αυτοσυσχέτιση

Παράδειγμα:

$$\left.\begin{aligned} y_t &= \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + u_t, |\beta_1| < 1 \\ u_t &= \rho u_{t-1} + e_t, |\rho| < 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

1) Όχι σύγχρονη εξωγένεια:

$$Cov\left(y_{t-1}, u_t\right) = \rho Cov\left(y_{t-1}, u_{t-1}\right) \neq 0$$

2) Έλλειψη Δυναμικής Πληρότητας:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \rho\left(y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 y_{t-2}\right) + e_t \quad \sim \text{AR(2)}$$

$$E\left(y_t \mid y_{t-1}, y_{t-2}\right) \neq E\left(y_t \mid y_{t-1}\right),$$

(προφανώς, αφού έχουμε δείξει ότι Δ.Π.→Υ5΄)

Έλεγχος για αυτοσυσχέτιση με τη στατιστική t (Ασυμπτωτικός)

Έστω $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \ldots + \beta_k x_{kt} + u_t$,
Γραμμ/τητα (Υ1)

$$E\left(u_t \mid \underline{X}\right) = 0$$

Αυστηρή Εξωγένεια (Υ2)
→ Όχι υστερήσεις της y_t

Πρόσθετες υποθέσεις ***για τα σφάλματα***

$u_t = \rho u_{t-1} + e_t, t = 1,2,\ldots,n$ AR(1) Σφάλματα

$|\rho| < 1$

$E\left(e_t \mid u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots\right) = 0$ (ένα είδος) Εξωγένειας (Υ2)

$Var\left(e_t \mid u_{t-1}\right) = Var\left(e_t\right) = \sigma_e^2$ Ομοσκεδαστικότητα (Υ4)

$$\left\{\begin{array}{l} H_0\text{: Όχι αυτοσυσχέτιση} \leftrightarrow \rho = 0 \\ H_1\text{: Αυτοσυσχέτιση} \leftrightarrow \rho \neq 0 \text{ (ή } \rho > 0 \text{ όταν πιστεύουμε ότι } \rho \geq 0\text{)} \end{array}\right\}$$

Δυσκολία ελέγχου οφείλεται στο ότι τα σφάλματα δεν παρατηρούνται. Όμως:

Ασυμπτωτικά $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} H_0: \rho = 0 \\ H_1: \rho \neq 0 \end{array}\right\}$ στο υπόδειγμα: $\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \zeta_t$

Οπότε μπορούμε να κάνουμε έναν ισοδύναμο έλεγχο σε υπόδειγμα για τα κατάλοιπα (τα οποία παρατηρούνται)

Υπόδειγμα με πεπερασμένο αριθμό υστερήσεων (finite distributed lag):

- $y(t)=\beta(0)+\beta(1)z(t)+\beta(2)z(t-1)+\beta(3)z(t-2)$

~ (FDL 2ου βαθμού)

- $y(t)=\beta(0)+\beta(1)z(t)+\sum_{k=1}^{q}\beta(k+1)z(t-k)$

~ (FDL *q* βαθμού)

Ερμηνεία

παραμέτρων ⇨

Ερμηνεία παραμέτρων (q=2):

i. Συνέπειες προσωρινής μεταβολής z:

$$\left.\begin{array}{c} z(t)=c\forall t\neq t^* \\ z(t^*)=c+1 \\ u(t)=0\forall t \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} y(t^*)-y(t^*-1)=\beta(1) \\ y(t^*+1)-y(t^*-1)=\beta(2) \\ y(t^*+2)-y(t^*-1)=\beta(3) \end{array}\right\}$$

=> *β(k)* μετράει το *αναμενόμενο* αποτέλεσμα της μοναδιαίας προσωρινής μεταβολής του *z(t)* στο *y(t+k-1)* ii: Συνέπειες μόνιμης μεταβολής z

$$\left.\begin{array}{c} z(t) = c \,\forall t < t^* \\ z(t^*) = c+1 \,\forall t \geq t^* \\ u(t) = 0 \,\forall t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y(t^*+l) - y(t^*-1) = \beta(1) + \beta(2) + \beta(3), \\ l \geq 2 \end{array}$$

Άρα (β(1)+β(2)+β(3)) μετράει τον αναμενόμενο *μακροπρόθεσμο* αντίκτυπο στο $y(t)$ ως αποτέλεσμα μιας μοναδιαίας μόνιμης μεταβολής του $z(t)$

iii. Για $\beta(2) = \beta(3) = \ldots = \beta(q) = 0$ έχουμε το στατικό υπόδειγμα (υποπερίπτωση)

Χρήση όταν πιστεύουμε ότι το $z(t)$ επηρεάζει το $y(t+k)$

Παράδειγμα 1: $y(t)$: Βαθμός τεκνοποίησης

$z(t)$: επιδοτήσεις / φοροαπαλλαγές σε οικογένειες με παιδιά

Παράδειγμα 2: $y(t)$: ΑΕΠ

$z(t)$: Δαπάνες επενδύσεων

Διαδικασία ελέγχου:

i. Βρίσκουμε τα κατάλοιπα $\hat{u}_t$ από παλινδρόμηση:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \ldots + \beta_k x_{kt} + u_t$$

ii. Παλινδρομούμε: $\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \zeta_t$, βρίσκοντας $\hat{\rho}, t_{\hat{\rho}}$

iii. Κάνουμε τον έλεγχο

Παρατηρήσεις:

- Οι πρόσθετες υποθέσεις είναι περιοριστικές

- Αν $Corr(u_t,u_{t-1}) = 0$ (αλλά π.χ. $Corr(u_t,u_{t-2}) \neq 0$), ο έλεγχος δεν θα παρατηρήσει υπαρκτή αυτοσυσχέτιση

- Ως ασυμπτωτικός έλεγχος, εφαρμογή για «μεγάλο *n*» σημαίνει ότι όποιες απορρίψεις μπορεί να μην έχουν οικονομική σημασία

Έλεγχος Αυτοσυσχέτισης Durbin-Watson (για μικρά δείγματα)

Η στατιστική *DW* ορίζεται ως:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2}$$

και έχει γνωστή κατανομή υπό ***Υ1-6*** (μειονέκτημα σε σχέση με έλεγχο *t*) ακόμα και σε *μικρά δείγματα* (πλεονέκτημα σε σχέση με έλεγχο *t παραδείγματος καμπύλης Φίλιπς*)

1) Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$DW \approx 2(1-\hat{\rho}) \Rightarrow \begin{cases} \hat{\rho} = 0 \Rightarrow DW \approx 2 \\ \hat{\rho} > 0 \Rightarrow DW < 2 \end{cases}$$

2) (Περίπλοκη) κατανομή στατιστικής *DW* εξαρτάται από:

N, *k*, ύπαρξη σταθερού όρου αλλά **και** ***X***

3) Υπάρχουν όμως *διαστήματα* $[d_L, d_U]$ *ανεξάρτητα* του *X*, τέτοια ώστε:

$DW < d_L$ → Απορρίπτουμε H_0

σε α% επ.σ.σ.

$d_L \leq DW \leq d_U$ → Δεν ξέρουμε

$d_U < DW$ → Δεν απορρίπτουμε

Έλεγχος Αυτοσυσχέτισης χωρίς ΑΕ (πχ y(t-1) στο υπόδειγμα)

i. Βρίσκουμε τα κατάλοιπα $\hat{u}_t$ από παλινδρόμηση:

$$y_t = \beta' \underline{x}_t + u_t \quad \text{(με υστερήσεις όλων των μεταβλητών)}$$

ii. Παλινδρομούμε: $\hat{u}_t = \gamma' x_t + \rho \hat{u}_{t-1} + \zeta_t$ βρίσκοντας $\hat{\rho}, t_{\hat{\rho}}$

• Η στατιστική $t_{\hat{\rho}}$ έχει ασυμπτωτικά κατανομή *t* ακόμη και όταν (όχι ΑΕ-*Y2*) $Cov(x_{jt}, u_{t-1}) \neq 0$

• Συμπεριλαμβάνοντας $\gamma' x_t$ λαμβάνουμε υπ΄όψιν ότι $Cov(x_{jt}, u_{t-1}) \neq 0$ πράγμα που δε γίνεται με τον απλό έλεγχο βάση της στατιστικής *t*

• Πρέπει όμως να υποθέσουμε ότι $Var(u_t | x_t, u_{t-1})$=σ^2

Έλεγχος Αυτοσυσχέτισης υψηλότερου βαθμού

Προσέγγιση: Γενίκευση ελέγχων πρώτου βαθμού

Υποθέσεις:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \ldots \rho_q u_{t-q} + e_t, t = 1,2,\ldots,n$$

$$\left|\Sigma \rho_\iota\right| < 1$$

$$E(e_t \mid u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots) = 0$$

$$Var(e_t \mid u_{t-1}) = Var(e_t) = \sigma_e^2$$

$$Var(u_t \mid x_t, u_{t-1}, \ldots, u_{t-q}) = \sigma_u^2$$

H_0: Όχι αυτοσυσχέτιση $\leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_q = 0$

H_1: Αυτοσυσχέτιση $\leftrightarrow \rho_i \neq 0$ (για κάποιο i)

Διαδικασία ελέγχου

i. Βρίσκουμε τα κατάλοιπα $\hat{u}_t$ από παλινδρόμηση:

$$y_t = \beta' \underline{x}_t + u_t$$ (με επιθυμητές υστερήσεις μεταβλητών)

ii. Παλινδρομούμε:

$$\hat{u}_t = \gamma' x_t + \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \ldots + \rho_q \hat{u}_{t-q} + \zeta_t$$

Υπολογίζοντας **στατιστική *F*** για από κοινού σ.σ. ρ_i

• Η στατιστική θα έχει την επιθυμητή κατανομή *ασυμπτωτικά* ακόμη και χωρίς ΑΕ-*Υ2*

• Αν ισχύει ΑΕ-*Υ2* μπορούμε να μην συμπεριλάβουμε $\gamma' x_t$

Εναλλακτικά, χρησιμοποιούμε ότι ασυμπτωτικά:

$LM = (n\text{-}q)\, R^2_u \sim \chi^2_q$ **Έλεγχος Breusch - Godfrey**

Διορθώσεις αυτοσυσχέτισης με Αυστηρή Εξωγένεια

- Αν στόχος είναι ένα ***δυναμικά πλήρες υπόδειγμα***, πρέπει να επαναπροσδιοριστεί συνολικά

- Αν στόχος είναι ***επαγωγή*** για παραμέτρους υποδείγματος με αυστηρή εξωγένεια, υπάρχουν πιο απλές λύσεις

BLUE Εκτιμήσεις με AR(1) σφάλματα

- Υ1-4
- Αντί για Υ5: $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$

$\Rightarrow y_t - \rho\, y_{t-1} = (1-\rho)\beta_0 + \beta_1(x_t - \rho\, x_{t-1}) + e_t$

$\Rightarrow y^*_t = (1-\rho)\beta_0 + \beta_1 x^*_t + e_t$, $\boldsymbol{t > 1}$

$y^*_{t,} = y_{t,} - \rho\, y_{t-1,}, x^*_t = x_t - \rho\, x_{t-1,}$ *ημιδιαφορισμένες παρατηρήσεις (quasi-differenced data)*

$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u_1$

$Cov(u_1, e_t) = 0$

Όμως $Var(u_1) = \sigma^2/(1-\rho^2) > \sigma^2 = Var(e_t)$

Οπότε ορίζουμε $y^*_1 = (1-\rho^2)^{0.5}\, y_1$,

$x^*_1 = (1-\rho^2)^{0.5}\, x_{1,}$

$u^*_1 = (1-\rho^2)^{0.5}\, u_{1,}$

Χρησιμοποιώντας:

$y^*_t = (1\text{-}\rho)\beta_0 + \beta_1 x^*_t + e_t$, t>=1

Έχουμε:

- ΕΕΤ σε αυτή την παλινδρόμηση ⇔ Γενικευμένο Εκτιμητή Ελαχίστων Τετραγώνων στην αρχική (GLS)
- Υ1-5 για την νέα παλινδρόμηση
- Επαγωγή μπορεί να γίνει
- ΓΕΕΤ είναι BLUE (μετασχηματισμός διατηρεί γραμμικότητα)

Εφικτός ΓΕΕΤ

- Το ρ γενικά **δεν είναι γνωστό**

- Μπορεί όμως να αντικατασταθεί στον ΓΕΕΤ από μια συνεπή εκτίμηση

Διαδικασία Εφικτής ΓΕΕΤ

1) Παλινδρόμηση με ΕΕΤ για προσδιορισμό καταλοίπων
2) Παλινδρόμηση σε κατάλοιπα για εκτίμηση ρ
3) Εκτίμηση ΓΕΕΤ βασισμένη σε *εκτίμηση* για ρ

Ως αποτέλεσμα των σφαλμάτων εκτίμησης του ρ

- Ο Εφικτός ΓΕΕΤ μπορεί να είναι μεροληπτικός
- **Ασυμπτωτικά** επαγωγή γίνεται κανονικά
- Εφικτός ΓΕΕΤ **ασυμπτωτικά** αποτελεσματικότερος από OLS

Παραλλαγές διαδικασίας

- Επέκταση:

4) Επιστρέφουμε στο βήμα 2 όπου χρησιμοποιούμε τώρα τα κατάλοιπα από ΕΓΕΕΤ

Οι επιπτώσεις αυτής της επέκτασης δεν είναι γνωστές

- Cochrane-Orcutt (χωρίς την πρώτη παρατήρηση)

- Prais-Winsten (με)

Σύγκριση ΕΕΤ και ΕΓΕΕΤ

Σύγκριση ΕΕΤ και ΕΓΕΕΤ

- ΕΓΕΕΤ απαιτεί Υ1'-4' ***και*** ότι Cov(x_{t-1}+x_{t+1} , u_t)=0

Πχ ρ γνωστό, εκτίμηση Cochrane-Orcutt απαιτεί σύγχρονη εξωγένεια μετασχηματισμένων δεδομένων

Σύγχρονη εξωγένεια στην μετασχηματισνένη παλινδρ.

$\Rightarrow$ E[(x_t-ρx_{t-1})($u_t - \rho u_{t-1}$)] = 0

$\Rightarrow$ -ρ[E($x_{t-1}u_t$)+ E($x_t u_{t-1}$)] = 0

$\Rightarrow$ E [(x_{t-1}+x_{t+1}) u_t]=0

Η επιπλέον υπόθεση μπορεί να παραβιάζεται

Οπότε και οι ΕΕΤ μπορεί να είναι προτιμητέες

Παράδειγμα 12.5 (Παράδειγμα 10.1): Καμπύλη Phillips

y: πληθωρισμός
x: ανεργία

- ΗΠΑ ετήσια στοιχεία (1948-1996)

Με Ε.Ε.Τ καταλήγουμε στο υπόδειγμα:

$$\widehat{\text{ΠΛΗΘ}(t)} = \underset{(1.72)}{1.42} + \underset{(0.289)}{0.468}\text{ΑΝ}(t)$$

CO	**7.58**	**-.665**	*Αποτελέσματα πολύ πιο*
	(2.38)	**(.320)**	*θεωρητικά βάσιμα*

n = 49, R^2= 0.053, R^2= 0.033

n = 48, R^2= 0.086, ρ^= .774 (.091)

Διαφόριση και Αυτοσυσχέτιση

→ Συχνά η διαφόριση μειώνει δραστικά την αυτοσυσχέτιση

Π.χ.

$$\left.\begin{array}{l} y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t, t = 1,2,\ldots \\ u_t = \rho u_{t-1} + e_t, \rho \approx 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta y_t = \beta_1 \Delta x_t + \Delta u_t$$

$$\Delta u_t = (\rho - 1)\Delta u_{t-1} + \Delta e_t, (\rho - 1) \approx 0$$

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΠΛΗΡΗ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ (Δ.Π.)

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΠΛΗΡΗ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ (Δ.Π.)

Το υπόδειγμα:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \ldots + \beta_k x_{kt} + u_t$$

x_t συμπεριλαμβάνει y_{t-j}, z_{t-l}

είναι Δ.Π. αν:

$$E(u_t \mid z_t, y_{t-1}, z_{1t-1}, \ldots) = 0$$

$$\Leftrightarrow E(y_t \mid z_t, y_{t-1}, z_{1t-1}, \ldots) = E(y_t \mid x_t, x_{t-1}, \ldots) = E(y_t \mid x_t)$$

Ερμηνεία έννοιας:

1. Επιπλέον υστερήσεις είναι άχρηστες

2. $$\Delta.\Pi. \Rightarrow E(u_t \mid z_t, y_{t-1}, z_{1t-1}, \ldots) = 0$$

$$\Rightarrow E(u_t \mid x_t, u_{t-1}, x_{t-1}, u_{t-2}, \ldots) = 0$$

$$\Rightarrow E(u_t \mid x_t, x_s, u_s) = 0 \forall s < t$$

$$\Rightarrow E(u_s E(u_t \mid x_t, x_s, u_s) \mid x_t, x_s) = 0 \forall s < t$$

$$\Rightarrow E(E(u_t u_s \mid x_t, x_s, u_s) \mid x_t, x_s) = 0 \forall s < t$$

$$\Rightarrow E(u_t u_s \mid x_t, x_s) = 0 \forall s < t$$

$$\Rightarrow \text{Υ5' ισχύει}$$

$$\text{όμως Υ5' δεν} \Rightarrow \Delta.\Pi.$$

Παράδειγμα (από κεφάλαιο 12)

$$\left.\begin{aligned} y_t &= \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + u_t, |\beta_1| < 1 \\ u_t &= \rho u_{t-1} + e_t, |\rho| < 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

1) Όχι σύγχρονη εξωγένεια:

$$Cov(y_{t-1}, u_t) = \rho Cov(y_{t-1}, u_{t-1}) \neq 0$$

2) Έλλειψη Δυναμικής Πληρότητας:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \rho(y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 y_{t-2}) + e_t \quad \sim AR(2)$$

$$E(y_t \mid y_{t-1}, y_{t-2}) \neq E(y_t \mid y_{t-1}) \quad ,$$

(προφανώς, αφού έχουμε δείξει ότι Δ.Π.→Υ5΄)