1.ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Και τα τρία θεωρήματα που ακολουθούν αναφέρονται στο κανονικό πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{normal form}\\ \max\ f(z), \text{subject to}\\ g_1(z)\geq 0, g_2(z)\geq 0, g_m(z)\geq 0\\ z\geq 0\end{array}} \tag{1}$$

Το **εφικτό σύνολο** του προβλήματος (1) είναι το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς, δηλαδή το σύνολο

$$S=\{z\in\mathbb{R}^n : g_1(z)\geq 0, g_2(z)\geq 0, g_m(z)\geq 0, z\geq 0\} \tag{2}$$

Η συνάρτηση f ονομάζεται **συνάρτηση στόχου**. Η συνάρτηση

$$L(z,\lambda)=\lambda_0 f(z)+\lambda_1 g_1(z)+\lambda_2 g_2(z)+\ldots+\lambda_m g_m(z) \tag{3}$$

ονομάζεται **λαγρανζιανη συνάρτηση** του προβλήματος μεγιστοποίησης (1)

ΥΠΑΡΞΗ ΛΥΣΕΩΝ(WEIERSTRASS) Εάν η συνάρτηση στόχου είναι συνεχής και το εφικτό σύνολο είναι μη κενό, κλειστό και φραγμένο ,τότε υπάρχει ολικό μέγιστο.

ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ (FRITZ JOHN)

Εάν οι συναρτήσεις $f, g_1,..,g_m$ είναι συνεχώς παραγωγισιμες στο τοπικό μέγιστο $z^*\in R^n$,τότε υπάρχουν αριθμοί $\lambda_0^*,\lambda_1^*,...,\lambda_m^*$ τέτοιοι ώστε

$$\boxed{\begin{array}{ll}\multicolumn{2}{l}{\text{for each variable i=1,..,n,for each constraint j=1,..,m}}\\[2ex] \dfrac{\partial L(z^*,\lambda^*)}{\partial z_i}\leq 0, & z_i^*\dfrac{\partial L(z^*,\lambda^*)}{\partial z_i}=0\\[3ex] \dfrac{\partial L(z^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_j}\geq 0, & \lambda_j^*\dfrac{\partial L(z^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_j}=0\\[3ex] z_i^*\geq 0, & \lambda_j^*\geq 0\\[2ex] \multicolumn{2}{l}{\text{either } \lambda_0^*=0 \text{ or } \lambda_0^*=1}\\[2ex] \multicolumn{2}{l}{\lambda_j^*>0 \text{ for some } j\in\{0,1,2,..m\}}\end{array}} \tag{4}$$

- εάν συμβεί οι συνθήκες κατά fritz john να ικανοποιούνται με $\lambda_0^* = 1$ τότε είναι ίδιες με τις συνθήκες κατά kuhn-tucker.
- οι λυσεις των αναγκαιων συνθηκων ειναι μονο υποψηφια τοπικα μεγιστα Η σχεση των τοπικων μεγιστων και των λυσεων των αναγκαιων συνθηκων,οπως προκυπτει απο το θεωρημα,ειναι

ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ (ARROW-ENTHOVEN)

Έστω $\left(\bar{x}, \lambda_0 = 1, \lambda_1, .., \lambda_m\right)$ λύση των αναγκαίων συνθηκών (4).

Εάν οι συναρτήσεις $f, g_1, .., g_m$ είναι συνεχώς παραγωγισιμες στο $\bar{x}$,και

$\boxed{1}$. το εφικτό σύνολο είναι κυρτό και

$\boxed{2}$.η συνάρτηση στόχου είναι οιονει κοίλη

και είτε

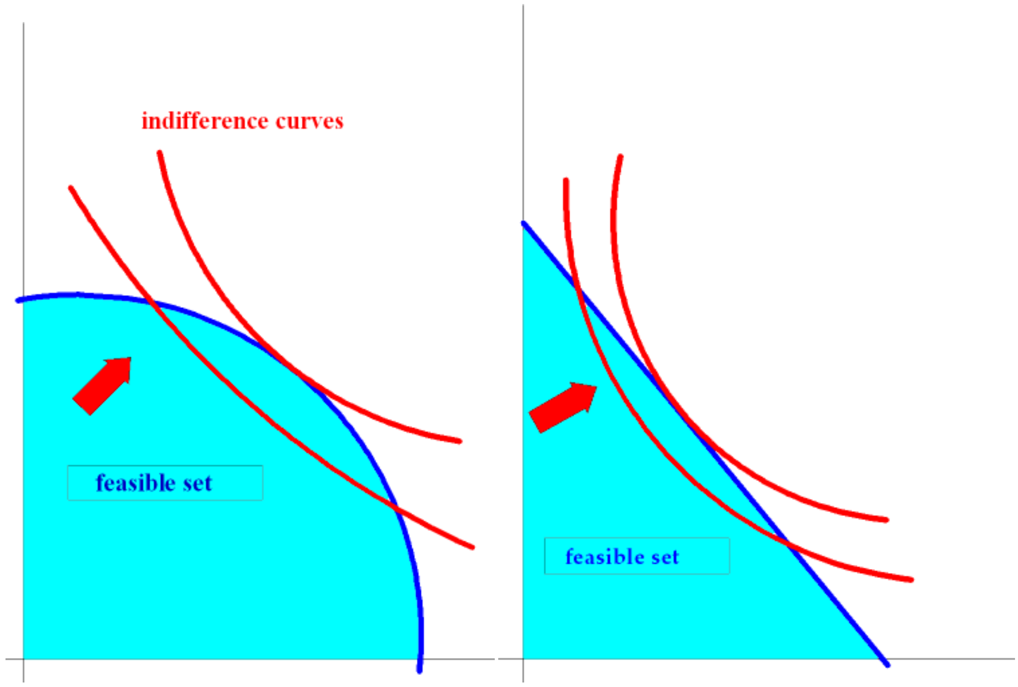
$\boxed{3Α}$ η συνάρτηση στόχου είναι κοίλη

Είτε

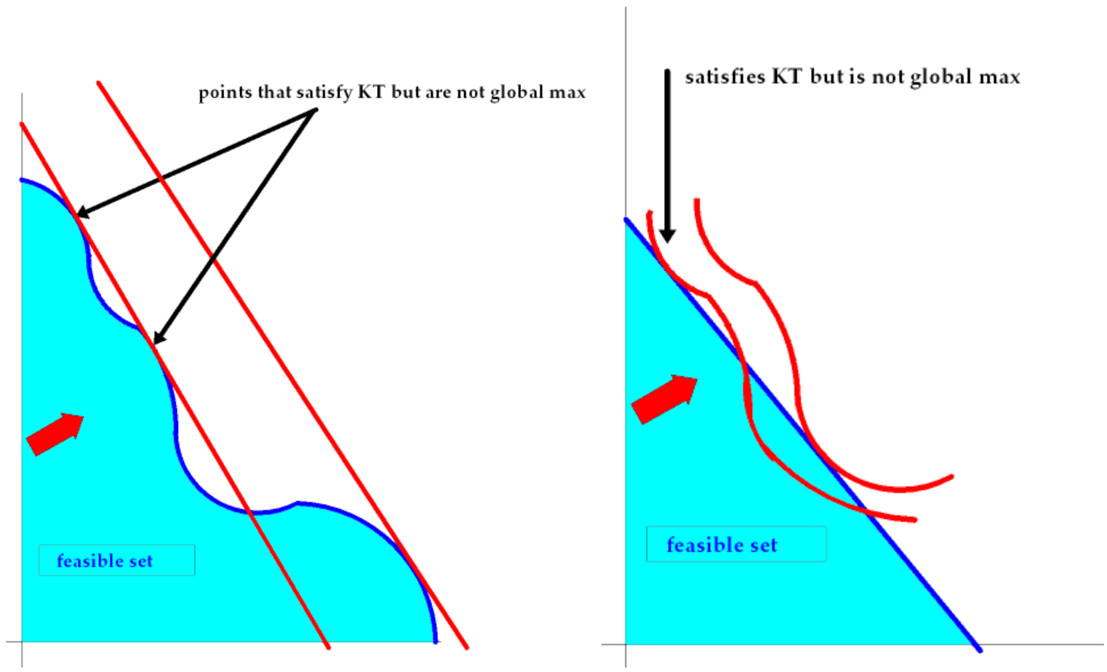
$\boxed{3Β}$ $f'(\bar{x}) \neq 0$

τότε το σημείο $\bar{x}$ είναι ολικό μέγιστο.

οι υποθέσεις arrow-enthoven αναπαράγουν τα τυπικά διαγράμματα μεγιστοποίησης, όπως



και αποκλειουν περιπτωσεις οπως



2.ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΛΥΣΗΣ

ΒΗΜΑ 1   αναγωγή σε κανονική μορφη

Αρχικη μορφη	Κανονικη μορφη

• $A(z) \le B(z)$	$B(z) - A(z) \ge 0$
• $h(z) = 0$	$h(z) \ge 0, -h(z) \ge 0$
• $h(z) = 0 \text{ or } \mathrm{w}(z) = 0$	$h(z)\mathrm{w}(z) = 0$
• $x_i \in \mathbb{Z}$	$\sin(\pi x_i) = 0$
• $\min f(z)$	$\max(-f(z))$
• Εάν για κάποια μεταβλητή w λείπει ο περιορισμός $w \ge 0$,τότε	εισάγουμε δυο νέες μεταβλητές $w1 \ge 0, w2 \ge 0$,αντικαθιστούμε το w με τη διαφορά $w1 - w2$
• Ένα σύστημα εξισώσεων $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \ldots, f_k(x) = 0, x \in R^n$	Ανάγεται στο $\min \sum_{i=1..k} (f_i(x))^2, x \in R^n$

ΒΗΜΑ 2 λαγρανζιανη του προβλήματος σε κανονική μορφη

$$L(z, \lambda) = \lambda_0 f(z) + \lambda_1 g_1(z) + \lambda_2 g_2(z) + \ldots + \lambda_m g_m(z)$$

- οι περιορισμοί $z \ge 0$ δεν εισάγονται στην λαγρανζιανη. Το λ_j είναι ο πολλαπλασιαστής που αντιστοιχεί στον περιορισμό $g_j(z) \ge 0$

ΒΗΜΑ3 ευρεση μιας η περισσοτερων λυσεων των αναγκαιων συνθηκων με τη χρηση της διαδικασιας αναζητησης **<u>υποθεση-λυση-ελεγχος(the cookbook procedure)</u>**

- Αν πληρουνται οι ικανες συνθηκες,τοτε η πρωτη τετοια λυση που θα βρεθει ειναι και ολικο μεγιστο.
- Αν δεν πληρουνται οι ικανες συνθηκες αλλα πληρουνται οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης,τοτε αφου βρεθουν <u>ολες</u> οι λυσεις των αναγκαιων συνθηκων,η καλυτερη απο αυτες τις λυσεις(κατα τη συναρτηση στοχου) ειναι και ολικο μεγιστο.
- Αν δεν πληρουνται ουτε οι ικανες συνθηκες αλλα ουτε και οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης,τοτε θα πρεπει να χρησιμοποιηθουν μεθοδοι ειδικες για το ανα χειρας προβλημα.
- Αν υπαρχουν σημεια ασυνεχειας,τοτε πρεπει να εξεταστουν χωριστα,και οι τιμες της συναρτησης στοχου στα σημεια αυτα να συγκριθουν με τις τιμες της στις λυσεις των αναγκαιων συνθηκων

διαδικασια αναζητησης 'υποθεση-λυση-ελεγχος'

Η ΥΠΟΘΕΣΗ ειναι μια εικασια για τη μορφη της λυσης των αναγκαιων συνθηκων,δηλαδη για το ποιες απο τις αναγκαιες συνθηκες θα ισχυσουν με ισοτητα στη λυση,και για το αν ο πολλαπλασιαστης της συναρτησης στοχου θα ειναι 0 η 1.

- Καθε υποθεση της μορφης $z_i > 0$ συνεπαγεται την εξισωση $\dfrac{\partial L(z,\lambda)}{\partial z_i} = 0$
- Καθε υποθεση της μορφης $\dfrac{\partial L(z,\lambda)}{\partial z_i} < 0$ συνεπαγεται την εξισωση $z_i = 0$
- Καθε υποθεση της μορφης $g_j(z) > 0$ συνεπαγεται την εξισωση $\lambda_j = 0$
- Καθε υποθεση της μορφης $\lambda_j > 0$ συνεπαγεται την εξισωση $g_j(z) = 0$

Η ΛΥΣΗ ειναι μια ακολουθια απλων εξισωσεων της μορφης $z_i = \alpha_i, \lambda_j = \beta_j$,οπου τα δεξια μερη δεν περιεχουν μεταβλητες η πολλαπλασιαστες, και ικανοποιουν τις εξισωσεις που προκυπτουν απο την υποθεση.Αποτελει μια εικασια για την λυση των αναγκαιων συνθηκων.

Ο ΕΛΕΓΧΟΣ αφορα τις ανισωσεις των αναγκαιων συνθηκων και της υποθεσης

- εαν η λυση $z_i = \alpha_i, \lambda_j = \beta_j$ ικανοποιει τις ανισωσεις της υποθεσης και των αναγκαιων συνθηκων,τοτε ειναι και λυση των αναγκαιων συνθηκων
- εαν οχι,τοτε η διαδικασια ξαναρχιζει με διαφορετικη υποθεση
- Εαν στο προβλημα υπαρχουν παραμετροι,τοτε η διαδικασια ξαναρχιζει με διαφορετικη υποθεση μεχρις οτου βρεθουν λυσεις για ολες τις δυνατες τιμες των παραμετρων.
- η διαδικασια αυτη ανακαλυπτει **μια απο** τις λυσεις του προβληματος μεγιστοποιησης,εαν αυτη υπαρχει.Εαν θελουμε ολες τις λυσεις,πρεπει να βρουμε ολες τις λυσεις των αναγκαιων συνθηκων για ολες τις δυνατες τιμες των παραμετρων
- η διαδικασια,στη χειροτερη περιπτωση,απαιτει να εξετασουμε 2^n υποθεσεις.

3.ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

παράδειγμα 1

χρηση των θεωρηματων αναγκαιων και ικανων συνθηκων,μια μεταβλητη

Να επιλυθει το προβλημα $\max \Pi(x) = px - C(x), \text{subject to } x \geq 0$

στις ακολουθες τρεις περιπτωσεις

- φθινουσες αποδοσεις κλιμακος $C(x) = x + \dfrac{x^2}{2}$
- σταθερες αποδοσεις κλιμακος $C(x) = x$

- αυξουσες αποδοσεις κλιμακος $C(x) = x + 2\sqrt{x}$

Σε ολες τις περιπτωσεις η μεταβλητη ειναι το x ,και η παραμετρος p ειναι θετικος αριθμος. ◊

- Σε ολες τις περιπτωσεις ισχυει $\lambda_0 = 1$(δεν υπαρχει αλλος πολλαπλασιαστης)

Περιπτωση 1 $\max \Pi(x) = px - x - \frac{x^2}{2}$, subject to $x \geq 0$

- Οι ικανες συνθηκες πληρουνται (η συναρτηση στοχου ειναι κοιλη)
- Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης δεν ικανοποιουνται(το εφικτο συνολο δεν ειναι φραγμενο)
- Η λαγρανζιανη ειναι η συναρτηση στοχου,η οποια ειναι παραγωγισιμη,αρα καθε υποψηφιο τοπικο μεγιστο πρεπει να ικανοποιει τις αναγκαιες συνθηκες,δηλαδη

$$\frac{\partial \Pi(x)}{\partial x} = p - 1 - x \leq 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \Pi(x)}{\partial x} x = \left(p - 1 - x\right) x = 0 \tag{6}$$

διαδικασια αναζητησης 'υποθεση-λυση-ελεγχος'

υποθεση $x > 0$

Λυση απο την υποθεση και την (6), $x = p - 1$

Ελεγχος η ανισοτητα $x > 0$ ικανοποιειται οταν $p > 1$ (συνθηκη επι των παραμετρων).

Επειδη οι ικανες συνθηκες πληρουνται,εχουμε βρει το ολικο μεγιστο στην περιπτωση $p > 1$

$$\text{global maximum} \\ x = \begin{cases} p - 1 & \text{if } \; p > 1 \\ ? & \text{if } \; p \leq 1 \end{cases} \tag{7}$$

Μενει η αλλη περιπτωση για την παραμετρο($p \leq 1$). ξαναρχιζουμε τη διαδικασια 'υποθεση-λυση-ελεγχος' με μια διαφορετικη υποθεση

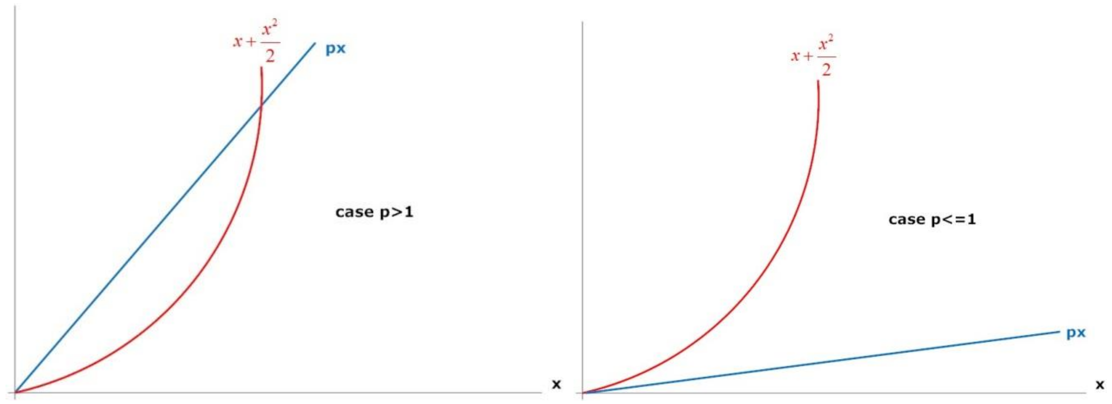
υποθεση $x = 0$

Λυση απο την υποθεση και την (5), $p \leq 1$ (συνθηκη επι των παραμετρων).

<u>Ελεγχος</u> ολες οι ανισοτητες ικανοποιουνται

Επειδη οι ικανες συνθηκες πληρουνται,εχουμε βρει το ολικο μεγιστο στην περιπτωση $p \le 1$,δηλαδη,μαζι με την(7),εχουμε

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{global maximum}\\ x=\begin{cases} p-1 & \text{if} \quad p>1 \\ 0 & \text{if} \quad p\le 1\end{cases}\end{array}} \tag{8}$$



Περιπτωση 2 $\max \Pi(x)=(p-1)x, \text{subject to } \ x\ge 0$

- Οι ικανες συνθηκες πληρουνται (η συναρτηση στοχου ειναι κοιλη)
- Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης δεν ικανοποιουνται(το εφικτο συνολο δεν εινα φραγμενο)
- Η λαγρανζιανη ειναι η συναρτηση στοχου,η οποια ειναι παραγωγισιμη,αρα καθε υποψηφιο τοπικο μεγιστο πρεπει να ικανοποιει τις αναγκαιες συνθηκες,δηλαδη

$$\frac{\partial \Pi(x)}{\partial x}=p-1\le 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \Pi(x)}{\partial x}x=(p-1)x=0 \tag{10}$$

- Παρατηρουμε οτι η αναγκαια συνθηκη (9) ειναι **συνθηκη επι των παραμετρων.** Συμπεραινουμε οτι

$$\begin{array}{l}\text{global maximum}\\ x=\begin{cases} \text{no solution exists} & \text{if} \quad p>1 \\ ? & \text{if} \quad p\le 1\end{cases}\end{array} \tag{11}$$

και περιοριζομαστε στην αλλη περιπτωση $p\le 1$.

<u>διαδικασια αναζητησης ‘υποθεση-λυση-ελεγχος’</u>

<u>υποθεση</u> $x>0$

<u>Λυση</u> απο την υποθεση και την (10), $p=1$ (συνθηκη επι των παραμετρων).

<u>Ελεγχος</u> ολες οι ανισοτητες ικανοποιουνται.

Επειδη οι ικανες συνθηκες πληρουνται,εχουμε βρει το ολικο μεγιστο στην περιπτωση $p=1$

$$\text{global maximum}\quad x=\begin{cases}\text{no solution exists} & \text{if} \quad p>1\\ \text{any positive number} & \text{if} \quad p=1\\ ? & if \quad p<1\end{cases} \tag{12}$$

Μενει η αλλη περιπτωση για την παραμετρο($p<1$). Ξαναρχιζουμε τη διαδικασια ‘υποθεση-λυση-ελεγχος’ με μια διαφορετικη υποθεση

<u>υποθεση</u> $x=0$

<u>Λυση</u> δεν προκυπτει κατι παραπανω απο τις (9),(10)

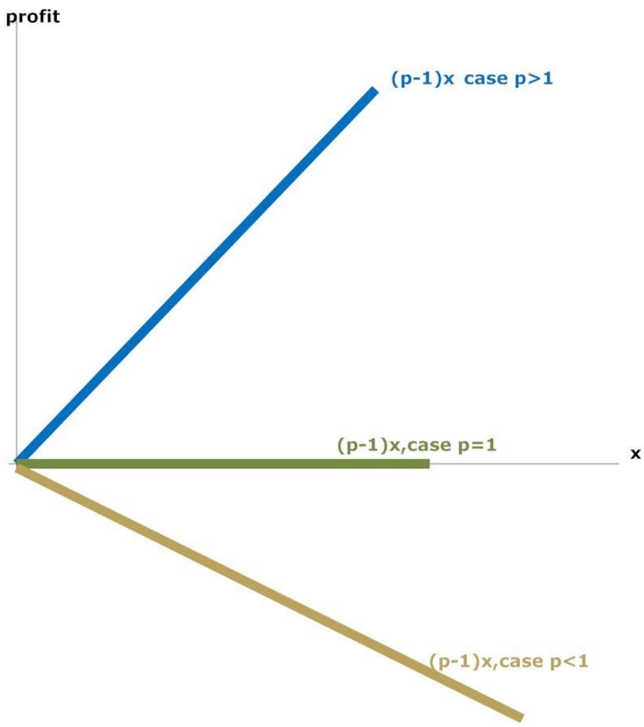
<u>Ελεγχος</u> ολες οι ανισοτητες ικανοποιουνται

Επειδη οι ικανες συνθηκες πληρουνται,εχουμε βρει το ολικο μεγιστο στην περιπτωση $p\le 1$**,**

$$\text{global maximum}\quad x=\begin{cases}\text{no solution exists} & \text{if} \quad p>1\\ \text{any positive number} & \text{if} \quad p=1\\ 0 & \text{if} \quad p<1\end{cases} \tag{13}$$

- Παρατηρουμε οτι στην περιπτωση $p=1$ υπαρχει και η λυση $x=0$.Καταληγουμε στην τελικη μορφη της λυσης

$$\boxed{\text{global maximum}\quad x=\begin{cases}\text{no solution exists} & \text{if} \quad p>1\\ \ge 0 & \text{if} \quad p=1\\ 0 & if \quad p<1\end{cases}} \tag{14}$$

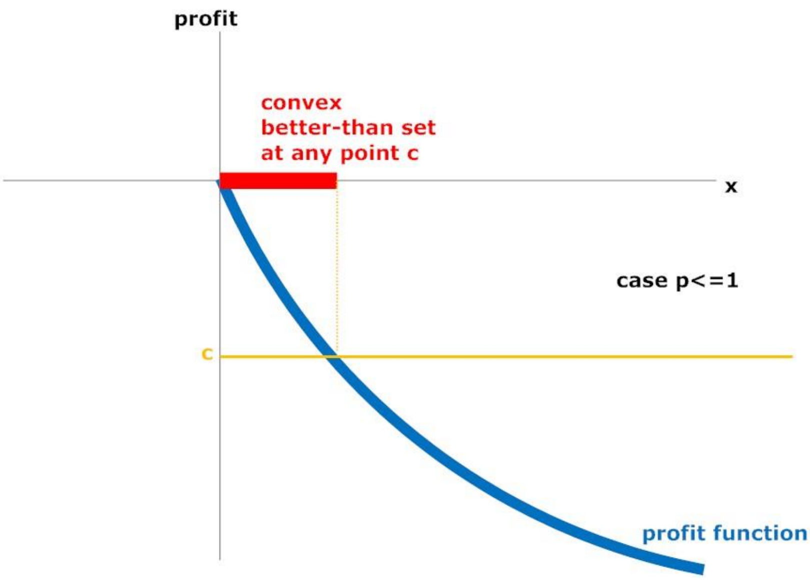


Περιπτωση *3* $\max \Pi(x) = (p-1)x - 2\sqrt{x}$, subject to $x \geq 0$

- Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης δεν ικανοποιουνται(το εφικτο συνολο δεν εινα φραγμενο)
- Η συναρτηση στοχου ειναι παραγωγισιμη παντου εκτος απο το σημειο $x = 0$,και

$$\Pi'(x) = p - 1 - x^{-\frac{1}{2}}, \Pi''(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} > 0, \forall x > 0$$

- Οι ικανες συνθηκες πληρουνται οταν $p \leq 1$,γιατι τοτε η συναρτηση στοχου ειναι φθινουσα (αρα οιονει κοιλη),και $\frac{\partial \Pi(x)}{\partial x} < 0, \forall x$

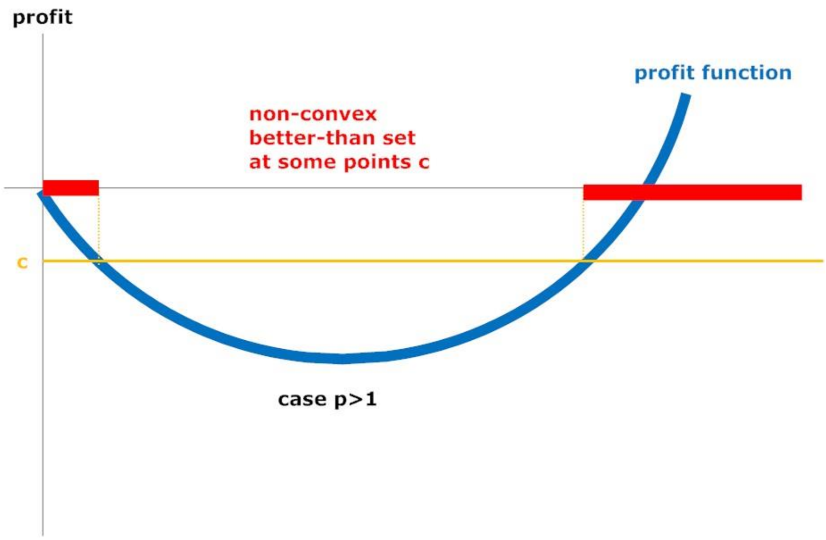


- Παρατηρουμε οτι $\Pi(x) < 0 = \Pi(0), \forall x > 0$, αρα

$$\overset{\text{global maximum}}{x} = \begin{cases} ? & \text{if} \quad p > 1 \\ 0 & if \quad p \leq 1 \end{cases} \tag{15}$$

Μενει η αλλη περιπτωση για την παραμετρο($p > 1$)

- Οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται οταν $p > 1$, γιατι τοτε η συναρτηση στοχου δεν ειναι οιονει κοιλη



- Παρατηρουμε οτι εαν υπαρχει θετικο ολικο μεγιστο $x > 0$,τοτε απο τις αναγκαιες συνθηκες $\frac{\partial \Pi(x)}{\partial x} = p - 1 - x^{-\frac{1}{2}} = 0$,συναγουμε οτι $x = \left(p-1\right)^{-2}$ Συγκρινουμε τις τιμες της συναρτησης στοχου στα σημεια $x = \left(p-1\right)^{-2}, x = 0$ και βρισκουμε οτι $\Pi(\left(p-1\right)^{-2}) = -\left(p-1\right)^{-1} < 0 = \Pi(0)$,αρα κανενα θετικος αριθμος δεν ειναι ολικο μεγιστο,και αρα εχουμε

$$\overset{\text{global maximum}}{x} = \begin{cases} 0 \text{ or no solution exists} & \text{if} \quad p > 1 \\ 0 & if \quad p \leq 1 \end{cases} \tag{16}$$

- Παρατηρουμε οτι $\Pi(x) = \sqrt{x}\left[\left(p-1\right)\sqrt{x} - 2\right] > 0 = \Pi(0), \forall x > \frac{4}{\left(p-1\right)^2}$. Αρα το 0 δεν ειναι ολικο μεγιστο,και αρα κατα την (16)

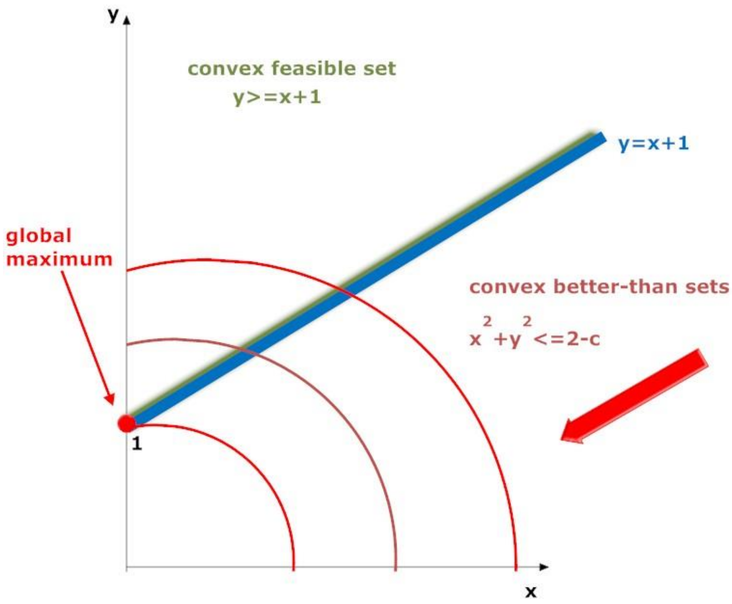
$$\text{global maximum} \quad x = \begin{cases} \text{no solution exists} & \text{if} \quad p > 1 \\ 0 & \text{if} \quad p \le 1 \end{cases} \qquad (17)$$

παραδειγμα 2

χρηση των θεωρηματων αναγκαιων και ικανων συνθηκων,δυο μεταβλητες

Να επιλυθει το προβλημα $\max f = 2 - x^2 - y^2$, subject to $y \ge x+1, x \ge 0, y \ge 0$

- Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης δεν ικανοποιουνται.Το εφικτο συνολο δεν ειναι φραγμενο,διοτι περιλαμβανει την ακολουθια $(x_n, y_n) = (n, n+1), n = 1, 2, ..$
- Οι ικανες συνθηκες πληρουνται.Η συναρτηση στοχου ειναι κοιλη,και το εφικτο συνολο ειναι κυρτο.



- Η λαγρανζιανη $L = \mu(2 - x^2 - y^2) + \lambda\ (y - x - 1)$ ειναι παραγωγισιμη,αρα καθε υποψηφιο τοπικο μεγιστο πρεπει να ικανοποιει τις αναγκαιες συνθηκες,δηλαδη

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2\mu x - \lambda \le 0 \qquad (18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} x = (-2\mu x - \lambda) x = 0 \qquad (19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2\mu y + \lambda \le 0 \qquad (20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} y = (-2\mu y + \lambda) y = 0 \qquad (21)$$

$$y-x-1\geq 0 \tag{22}$$

$$\lambda\ (y-x-1)=0 \tag{23}$$

$$x,y,\lambda\geq 0,\mu\in\{0,1\},\mu=0\ \Rightarrow\ \lambda>0,\lambda=0\Rightarrow\mu>0 \tag{24}$$

διαδικασια αναζητησης 'υποθεση-λυση-ελεγχος'

υποθεση $x>0,\mu=1$

Λυση απο την υποθεση και την (18), $-2x-\lambda=0$.αρα $2x+\lambda=0$,και απο την (24) $x=\lambda=0$

Ελεγχος η ανισοτητα $x>0$ παραβιαζεται.

υποθεση $x=0,\mu=1,\lambda>0,y>0$

Λυση απο την υποθεση και τις αναγκαιες συνθηκες $y=1,x=0,\lambda=2$

Ελεγχος ολες οι ανισοτητες ικανοποιουνται.

Επειδη οι ικανες συνθηκες πληρουνται,εχουμε βρει το ολικο μεγιστο($y=1,x=0$).

παραδειγμα 3

μετασχηματισμος σε προβλημα που ικανοποιει τις ικανες συνθηκες

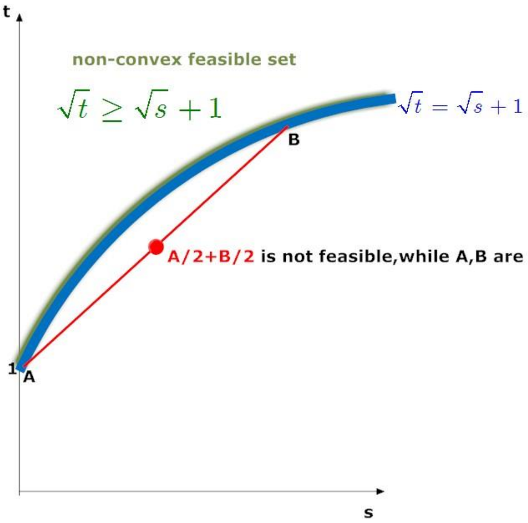
Να επιλυθει το προβλημα $\max f=2-s-t,\text{subject to }\sqrt{t}\geq\sqrt{s}+1,s\geq 0,t\geq 0$

- Οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται.Το εφικτο συνολο δεν ειναι κυρτο,διοτι ενω περιλαμβανει τα σημεια

  $$A=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$

  ΔΕΝ περιλαμβανει τονκυρτο συνδυασμο τους

  $$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$$

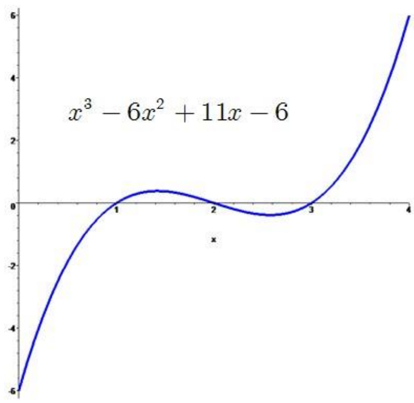


Σε ορισμενες περιπτωσεις ,σαν αυτου του παραδειγματος,μπορουμε να μετασχηματισουμε το προβλημα σε ενα ισοδυναμο προβλημα το οποιο ικανοποιει τις ικανες συνθηκες.Εισαγουμε νεες μεταβλητες $x=\sqrt{s}, y=\sqrt{t}$,οποτε $s=x^2, t=y^2$
Το προβλημα εκφρασμενο με τις νεες μεταβλητες ειναι
$\max f = 2-x^2-y^2, \text{subject to } y \geq x+1, x \geq 0, y \geq 0$.Αυτο ειναι το παραδειγμα 2,αρα το ολικο μεγιστο του αρχικου προβληματος ειναι $s=x^2=0, t=y^2=1$

παραδειγμα 4

χρηση των θεωρηματων υπαρξης και αναγκαιων συνθηκων,μια μεταβλητη

να επιλυθει το προβλημα $\max f(x) = x^3-6x^2+11x-6, \text{subject to } 0 \leq x \leq 4$



- Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης ικανοποιουνται.
- Οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,διοτι η συναρτηση στοχου δεν ειναι οιονει-κοιλη
- Η λαγρανζιανη $L=\mu\left(x^3-6x^2+11x-6\right)+\lambda\ \left(4-x\right)$ ειναι παραγωγισιμη,αρα καθε υποψηφιο τοπικο μεγιστο πρεπει να ικανοποιει τις αναγκαιες συνθηκες,δηλαδη

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \mu(3x^2-12x+11)-\lambda \leq 0 \qquad (25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}x = \left(\mu(3x^2 - 12x + 11) - \lambda\right)x = 0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4 - x \geq 0 \tag{27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}\lambda = \left(4 - x\right)\lambda = 0 \tag{28}$$

$$\begin{aligned} & x, \lambda \geq 0 \\ & \mu \in \{0,1\} \\ & \mu = 0 \;\Rightarrow\; \lambda > 0 \\ & \lambda = 0 \Rightarrow \mu > 0 \end{aligned} \tag{29}$$

διαδικασια αναζητησης ‘υποθεση-λυση-ελεγχος’

υποθεση $\mu = 0$

Λυση απο την υποθεση και την (29) , $\lambda > 0$.απο την (26) $x = 0$.απο την (28) $\lambda = 0$.

Ελεγχος αντιφαση $\lambda > 0$, $\lambda = 0$.

Νεα υποθεση $\mu = 1, \lambda > 0$

Λυση απο την υποθεση και την (28), (26) $x = 4, \lambda = 11$.

Ελεγχος ολες οι ανισοτητες ικανοποιουνται.

Επειδη οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,εχουμε βρει μονο ενα υποψηφιο τοπικο μεγιστο

Λυσεις αναγκαιων συνθηκων (υποψηφια τοπικα μεγιστα)	Τιμη της συναρτησης στοχου
$x = 4$	$f = 6$

Νεα υποθεση $\mu = 1, \lambda = 0$

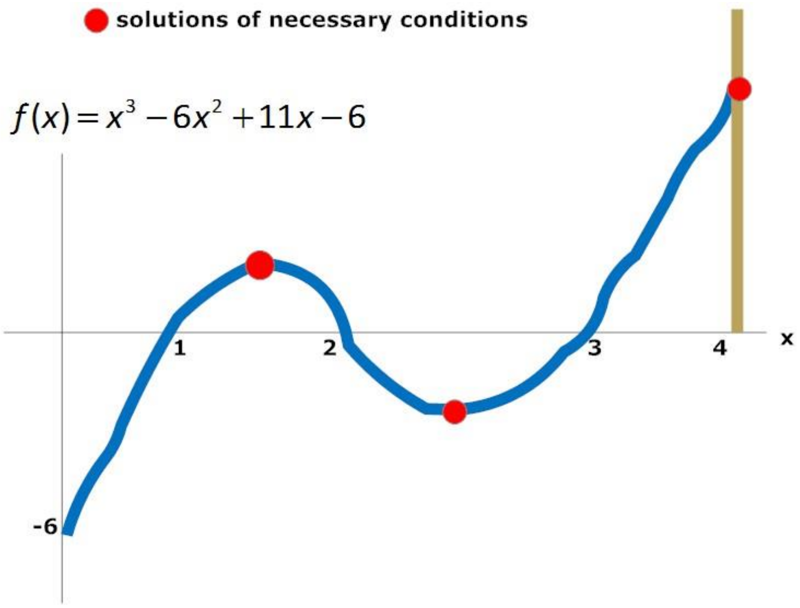
Λυση απο την υποθεση και την (25), (26) $3x^2 - 12x + 11 \leq 0, \left(3x^2 - 12x + 11\right)x = 0$ Η εξισωση $\left(3x^2 - 12x + 11\right)x = 0$ εχει τις λυσεις $x = 0, x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}, x = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ελεγχος η λυση $x = 0$ παραβιαζει την ανισοτητα $3x^2 - 12x + 11 \leq 0$.οι αλλες δυο λυσεις ικανοποιουν ολες τις ανισοτητες.

Επειδη οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,εχουμε βρει μονο δυο υποψηφια τοπικα μεγιστα

Λυσεις αναγκαιων συνθηκων (υποψηφια τοπικα μεγιστα)	Τιμη της συναρτησης στοχου
$x = 4$	$f = 6$
$x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$	$f = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \approx -0.385$
$x = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$	$f = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.385$

- Επειδη εχουμε εξαντλησει τις περιπτωσεις ,δεν υπαρχουν αλλα υποψηφια τοπικα μεγιστα.
- Επειδη οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης ικανοποιουνται,υπαρχει ολικο μεγιστο
- Επειδη οι υποθεσεις του θεωρηματος αναγκαιων συνθηκων ικανοποιουνται,το ολικο μεγιστο ειναι μια απο τις λυσεις των αναγκαιων συνθηκων.



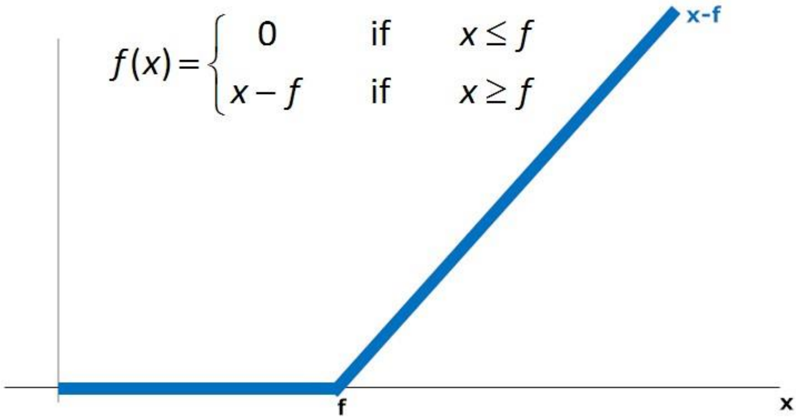
Συγκρινοντας τις τιμες της συναρτησης στοχου στις λυσεις των αναγκαιων συνθηκων,βρισκουμε οτι το ολικο μεγιστο ειναι η λυση $x = 4$.

παραδειγμα 5

Συναρτηση στοχου η οποια δεν ειναι παντου παραγωγισιμη,μια μεταβλητη

Να επιλυθει το προβλημα $\max \Pi(x) = pf(x) - wx$, subject to $x \geq 0$

οπου η συναρτηση $f(x)$ περιγραφεται απο την εξισωση



και οπου οι παραμετροι p, w, f ειναι θετικοι αριθμοι.Το προβλημα περιγραφει τη μεγιστοποιηση κερδους μιας επιχειρησης της οποιας η τεχνολογια ενεχει σταθερα κοστη.◊

- Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης δεν ικανοποιουνται,διοτι το εφικτο συνολο δεν ειναι φραγμενο

Η συναρτηση στοχου περιγραφεται απο την εξισωση

$$\Pi(x)=\begin{cases} -wx & \text{if} & x \le f \\ (p-w)x-pf & \text{if} & x \ge f \end{cases} \tag{30}$$

- Παρατηρουμε οτι η συναρτηση στοχου ειναι παραγωγισιμη παντου εκτος απο το σημειο $x=f$.Θα μεγιστοποιησουμε την συναρτηση χωριστα σε καθε εναν απο τους δυο κλαδους,και θα επιλεξουμε την καλυτερη απο τις δυο επιμερους επιλογες.

Ανω κλαδος $\max \Pi(x) = -wx, \text{subject to } 0 \le \text{x} \le \text{f}$

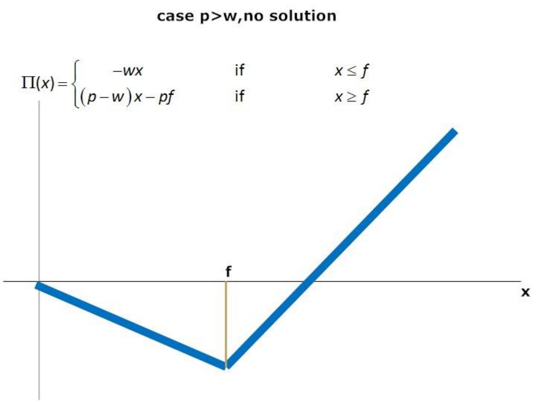
$$\begin{gathered}\text{upper branch maximum} \\ (x,\Pi)=(0,0)\end{gathered} \tag{31}$$

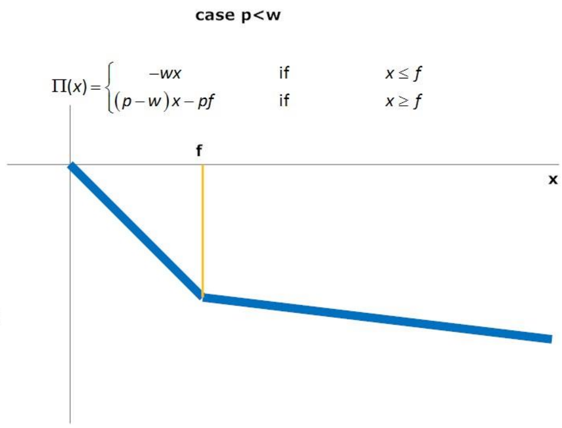
Κατω κλαδος $\max \Pi(x) = (p-w)x - pf, \text{subject to x} \ge \text{f}$

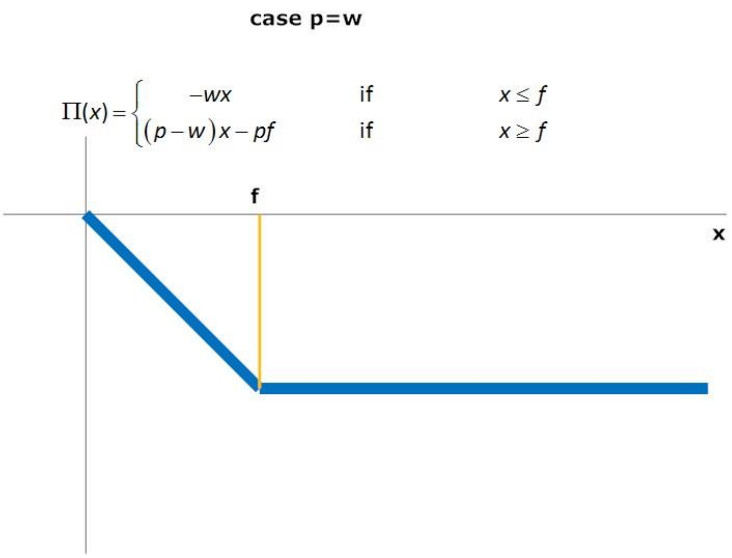
$$\begin{gathered}\text{lower branch maximum} \\ (x,\Pi)=\begin{cases} (f,-wf) & \text{if} & p<w \\ (x \ge f,-wf) & \text{if} & p=w \\ \text{no solution} & \text{if} & p>w \end{cases}\end{gathered} \tag{32}$$

Συγκρινοντας τους δυο κλαδους

$$\boxed{\begin{gathered}\text{global maximum} \\ x=\begin{cases} 0 & \text{if} & p \le w \\ \text{no solution} & \text{if} & p>w \end{cases}\end{gathered}} \tag{33}$$







παραδειγμα 6

Συναρτηση στοχου η οποια δεν ειναι παντου παραγωγισιμη,δυο μεταβλητες.

Να επιλυθει το προβλημα $\max \Pi = 2p\sqrt{KL} - rK - wL, K \ge 0, L \ge 0$,οπου οι παραμετροι p, w, r ειναι θετικοι αριθμοι. Προκειται για τη μεγιστοποιηση κερδους μιας επιχειρησης της οποιας η τεχνολογια περιγραφεται απο την συναρτηση παραγωγης $2\sqrt{KL}$,τυπου cobb-douglas με σταθερες αποδοσεις κλιμακος.◊

- Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης δεν ικανοποιουνται,διοτι το εφικτο συνολο δεν ειναι φραγμενο
- οι ικανες συνθηκες πληρουνται,διοτι συνάρτηση στοχου Π είναι κοιλη.
- Η συνάρτηση στοχου Π δεν ειναι παραγωγισιμη στα σημεια οπου $K = 0$ η $L = 0$.Αυτα τα σημεια πρεπει να αναλυθουν χωριστα.

Οι συνθήκες πρώτης τάξεως ειναι

$$
\begin{aligned}
& p\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}} \le r, \left(p\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}} - r \right) K = 0 \\
& p\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} \le w, \left(p\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} - w \right) L = 0
\end{aligned} \tag{34}
$$

Αρα τοπικο μεγιστο της μορφης $K > 0, L > 0$ υπαρχει εάν και μόνο εάν

$$p^2 = wr, L = \frac{r}{w}K \tag{35}$$

Επειδη οι ικανες συνθηκες πληρουνται,εχουμε βρει ενα ολικο μεγιστο στην περιπτωση που $p^2 = wr$

global maximum

$$(K, L, \Pi) = \begin{cases} (K, \frac{r}{w}K, 0) & \text{if} \quad p^2 = wr \\ \quad ? & \text{if} \quad p^2 \ne wr \end{cases} \tag{36}$$

- Η συνθήκη $p^2 = wr$ είναι επί των παραμετρων,αρα θα πρέπει να εξετάσουμε τις συμβαίνει όταν $p^2 \ne wr$.
- Παρατηρουμε οτι όταν $p^2 \ne wr$ είτε η λύση θα είναι $K = 0, L = 0$,είτε δεν θα υπάρχει λυση,διοτι λυση της μορφης $K > 0, L > 0$ προυποθετει οτι $p^2 = wr$,ενω οι μορφες $K = 0, L > 0$ και $K > 0, L = 0$ δεν ειναι ποτε λυσεις γιατι αποφερουν αρνητικο κερδος,οπως δειχνουν και οι

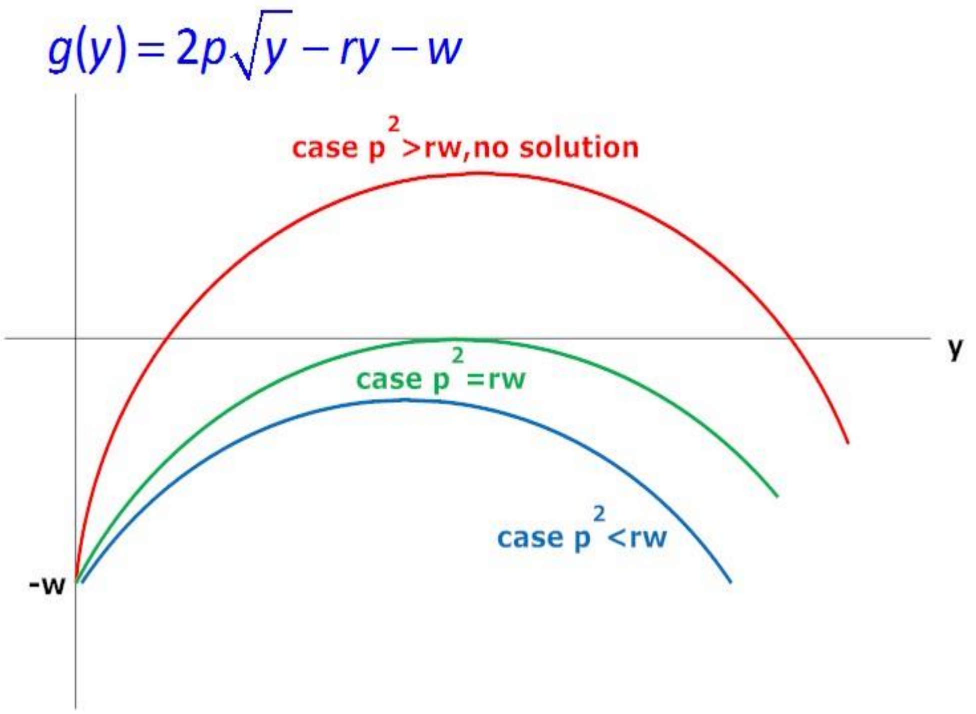
$$
\begin{aligned}
\Pi(0, L) &= 2p\sqrt{\cancel{K}L} - r\cancel{K} - wL = -wL < 0 = \Pi(0,0) \\
\Pi(K, 0) &= 2p\sqrt{K\cancel{L}} - rK - w\cancel{L} = -rK < 0 = \Pi(0,0)
\end{aligned}
$$

Για να αποφανθουμε για την υπαρξη λυσης ,γραφουμε τη συνάρτηση κέρδους ως εξής

$$\Pi(K, L) = L(2p\sqrt{\frac{K}{L}} - r\frac{K}{L} - w) \tag{37}$$

- Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση στην παρένθεση εξαρτάται μόνο από τον λόγο $y = \frac{K}{L}$,και
- γράφουμε $\Pi(y, L) = L(2p\sqrt{y} - ry - w) = Lg(y)$
- Παρατηρούμε ότι η Π μπορεί να πάρει θετικές τιμές μόνο όταν η $g(y)$ μπορεί να πάρει θετικές τιμες.

- Η $g(y)$ είναι κοίλη συνάρτηση που μεγιστοποιείται στο σημείο όπου $g'(y)=0$,δηλαδή στο σημείο $y=\frac{p^2}{r^2}$,και άρα η μέγιστη τιμή της $g(y)$ είναι $g(\frac{p^2}{r^2})=\frac{p^2}{r}-w$



Απο την τελευταια προταση συναγουμε οτι $\Pi(y,L)=Lg(y)\le L\left(\frac{p^2}{r}-w\right),\forall y\forall L$

,αρα

- το πρόβλημα δεν έχει λύση όταν $p^2>wr$,διοτι η συναρτηση στοχου τεινει στο απειρο οταν $y=\frac{p^2}{r^2}, L\to\infty$
- το πρόβλημα έχει την μοναδικη λύση $K=0, L=0$ όταν $p^2<wr$,διοτι $\forall L>0, \Pi(y,L)=Lg(y)<L\left(\frac{p^2}{r}-w\right)<0=\Pi(K=0,L=0)$.

Καταληγουμε οτι

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{global maximun}\\ (K,L,\Pi)=\begin{cases}(0,0,0) & \text{if} \quad p^2<wr\\ \left(K,\frac{r}{w}K,0\right) & \text{if} \quad p^2=wr\\ \text{no solution} & \text{if} \quad p^2>wr\end{cases}\end{array}} \tag{38}$$

παραδειγμα 7

Ανιχνευση δεσμευτικων περιορισμων και αντικατασταση

Να επιλυθει το προβλημα

$$\max \mathrm{f} = z \text{ subject to } z \le x_1, z \le x_2, p_1 x_1 + p_2 x_2 \le m, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, z \ge 0 \qquad (39)$$

οπου ολες οι παραμετροι p_1, p_2, m ειναι θετικοι αριθμοι.◊

Μπορουμε να επιταχυνουμε τη διαδικασια αναζητησης ‘υποθεση-λυση-ελεγχος’,αποδεικνυοντας εκ των προτερων οτι στη λυση του προβληματος,οποια και να ειναι αυτη,καποιοι περιορισμοι θα ισχυσουν αναγκαστικα με ισοτητα.

- Σε καθε ολικο μεγιστο (z, x_1, x_2) ισχυει οτι $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$, γιατι στην αντιθετη περιπτωση η τιμη της συνάρτηση στοχου μπορει να αυξηθει χωρις να παραβιαστουν οι περιορισμοι

Αν αυτο ηταν ολικο μεγιστο	Αυτο θα ηταν εφικτο και καλυτερο
$f = z$ $z \le x_1$ $z \le x_2$ $p_1 x_1 + p_2 x_2 < m$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, z \ge 0$	$f = z + \varepsilon$ $z + \varepsilon \le x_1 + \varepsilon$ $z + \varepsilon \le x_2 + \varepsilon$ $p_1(x_1 + \varepsilon) + p_2(x_2 + \varepsilon) \le m$ $x_1 + \varepsilon \ge 0, x_2 + \varepsilon \ge 0, z + \varepsilon \ge 0$

$\varepsilon > 0$, sufficiently small

- Σε καθε ολικο μεγιστο (z, x_1, x_2) ισχυει οτι $z > 0, x_1 > 0, x_2 > 0$, γιατι στην αντιθετη περιπτωση (π.χ. $x_1 = 0$) εχουμε $z = 0$,ενω η επιλογη $z = x_1 = x_2 = \dfrac{m}{p_1 + p_2} > 0$ ειναι εφικτη και καλυτερη.
- Σε καθε ολικο μεγιστο (z, x_1, x_2) ισχυει οτι $z = x_1$ or $z = x_2$, γιατι στην αντιθετη περιπτωση η τιμη της συνάρτηση στοχου μπορει να αυξηθει χωρις να παραβιαστουν οι περιορισμοι

Αν αυτο ηταν ολικο μεγιστο	Αυτο θα ηταν εφικτο και καλυτερο
$f = z$ $z < x_1$ $z < x_2$ $p_1 x_1 + p_2 x_2 \le m$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, z \ge 0$	$f = z + \varepsilon$ $z + \varepsilon < x_1$ $z + \varepsilon < x_2$ $p_1 x_1 + p_2 x_2 \le m$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, z + \varepsilon \ge 0$

$\varepsilon > 0$, sufficiently small

Αρα μπορουμε να αντικαταστησουμε το αρχικο προβλημα με το ισοδυναμο αλλα απλουστερο προβλημα

$$\begin{aligned}&\max \text{ f } = z\\ &\text{subject to } \; z \le x_1, z \le \underbrace{\frac{m}{p_2} - \frac{p_1 x_1}{p_2}}_{x_2}, x_1 > 0, z > 0\end{aligned} \tag{40}$$

Και για το νεο προβλημα εχουμε οτι

- οι ικανες συνθηκες πληρουνται(γραμμικο προβλημα)
- Η λαγρανζιανη $\mathrm{L} = \mu z + \nu(x_1 - z) + \lambda\left(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1 x_1}{p_2} - z\right)$ ειναι παραγωγισιμη,αρα καθε υποψηφιο τοπικο μεγιστο πρεπει να ικανοποιει τις αναγκαιες συνθηκες,οι οποιες ειναι,με βαση τα συμπερασματα $z > 0, x_1 > 0$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \mu - \nu - \lambda = 0 \tag{41}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \nu - \lambda \frac{p_1}{p_2} = 0 \tag{42}$$

$$x_1 - z \ge 0 \tag{43}$$

$$\left(x_1 - z\right)\nu \ge 0 \tag{44}$$

$$\frac{m}{p_2} - \frac{p_1 x_1}{p_2} - z \ge 0 \tag{45}$$

$$\lambda\left(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1 x_1}{p_2} - z\right) = 0 \tag{46}$$

$$\begin{aligned}&x_1 > 0, z > 0, \nu \ge 0, \lambda \ge 0\\ &\mu \in \{0,1\}\\ &\mu = 0 \;\Rightarrow\; \nu > 0 \text{ or } \lambda > 0\\ &\nu = 0 \Rightarrow \mu > 0 \text{ or } \lambda > 0\\ &\lambda = 0 \Rightarrow \mu > 0 \text{ or } \nu > 0\end{aligned} \tag{47}$$

διαδικασια αναζητησης 'υποθεση-λυση-ελεγχος'

ξερουμε οτι $z = x_1$ or $z = x_2$ αρα επιλεγουμε μια αναλογη υποθεση

υποθεση $z < x_1$

λυση $\mu = \nu = \lambda = 0$

ελεγχος παραβιαζεται η (47).

Νεα υποθεση $z = x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1 x_1}{p_2} - z > 0$

λυση $\mu = \nu = \lambda = 0$

ελεγχος παραβιαζεται η (47)

Νεα υποθεση $z = x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1 x_1}{p_2} - z = 0$

λυση $\boxed{z = x_1 = \frac{m}{p_1 + p_2}, \mu = 1, \nu = \frac{p_1}{p_1 + p_2}, \lambda = \frac{p_2}{p_1 + p_2}}$

ελεγχος ΟΚ

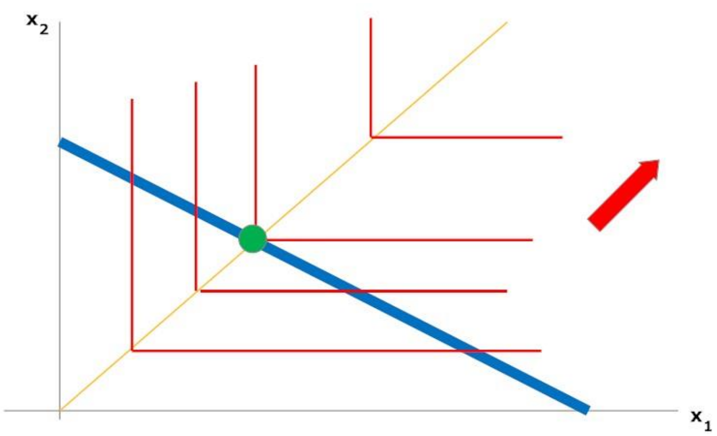
Επειδη οι ικανες συνθηκες πληρουνται,εχουμε βρει το ολικο μεγιστο.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{global maximum} \\ z = x_1 = x_2 = \dfrac{m}{p_1 + p_2}\end{array}} \qquad (48)$$

παραδειγμα 8

Μετασχηματισμος προβληματος με συναρτηση στοχου η οποια δεν ειναι παντου παραγωγισιμη σε ισοδυναμο προβλημα με παντου παραγωγισιμες συναρτησεις.

Να επιλυθει το προβλημα $\max \mathrm{u} = \min\{x_1, x_2\}$, subject to $p_1 x_1 + p_2 x_2 \le m, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ οπου ολες οι παραμετροι p_1, p_2, m ειναι θετικοι αριθμοι.(Προκειται για μεγιστοποιηση συναρτησης οφελους τυπου Leontief υπο τον εισοδηματικο περιορισμο). ◊



- Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης ικανοποιουνται.

- Η συνάρτηση στοχου δεν ειναι παραγωγισιμη στα σημεια οπου $x_1 = x_2$

Εισαγουμε μια νεα ματαβλητη z και οριζουμε ενα νεο προβλημα μεγιστοποιησης (ειναι το ιδιο με αυτο του παραδειγματος 7).

$$\begin{aligned}&\max \mathrm{f} = z\\&\text{subject to}\\&z \le x_1\\&z \le x_2\\&p_1x_1 + p_2x_2 \le m\\&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, z \ge 0\end{aligned} \tag{49}$$

Τα δυο προβληματα ειναι ισοδυναμα

- εαν $(x_1, x_2) = (\alpha, \beta)$ ειναι λυση του αρχικου προβληματος,τοτε $(x_1, x_2, z) = (\alpha, \beta, \min\{\alpha, \beta\})$ ειναι λυση του (49).
- εαν $(x_1, x_2, z) = (\alpha, \beta, \gamma)$ ειναι λυση του (49) ,τοτε $(x_1, x_2) = (\alpha, \beta)$ ειναι λυση του αρχικου προβληματος,και $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$.

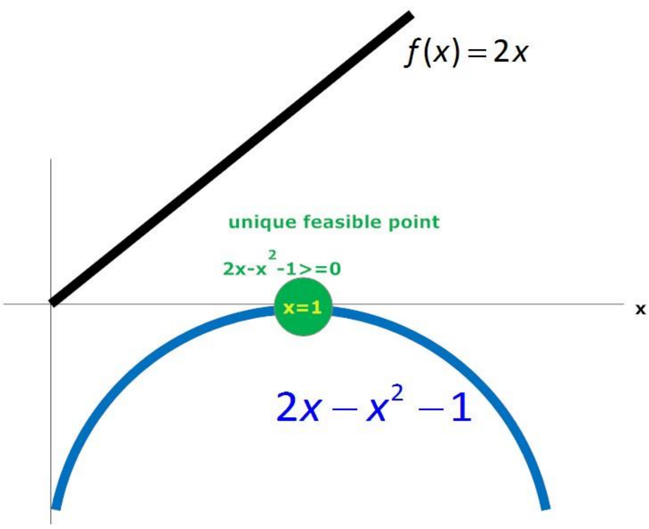
Αρα απο το παραδειγμα 7 εχουμε

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{global maximum}\\ u = x_2 = x_1 = \dfrac{m}{p_1 + p_2}\end{array}} \tag{50}$$

παραδειγμα 9

$\lambda_0 = 0$ (δεν ισχυουν οι συνθηκες κατα kuhn-tucker)

Να επιλυθει το προβλημα $\max f(x) = 2x, \text{subject to } 2x \ge x^2 + 1, x \ge 0$.



- Οι ικανες συνθηκες πληρουνται,γιατι η συναρτηση στοχου ειναι κοιλη και το εφικτο συνολο αποτελειται απο ενα μονο σημειο ,το $x=1$,αρα ειναι κυρτο.(για να βρουμε το εφικτο συνολο στην περιπτωση αυτη,μεγιστοποιουμε την συναρτηση $2x-x^2-1$που οριζει τον περιορισμο σε κανονικη μορφη,η παρατηρουμε οτι $2x-x^2-1=-(x-1)^2<0, \forall x\neq 1$)
- Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης ικανοποιουνται.
- Οι υποθεσεις του θεωρηματος αναγκαιων συνθηκων πληρουνται,διοτι η λαγρανζιανη $L=2\lambda_0 x+\lambda_1\left(2x-x^2-1\right)$ ειναι παραγωγισιμη,αρα καθε υποψηφιο τοπικο μεγιστο πρεπει να ικανοποιει τις αναγκαιες συνθηκες,δηλαδη

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2\lambda_0+2\lambda_1(1-x)\leq 0 \tag{51}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}x=\left(2\lambda_0+2\lambda_1(1-x)\right)x=0 \tag{52}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=2x-x^2-1\geq 0 \tag{53}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\lambda_1=\left(2x-x^2-1\right)\lambda_1=0 \tag{54}$$

$$\begin{aligned}&x,\lambda_1\geq 0\\&\lambda_0\in\{0,1\}\\&\lambda_0=0\ \Rightarrow\ \lambda_1>0\\&\lambda_1=0\Rightarrow\lambda_0>0\end{aligned} \tag{55}$$

Επειδη η (53),ικανοποιειται μονο απο το $x=1$, θα εχουμε απο τις (51),(55) οτι $\lambda_0=0,\lambda_1>0$.

- Το ιδιο ισχυει για οποιαδηποτε συναρτηση στοχου $f(x)$ τετοια ωστε $f'(1)\neq 1$
- εαν το μεγιστο μπορει να προσδιοριστει μονο απο τους περιορισμους,τοτε $\lambda_0=0$

παραδειγμα 10

$\lambda_0=0$(δεν ισχυουν οι συνθηκες κατα kuhn-tucker).

Να επιλυθει το προβλημα $\max f(x,y)=x, \text{subject to } \left(y-1\right)^2\leq(1-x)^3, x\geq 0, y\geq 0$

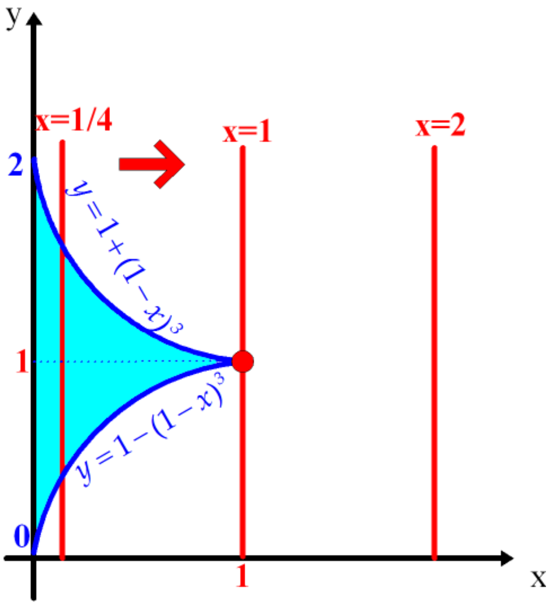
- Οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,γιατι το εφικτο συνολο δεν ειναι κυρτο.
- Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης ικανοποιουνται.
- Οι ι υποθεσεις του θεωρηματος αναγκαιων συνθηκων πληρουνται,διοτι η λαγρανζιανη $L=\lambda_0 f+\lambda_1 g=\lambda_0 x+\lambda_1((1-x)^3-\left(y-1\right)^2)$ ειναι παραγωγισιμη,αρα καθε υποψηφιο τοπικο μεγιστο πρεπει να ικανοποιει τις αναγκαιες συνθηκες,δηλαδη

$$L_x=\lambda_0-3\lambda_1(1-x)^2\le 0, xL_x=x\left(\lambda_0-3\lambda_1(1-x)^2\right)=0, x\ge 0 \quad (56)$$

$$L_y=-2\lambda_1\left(y-1\right)\le 0, yL_y=-2\lambda_1 y\left(y-1\right)=0, y\ge 0 \quad (57)$$

$$(1-x)^3-\left(y-1\right)^2\ge 0, \lambda_1((1-x)^3-\left(y-1\right)^2)=0, \lambda\ge 0 \quad (58)$$

$$\begin{aligned} & x, y, \lambda_1\ge 0 \\ & \lambda_0\in\{0,1\} \\ & \lambda_0=0 \;\Rightarrow\; \lambda_1>0 \\ & \lambda_1=0\Rightarrow \lambda_0>0 \end{aligned} \quad (59)$$



διαδικασια αναζητησης 'υποθεση-λυση-ελεγχος'

υποθεση $\lambda_0=1$

λυση απο την (56) $\lambda_1>0, x\ne 1$.απο την (58) $(1-x)^3=\left(y-1\right)^2$,αρα $y\ne 1$. απο την (57) $y=0$,και αρα $x=0$.

ελεγχος οκ

Επειδη οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,εχουμε βρει μονο ενα υποψηφιο τοπικο μεγιστο

Λυσεις αναγκαιων συνθηκων (υποψηφια τοπικα μεγιστα)	Τιμη της συναρτησης στοχου
$x=0, y=0$	$f=0$

Νεα υποθεση $\lambda_0 = 0$

λυση απο την (59) $\lambda_1 > 0$.απο την (56) $x = 1$.απο την (58) $y = 1$

ελεγχος οκ

Επειδη οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,εχουμε βρει μονο δυο υποψηφια τοπικα μεγιστα

Λυσεις αναγκαιων συνθηκων (υποψηφια τοπικα μεγιστα)	Τιμη της συναρτησης στοχου
$x = 0, y = 0, \lambda_0 = 1$	$f = 0$
$x = 1, y = 1, \lambda_0 = 0$	$f = 1$

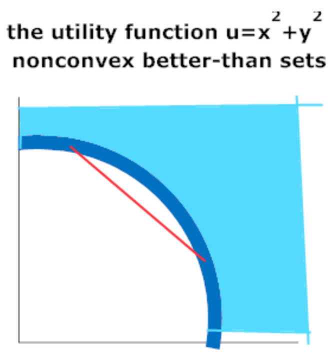
- Επειδη εχουμε εξαντλησει τις περιπτωσεις ,δεν υπαρχουν αλλα υποψηφια τοπικα μεγιστα.
- Επειδη οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης ικανοποιουνται,υπαρχει ολικο μεγιστο
- Επειδη οι υποθεσεις του θεωρηματος αναγκαιων συνθηκων ικανοποιουνται,το ολικο μεγιστο ειναι μια απο τις λυσεις των αναγκαιων συνθηκων
- Συγκρινοντας τις τιμες της συναρτησης στοχου στις λυσεις των αναγκαιων συνθηκων,βρισκουμε οτι το ολικο μεγιστο ειναι η λυση $x = 1, y = 1, \lambda_0 = 0$,στην οποια δεν ισχυουν οι συνθηκες kuhn-tucker.

παραδειγμα 11

(Το συνολο των ολικων μεγιστων δεν ειναι κυρτο.Οι λυσεις δεν ειναι συνεχεις συναρτησεις των παραμετρων).

Να επιλυθει το προβλημα $\max\ f(x, y) = x^2 + y^2$, subject to $px + qy \le m, x \ge 0, y \ge 0$ οπου ολες οι παραμετροι p, q, m ειναι θετικοι αριθμοι.Προκειται για τυπικο προβλημα καταναλωτη με μη κυρτες προτιμησεις.

- Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης ικανοποιουνται.
- Οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,γιατι η συναρτηση στοχου δεν ειναι οιονει κοιλη



- Οι υποθεσεις του θεωρηματος αναγκαιων συνθηκων πληρουνται,διοτι η λαγρανζιανη $L=\lambda_0(x^2+y^2)+\lambda_1(m-px-qy)$ ειναι παραγωγισιμη,αρα καθε υποψηφιο τοπικο μεγιστο πρεπει να ικανοποιει τις αναγκαιες συνθηκες,δηλαδη

$$L_x=2\lambda_0 x-\lambda_1 p\le 0, xL_x=x\left(2\lambda_0 x-\lambda_1 p\right)=0 \quad (60)$$

$$L_y=2\lambda_0 y-\lambda_1 q\le 0, yL_y=y\left(2\lambda_0 y-\lambda_1 q\right)=0 \quad (61)$$

$$m-px-qy\ge 0, \lambda_1(m-px-qy)=0 \quad (62)$$

$$x,y,\lambda_1\ge 0, \lambda_0\in\{0,1\}, \lambda_0=0 \;\Rightarrow\; \lambda_1>0, \lambda_1=0 \Rightarrow \lambda_0>0 \quad (63)$$

διαδικασια αναζητησης 'υποθεση-λυση-ελεγχος'

υποθεση $\lambda_0=0$

λυση απο την (63) $\lambda_1>0$.απο τις (60),(61) $x=0,y=0$.απο την (62) $m-px-qy=0$

ελεγχος αντιφαση $m=0$.

νεα υποθεση $\lambda_0=1, x>0, y>0$

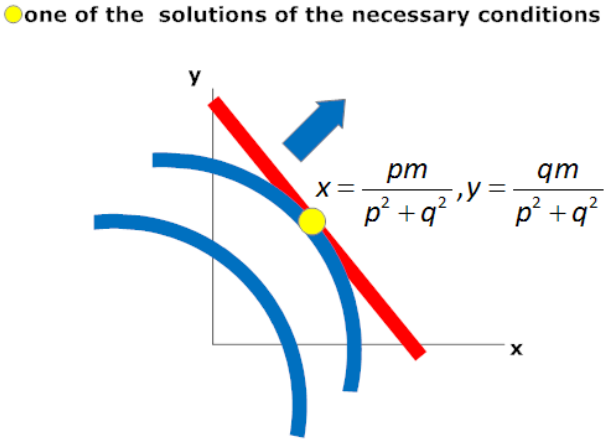
λυση απο τις (60),(61) $2x=\lambda_1 p, 2y=\lambda_1 q$.αρα $\lambda_1>0$, $m-px-qy=0$.βρισκουμε οτι

$$x=\frac{pm}{p^2+q^2}, y=\frac{qm}{p^2+q^2}$$

ελεγχος οκ

Επειδη οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,εχουμε βρει μονο ενα υποψηφιο τοπικο μεγιστο

Λυσεις αναγκαιων συνθηκων (υποψηφια τοπικα μεγιστα)	Τιμη της συναρτησης στοχου
$x=\frac{pm}{p^2+q^2}, y=\frac{qm}{p^2+q^2}$	$f=\frac{m^2}{p^2+q^2}$



<u>νεα υποθεση</u> $\lambda_0 = 1, x > 0, y = 0$

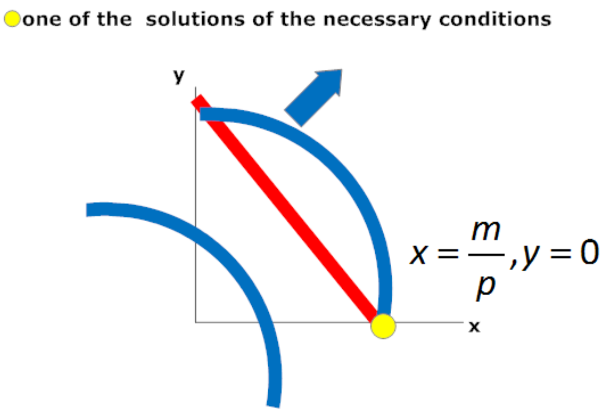
<u>λυση</u> απο τις (60),(61) $2x = \lambda_1 p, 0 \le \lambda_1 q$.αρα $\lambda_1 > 0$, $m - px = 0$.βρισκουμε οτι

$$x = \frac{m}{p}, y = 0, \lambda_1 = \frac{2m}{p^2}$$

<u>ελεγχος</u> οκ

Επειδη οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,εχουμε βρει μονο ενα υποψηφιο τοπικο μεγιστο

Λυσεις αναγκαιων συνθηκων (υποψηφια τοπικα μεγιστα)	Τιμη της συναρτησης στοχου
$x = \frac{pm}{p^2+q^2}, y = \frac{qm}{p^2+q^2}$	$f = \frac{m^2}{p^2+q^2}$
$x = \frac{m}{p}, y = 0$	$f = \frac{m^2}{p^2}$



<u>νεα υποθεση</u> $\lambda_0 = 1, x = 0, y > 0$

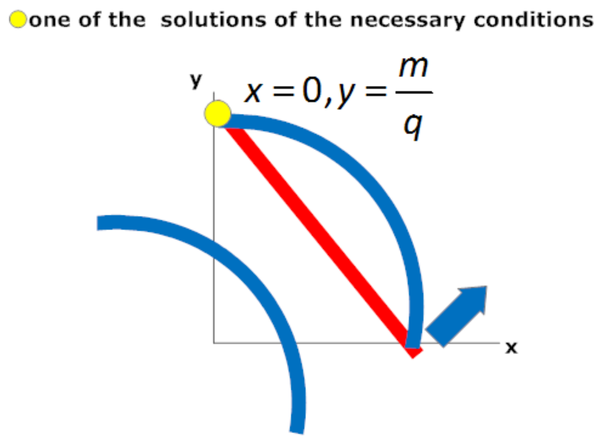
λυση απο τις (60),(61) $0 \le \lambda_1 p, 2y = \lambda_1 q$.αρα $\lambda_1 > 0$, $m - qy = 0$.βρισκουμε οτι

$$x = 0, y = \frac{m}{q}, \lambda_1 = \frac{2m}{q^2}$$

ελεγχος οκ

Επειδη οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,εχουμε βρει μονο ενα υποψηφιο τοπικο μεγιστο

Λυσεις αναγκαιων συνθηκων (υποψηφια τοπικα μεγιστα)	Τιμη της συναρτησης στοχου
$x = \frac{pm}{p^2+q^2}, y = \frac{qm}{p^2+q^2}$	$f = \frac{m^2}{p^2+q^2}$
$x = \frac{m}{p}, y = 0$	$f = \frac{m^2}{p^2}$
$x = 0, y = \frac{m}{q}$	$f = \frac{m^2}{q^2}$



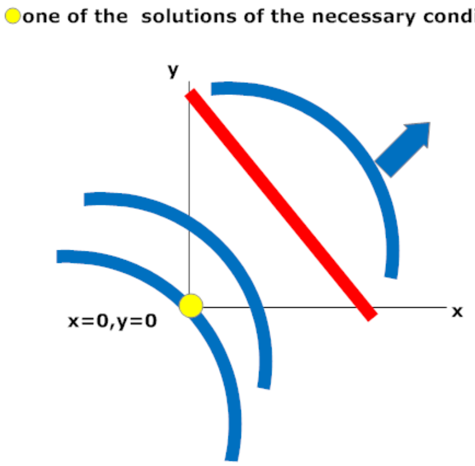
νεα υποθεση $\lambda_0 = 1, x = 0, y = 0$

λυση απο τις (60),(61) $0 \le \lambda_1 p, 0 \le \lambda_1 q$.επειδη $m - px - qy = m > 0$,η (62)συνεπαγεται $\lambda_1 = 0$.βρισκουμε οτι $x = 0, y = 0, \lambda_1 = 0$

ελεγχος οκ

Επειδη οι ικανες συνθηκες δεν πληρουνται,εχουμε βρει μονο ενα υποψηφιο τοπικο μεγιστο

Λυσεις αναγκαιων συνθηκων (υποψηφια τοπικα μεγιστα)	Τιμη της συναρτησης στοχου
$x=\frac{pm}{p^2+q^2}, y=\frac{qm}{p^2+q^2}$	$f=\frac{m^2}{p^2+q^2}$
$x=\frac{m}{p}, y=0$	$f=\frac{m^2}{p^2}$
$x=0, y=\frac{m}{q}$	$f=\frac{m^2}{q^2}$
$x=0, y=0$	$f=0$

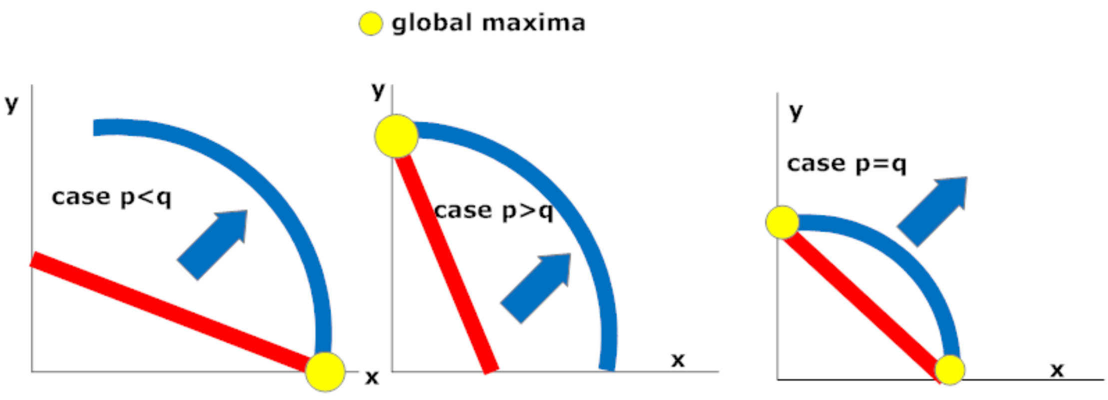


- Επειδη εχουμε εξαντλησει τις περιπτωσεις ,δεν υπαρχουν αλλα υποψηφια τοπικα μεγιστα.
- Επειδη οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης ικανοποιουνται,υπαρχει ολικο μεγιστο
- Επειδη οι υποθεσεις του θεωρηματος αναγκαιων συνθηκων ικανοποιουνται,το ολικο μεγιστο ειναι μια απο τις λυσεις των αναγκαιων συνθηκων

Συγκρινοντας τις τιμες της συναρτησης στοχου στις λυσεις των αναγκαιων συνθηκων,βρισκουμε οτι το ολικο μεγιστο ειναι

global maximun

$$(x,y)=\begin{cases} (\frac{m}{p},0) & \text{if} \quad p<q \\ \left\{\left(\frac{m}{p},0\right),(0,\frac{m}{q})\right\} & \text{if} \quad p=q \\ (0,\frac{m}{q}) & \text{if} \quad p>q \end{cases} \tag{64}$$



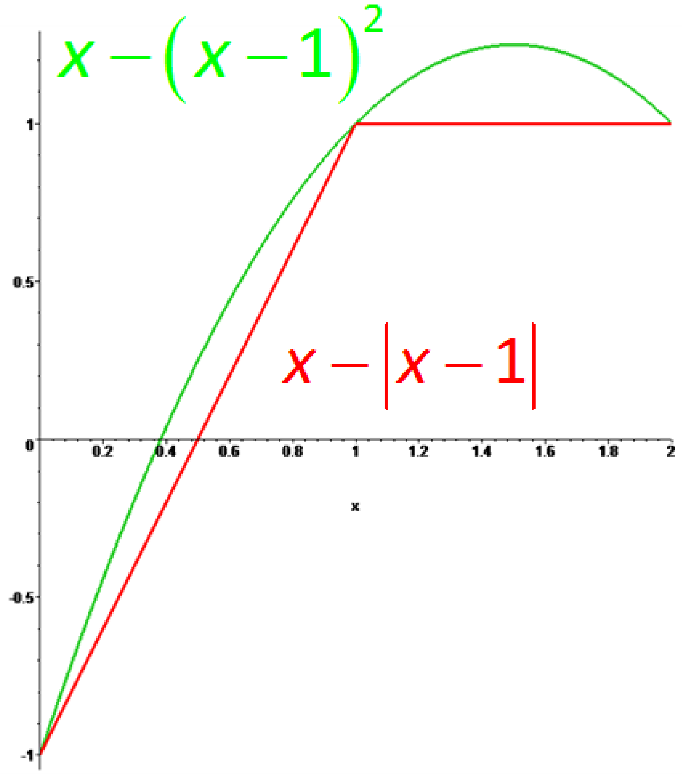
παράδειγμα 12

(μετατροπη προβληματων με απολυτες τιμες σε παραγωγισιμα προβληματα)

Να επιλυθει το προβλημα $\max f(x) = x - |x-1|$, subject to $0 \le x \le 2$

- Οι υποθεσεις του θεωρηματος υπαρξης ικανοποιουνται.
- Οι ικανες συνθηκες πληρουνται
- Οι υποθεσεις του θεωρηματος αναγκαιων συνθηκων δεν πληρουνται,διοτι η λαγρανζιανη $L = \lambda_0(x - |x-1|) + \lambda_1(2-x)$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο σημειο $x = 1$,που συμβαινει να ειναι και ολικο μεγιστο.

Μια συνηθης μεθοδος ειναι να τετραγωνισουμε τις απολυτες τιμες,δηλαδη να λυσουμε το προβλημα $\max f(x) = x - (x-1)^2$, subject to $0 \le x \le 2$.Η μεθοδος αυτη ειναι λανθασμενη διοτι δημιουργει συνηθως ενα προβλημα που δεν ειναι ισοδυναμο(δεν εχει τα ιδια ολικα μεγιστα) με το αρχικο



Η μεθοδος του τετραγωνισμου ειναι χρησιμη μονο σε προβληματα του τυπου $\max f(x) = -|x-1|$, subject to $0 \le x \le 2$,οπου το προσημο και οχι το μεγεθος της απολυτης τιμης εχει σημασια για την μεγιστοποιηση

Μια μεθοδος που ειναι χρησιμη σε ολες τις περιπτωσεις ειναι η εισαγωγη νεων μεταβλητων y, z τετοιων ωστε

$$y = \frac{1}{2}(|x-1| - (x-1)), z = \frac{1}{2}(|x-1| + (x-1)) \tag{65}$$

Παρατηρουμε οτι

$$\begin{aligned} y+z &= |x-1| \\ y-z &= 1-x \\ yz &= 0 \\ y \ge 0&, z \ge 0 \end{aligned} \tag{66}$$

Αρα αντικαθιστουμε $x = 1-(y-z), |x-1| = y+z$ στο αρχικο προβλημα,που γινεται

$$\max g(y,z) = \underbrace{1-(y-z)}_{x} - \underbrace{(y+z)}_{|x-1|} = 1-2y, \text{subject to } 0 \le \underbrace{1-(y-z)}_{x} \le 2, yz = 0, y \ge 0, z \ge 0$$

και καταληγει να ειναι

$$\max g(y,z)=1-2y, \text{subject to } y-z\le 1, y-z\ge -1, yz=0, y\ge 0, z\ge 0 \tag{67}$$

με μοναδικη λυση το $y=0, 0\le z\le 1$.Αρα $x=1-(y-z)=1+z, 0\le z\le 1$,δηλαδη βρισκουμε οτι οι λυσεις του αρχικου προβληματος ειναι $1\le x\le 2$,οπως και πραγματι ειναι.

παράδειγμα 13

(μετατροπή προβλημάτων με συνάρτηση στόχου τύπου Leontief σε παραγωγισιμα προβλήματα).

Έστω συναρτήσεις $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\psi_k} \mathbb{R}, k=1,2\ldots,L$.Η συνάρτηση $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$f(x)=\min\{\psi_1(x),\psi_2(x),..,\psi_L(x)\} \tag{68}$$

λέγεται τύπου Leontief. Το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max f(x), \text{subject to } x\in S \tag{69}$$

Είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα

$$\begin{aligned}&\max\ z\\&\text{subject to}\\&x\in S, z\le \psi_k(x), \forall k=1,..,L\end{aligned} \tag{70}$$

<u>Απόδειξη1</u> έστω $\overline{x}$ ολικό μέγιστο του (69).θα δείξουμε ότι $(\overline{z}=f(\overline{x}),\overline{x})$ είναι ολικό μέγιστο του (70).από την (68), $\overline{z}=f(\overline{x})\le \psi_k(\overline{x}), \forall k$,δηλαδή

$$\text{το } (\overline{z},\overline{x}) \textit{ είναι εφικτό σημείο του } (69) \tag{71}$$

Έστω (z,x) εφικτό σημείο του (70).τότε $x\in S, z\le f(x)$ και άρα

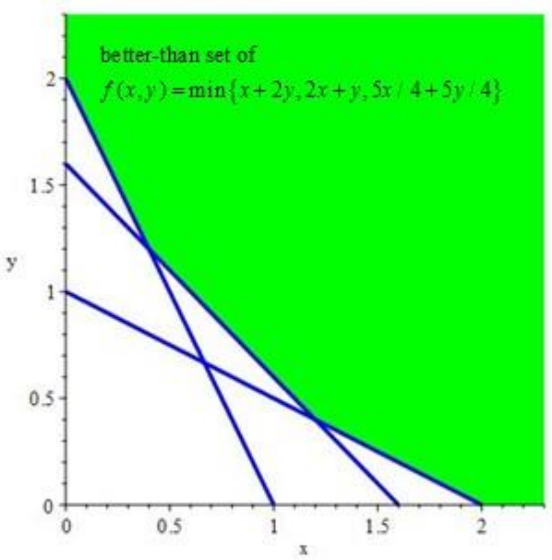
$$z\le f(x)\le f(\overline{x})=\overline{z} \tag{72}$$

Από τις (71),(72) το $(\overline{z},\overline{x})$ είναι ολικό μέγιστο του (70)

<u>Απόδειξη2</u> έστω $(\overline{z},\overline{x})$ ολικό μέγιστο του (70). θα δείξουμε ότι το $\overline{x}$ είναι ολικό μέγιστο του (69). Από τις $\overline{z}\le \psi_k(\overline{x}), \forall k=1,..,L$ συνάγεται ότι $\overline{z}\le f(\overline{x})$ και άρα ότι $\overline{z}=f(\overline{x})$,αλλιώς το $(\overline{z},\overline{x})$ δεν θα ήταν ολικό μέγιστο. Έστω $x\in S$.Τοτε $(z=f(x),x)$ είναι εφικτό σημείο του (70),άρα $z\le \overline{z}$,άρα $f(x)\le f(\overline{x})$.

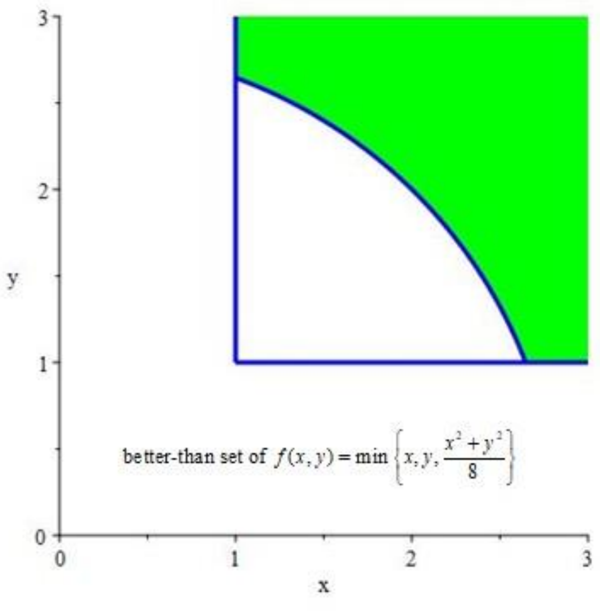
Υπέρτερα σύνολα συναρτήσεων τύπου Leontief

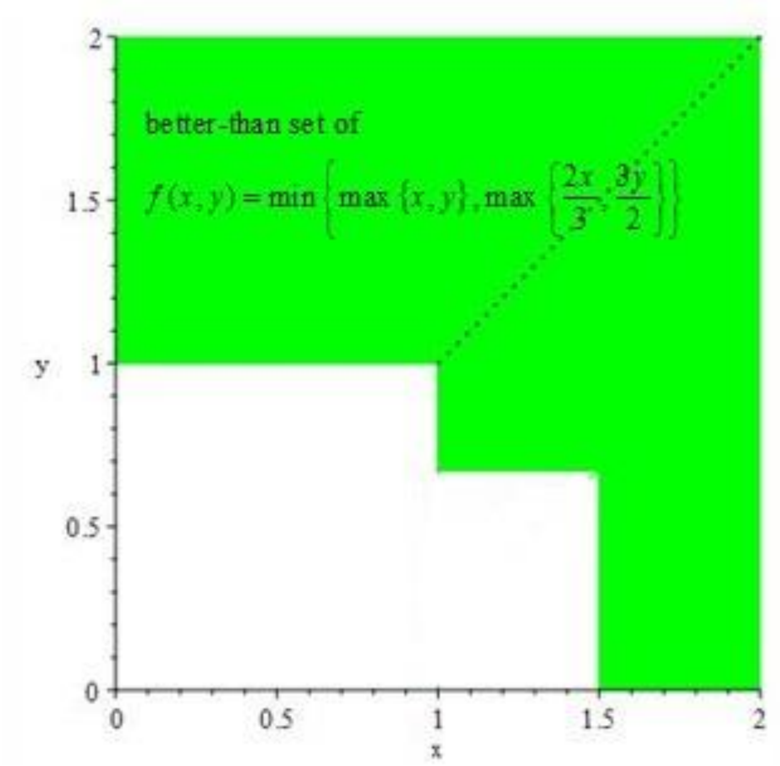
1.Τα υπέρτερα σύνολα των συναρτήσεων τύπου Leontief μπορούν να προσεγγίσουν όσο θέλουμε οποιοδήποτε κυρτό σύνολο με την κατάλληλη επιλογή **αφφινικων** ψ_k



εάν και το S είναι κυρτό σύνολο, τότε το ισοδύναμο πρόβλημα (70) ικανοποιεί τις προϋποθέσεις arrow-enthoven.

2. Τα υπέρτερα σύνολα των συναρτήσεων τύπου Leontief μπορούν να προσεγγίσουν όσο θέλουμε οποιοδήποτε μη κυρτό σύνολο με την κατάλληλη επιλογή κάποιων μη οιονει κοίλων ψ_k




better-than set of
$f(x,y) = \min\left\{\max\{x,y\}, \max\left\{\frac{2x}{3}, \frac{3y}{2}\right\}\right\}$
y
x
0
0.5
1
1.5
2