1 - 50) \cdot p_{21} + (\lambda_2 - 50) \cdot p_{22}$$

Όπως στην περίπτωση του παραδείγματος Α.11, οι συνθήκες ΚΚΤ του κεντρικού προβλήματος οικονομικής κατανομής εμπεριέχουν τις συνθήκες μεγιστοποίησης κέρδους των επιμέρους πρακτόρων. Αυτό συνεπάγεται πως το ζεύγος τιμών και αποφάσεων παραγωγής που παράγει το κεντρικό πρόβλημα κατανομής είναι συνεπές με τους στόχους μεγιστοποίησης κέρδους των πρακτόρων, και συνεπώς οι τιμές αγοράς είναι κατάλληλες ως αποκεντρωμένο σήμα ελέγχου. Η παρατήρηση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να γίνουν κατανοητές οι τιμές που παράγει το μοντέλο. Συγκεκριμένα, εφόσον ζητάται από τη μονάδα 2 να παράγει μια θετική ποσότητα ενέργειας στην περίοδο 2, η μόνη τιμή που μπορεί να ωθήσει τη μονάδα να παράγει μια μη μηδενική αλλά και πεπερασμένη ποσότητα ενέργειας στην περίοδο 2 είναι το οριακό της κόστος, διότι μια τιμή που είναι μεγαλύτερη από το οριακό της κόστος θα ωθούσε τη μονάδα να παράγει στο τεχνικό της μέγιστο (δηλαδή άπειρο) ενώ ένα σήμα τιμής το οποίο είναι χαμηλότερο από το οριακό της κόστος θα ωθούσε τη μονάδα να παράγει μηδέν.

Από την άλλη, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ποια είναι η τιμή στην περίοδο 1 από τη βέλτιστη κατανομή της γεννήτριας 2: εφόσον η γεννήτρια δεν παράγει, η τιμή λ_2 πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση από το οριακό της κόστος, αλλά ο καθορισμός της ακριβούς τιμής απαιτεί την ανάλυση του προβλήματος μεγιστοποίησης κέρδους της γεννήτριας 1.

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους της γεννήτριας 1 πρέπει να θεωρηθεί και στις δύο περιόδους ταυτόχρονα, γιατί οι περιορισμοί ράμπας δημιουργούν αλληλεξαρτήσεις μεταξύ των δύο περιόδων. Αν η μέση τιμή των δύο περιόδων είναι μεγαλύτερη από 30 €/MWh, τότε η μονάδα έχει συμφέρον να παράγει μια αυθαίρετα μεγάλη ποσότητα ηλεκτριστμού στην περίοδο 1, και την ίδια αυτή ποσότητα συν 60 MWh (τον περιορισμό ράμπας) στην περίοδο 2. Από την άλλη, αν η μέση τιμή στις δύο περιόδους είναι χαμηλότερη από 30 €/MWh, τότε η μονάδα έχει συμφέρον να παράγει 0 MWh και στις δύο περιόδους. Εφόσον κανένα από τα δύο αυτά άκρα δεν ισχύει στη βέλτιστη λύση, η μέση τιμή στις δύο περιόδους πρέπει να είναι ίση με 30 €/MWh, ώστε να μπορούμε να ωθήσουμε τη μονάδα να παράγει 100 MWh στην περίοδο1 και 160 MWh στην περίοδο 2. Το οποίο συνεπάγεται πως η τιμή στην περίδο 2, λ_2, πρέπει να είναι -10 €/MWh. Μια αρνητική τιμή ίσως φαίνεται εξωτική, αλλά συμβαίνει στις αγορές ηλεκτρικής ενέργειας. Συνεπάγεται πως οι καταναλωτές *πληρώνονται*, αντί να πληρώνουν, για να καταναλώσουν ενέργεια. Η τιμή του λ_2 μπορεί επίσης να εξαχθεί από τις συνθήκες ΚΚΤ του προβλήματος. Συγκεκριμένα, εφόσον $p_{11} > 0$, η πέμπτη συνθήκη ΚΚΤ του κεντρικού προβλήματος συνεπάγεται πως:

$$\lambda_1 = 20 - \delta^+ + \delta^-$$

Και εφόσον $p_{12} > 0$, η έκτη συνθήκη ΚΚΤ του κεντρικού προβλήματος συνεπάγεται πως:

$$\lambda_2 = 20 + \delta^+ - \delta^-$$

Γνωρίζουμε ήδη πως $\lambda_2 = 50$. Αυτό σημαίνει πως $\delta^+ - \delta^- = 30$, το οποίο με τη σειρά του συνεπάγεται πως $\lambda_1 = -10$.

Αξίζει να αντιπαρατεθεί η τιμή που εξάγουμε με μια ευρεστική τιμολόγηση η οποία έχει χρησιμοποιηθεί από ορισμένους διαχειριστές συστημάτων μεταφοράς ανά τον κόσμο στο παρελθόν: τιμολόγηση ίση με το οριακό κόστος της φθηνότερης μονάδας η οποία παράγει μια μη μηδενική ποσότητα. Εφαρμόζοντας την ευρεστική αυτή τιμολόγηση στη βέλτιστη λύση της οικονομικής κατανομής που υπολογίσαμε προηγουμένως συνεπάγεται μια τιμή 20 €/MWh και στην περίοδο 1 καθώς και στην περίοδο 2 (εφόσον η μονάδα 1 παράγει μια μη μηδενική ποσότητα και στις δύο περιόδους, και είναι η φθηνότερη μονάδα στην αγορά). Ωστόσο, η ευρεστική αυτή μέθοδος *δεν* οδηγεί στη μεγιστοποίηση του κέρδους των παραγωγών, και άρα δεν είναι συνεπής με τα ιδιωτικά τους κίνητρα.

■

Παράρτημα Β: Ροή φορτίου

Ε

Παράρτημα Γ: Λεξικό

Υπάρχει εξειδικευμένη ορολογία στο χώρο της βελτιστοποίησης και των αγορών ηλεκτρικής ενέργειας για την οποία δεν έχει εδραιωθεί συστηματικά μια αντιστοιχία με ελληνικούς όρους. Σε αυτήν την παράγραφο προσφέρουμε μερικές προτάσεις για την αντιστοίχηση ορολογίας.

Πίνακας 14: Λεξικό από αγγλική σε ελληνική ορολογία.

Ορολογία στα Αγγλικά	**Ορολογία στα Ελληνικά**
Aggregator	Φορέας σωρευτικής εκπροσώπησης
At the money	Πάνω στην τιμή
Bid mitigation	Μετριασμός οικονομικών προσφορών
Callable forward contract	Προθεσμιακό συμβόλαιο με επιλογή αγοράς
Call option	Επιλογή αγοράς
Capacity expansion	Επέκταση δυναμικότητας
Capacity market	Αγορά ισχύος
Capacity remuneration mechanism	Μηχανισμός αποζημίωσης ισχύος
Congestion rent	Ενοίκιο συμφόρησης
Constraint qualifications	Προσόντα περιορισμών
Contingency	Απροσδόκητη αστοχία
Contract for differences	Συμβόλαιο διαφορών
Contract path	Διαδρομή συμβολαίων
Cooptimization	Συνβελτιστοποίηση
Day-ahead market	Αγορά επόμενης ημέρας
Default risk	Κίνδυνος αθέτησης
Energy-only market	Αγορά που εμπορεύεται μόνο ενέργεια
Exchange	Χρηματιστήριο με απλά προϊόντα
Extreme point	Ακραίο σημείο
Fast start unit	Μονάδα ταχείας εκκίνησης
Financial transmission right	Χρηματοοικονομικό δικαίωμα μεταφοράς
Forward contract	Προθεσμιακό συμβόλαιο
Futures contract	Τυποποιημένο προθεσμιακό συμβόλαιο
In the money	Μέσα στην τιμή
Independent system operator	Ανεξάρτητος διαχειριστής συστήματος
Left-hand marginal cost	Εξ’αριστερών οριακό κόστος
Load serving entity	Φορέας εκπροσώπησης φορτίου
Locational marginal pricing	Κομβική οριακή τιμολόγηση
Long start unit	Μονάδα βραδείας εκκίνησης
Market power	Δεσπόζουσα θέση
Merit order	Σειρά κατά αξία
Missing money	Ανεπαρκή κέρδη
Out of the money	Έξω από την τιμή
Overnight cost	Εφ‘άπαξ κόστος
Pay as bid auction	Δημοπρασία πληρωμής στην τιμή προσφοράς
Pivot	Στροφή
Pool	Χρηματιστήριο με σύνθετα προϊόντα
Power transfer distribution factors	Συντελεστές διανομής μεταφοράς ισχύος
(Market) price cap	Πλαφόν / ανώτατο όριο τιμής εκκαθάρισης

(Offer) price cap	Πλαφόν / ανώτατο όριο τιμής προσφοράς
Priority service	Εξυπηρέτηση κατά προτεριότητα
Redispatch	Ανακατανομή
Residual unit commitment	Υπολειπόμενη δέσμευση μονάδων
Resource adequacy	Επάρκεια
Revenue adequacy	Επάρκεια εσόδων
Right-hand marginal cost	Εκ δεξιών οριακό κόστος
Scarcity rent	Ενοίκιο σπανιότητας
Screening curves	Καμπύλες διαλογής
Setpoint	Σημείο λειτουργίας
Slack variable	Μεταβλητή χαλάρωσης
Strike price	Τιμή εξάσκησης
Time of use pricing	Νυχτερινό τιμολόγιο
Transmission system operator	Διαχειριστής συστήματος μεταφοράς
Uniform price auction	Δημοπρασία ενιαίας τιμής
Unit commitment	Δέσμευση μονάδων
Valuation	Αποτίμηση
Value of lost load	Αξία χαμένου φορτίου

Βιβλιογραφία

Birge, J. R. & Louveaux, F., 2011. *Introduction to stochastic programming.* s.l.:Springer Science and Business Media.

Boyd, S. & Vandenberghe, L., 2008. *Convex optimization.* s.l.:Cambridge University press.

Fabra, N., 2018. A primer on capacity mechanisms. *Energy Economics,* Τόμος 75, pp. 323-335.

Gedra, T. W. & Varaiya, P. P., 1998. Markets and pricing for interruptible electric power. *IEEE Transactions on power systems,* 8(1), pp. 122-128.

Green, R., 2000. Competition in generation: the economic foundations. *Proceedings of the IEEE,* 88(2), pp. 128-139.

Hogan, W., 2005. *On an "Energy Only" Electricity Market Design for Resource Adequacy,* Cambridge, MA: Harvard University.

Hogan, W. W., 1992. Contract networks for electric power transmission. *Journal of regulatory economics,* 4(3), pp. 211-242.

Kaye, R. J., Outhred, H. R. & Bannister, C. H., 1990. Forward contracts for the operation of an electricity industry under spot pricing. *IEEE Transactions on Power Systems ,* 5(1), pp. 46-52.

Oren, S., 2004. *When is a pay-as-bid preferable to uniform price in electricity markets,* Berkeley, CA: University of California Energy Institute.

Ozdemir, O., 2013. *Simulation Modeling and Optimization of Competitive Electricity Markets and Stochastic Fluid Systems,* Tilburg: Tilburg University, PhD thesis.

Shanker, R., 2003. *Comments on standard market design: Resource adequacy requirements,* Docket RM01-12-000: Federal Energy Regulatory Commission.

Smeers, Y., 1997. Computable equilibrium models and the restructuring of the European electricity and gas markets. *Energy Journal,* 18(4).

Stoft, S., 2002. *Power system economics: designing markets for electricity.* Piscataway: IEEE press.

Vickrey, W., 1961. Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *The Journal of finance,* 16(1), pp. 8-37.