ΚΟΙΛΕΣ ΚΑΙ ΟΙΟΝΕΙ-ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμος Για καθε συναρτηση $f : S \to R$ και καθε αριθμο α οριζουμε

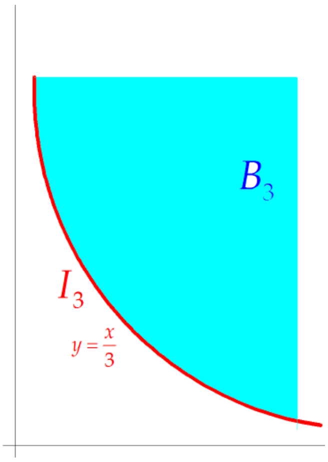
- Την **καμπυλη αδιαφοριας(indifference curve, level set)** της f

$$I_\alpha = \{x \in S, f(x) = \alpha\}$$

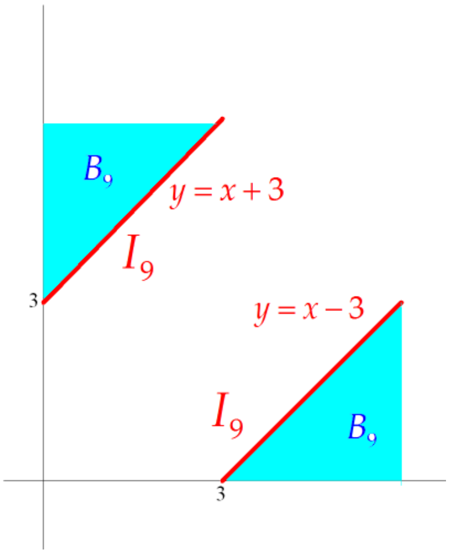
- Το **υπερτερο συνολο (upper contour set,better-than set)** της f

$$B_\alpha = \{x \in S, f(x) \geq \alpha\}$$

Παραδειγμα1 υπερτερο συνολο,καμπυλη αδιαφοριας $f(x,y) = xy, S = R_+{}^2, \alpha = 3$.
$I_3 = \{(x,y) \in R_+{}^2, xy = 3\}, B_3 = \{(x,y) \in R_+{}^2, xy \geq 3\}$



Παραδειγμα2 τα υπερτερα συνολα και οι καμπυλες αδιαφοριας μιας συναρτησης μπορουν να παρουν οποιοδηποτε σχημα,αναλογα με τις ιδιοτητες της συναρτησης.
$f(x,y) = (x-y)^2, S = R_+{}^2, \alpha = 9$, $I_9 = \{(x,y) \in R_+{}^2, |x-y| = 3\}, B_9 = \{(x,y) \in R_+{}^2, |x-y| \geq 3\}$



<u>Ορισμος</u> Η συναρτηση $f : S \subset R^n \to R$ ειναι <u>οιονει-κοιλη</u> <u>(quasi-concave)</u> εαν ολα τα υπερτερα συνολα της ειναι κυρτα.

- μια ισοδυναμη εκφραση ειναι οτι η συναρτηση $f : S \subset R^n \to R$ ειναι οιονει-κοιλη εαν το εφικτο συνολο S ειναι κυρτο και για καθε $x, y \in S, t \in [0,1]$ ισχυει $f(tx+(1-t)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$.
- Η συναρτηση στο παραδειγμα 1 ειναι οιονει κοιλη,ενω στο παραδειγμα 2 δεν ειναι.

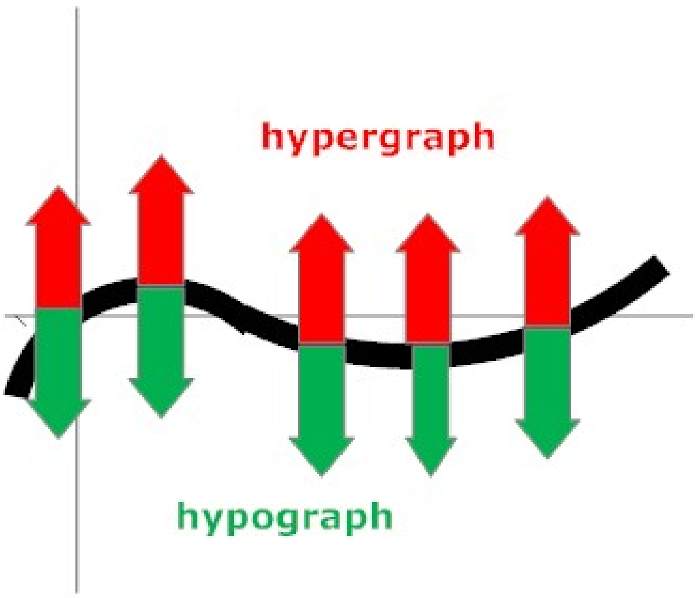
<u>Ορισμος</u> Για καθε συναρτηση $f : S \to R$ οριζουμε το

Υπογραφημα(hypograph) $\{(y,x), y \in R, x \in S, y \leq f(x)\}$

Υπεργραφημα(hypergraph) $\{(y,x), y \in R, x \in S, y \geq f(x)\}$

<u>Παραδειγμα 3</u> υπεργραφημα και υπογραφημα

$$f(x) = x(x-1)(x-2), S = R$$



<u>Ορισμος</u> Η συναρτηση $f : S \subset R^n \to R$ ειναι

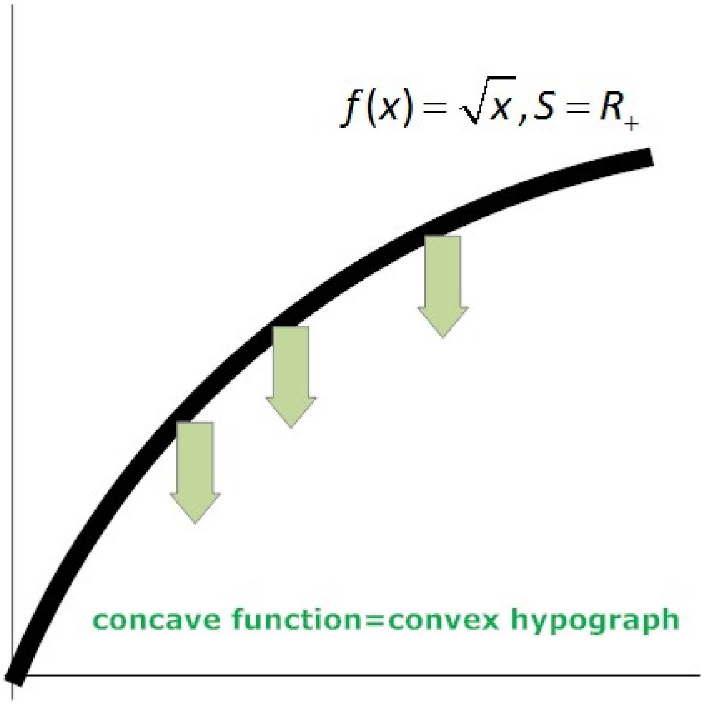
<u>Κοιλη(</u>concave <u>)</u> εαν το υπογραφημα της ειναι κυρτο.

- η συναρτηση $f : S \subset R^n \to R$ ειναι κοιλη εαν το S ειναι κυρτο και για καθε $x, y \in S, t \in [0,1]$ ισχυει $f(tx+(1-t)y) \geq tf(x)+(1-t)f(y)$

<u>Κυρτη(</u>convex<u>)</u> εαν το υπεργραφημα της ειναι κυρτο

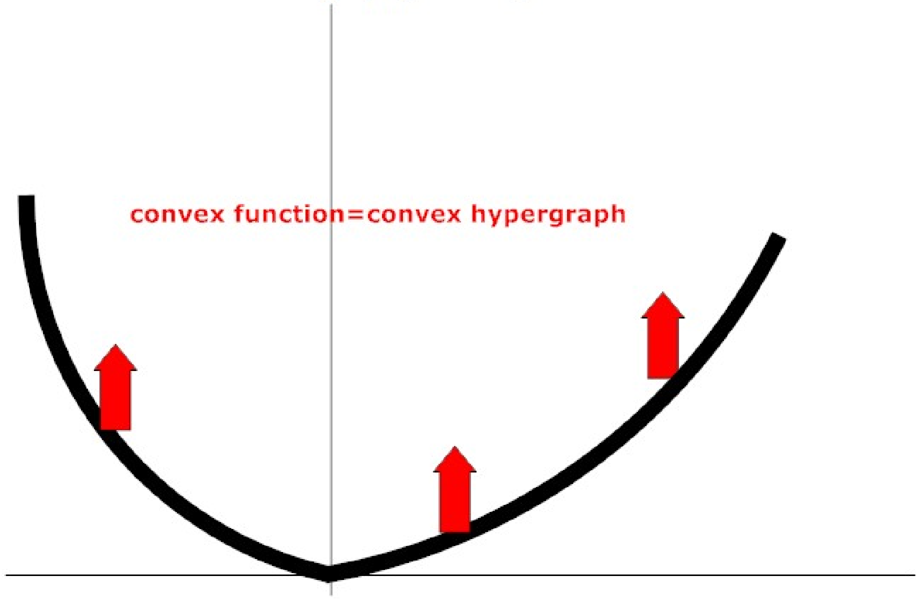
- η συναρτηση $f : S \subset R^n \to R$ ειναι κυρτη εαν το S ειναι κυρτο και για καθε $x, y \in S, t \in [0,1]$ ισχυει $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$

<u>Παραδειγμα 4</u> κοιλη συναρτηση



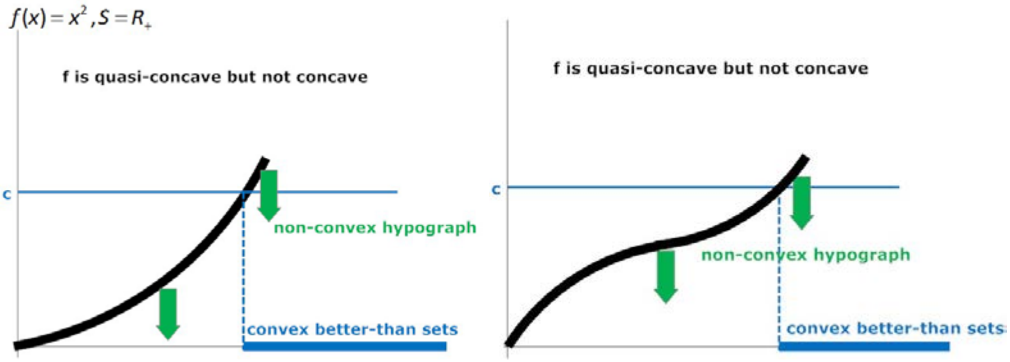
<u>Παραδειγμα 5</u> κυρτη συναρτηση

$$f(x)=x^2, S=R$$

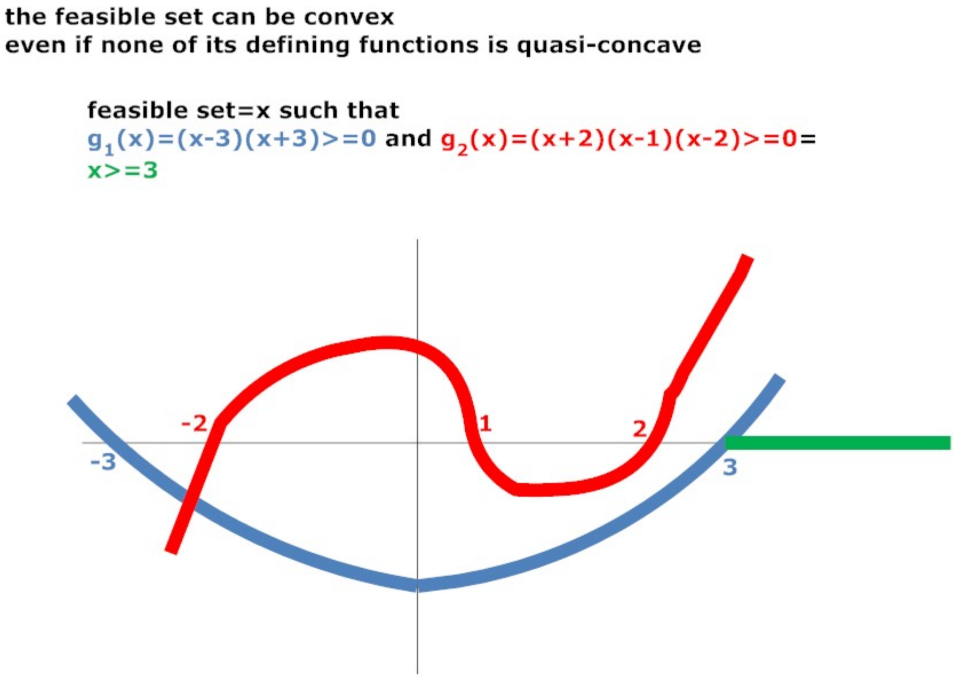


- Η συναρτηση του παραδειγματος 3 δεν ειναι ουτε κυρτη ουτε κοιλη.Ειναι κοιλη στο διαστημα [0,1],και κυρτη στο διαστημα [1,2].
- Η f ειναι κυρτη εαν και μονο εαν η $-f$ ειναι κοιλη.
- Καθε κοιλη συναρτηση ειναι και οιονει κοιλη.το αντιστροφο δεν ισχυει
- Εαν μια συναρτηση ειναι οιονει κοιλη,τοτε το πεδιο ορισμου της S ειναι κυρτο

Παραδειγμα 6 οιονει κοιλες αλλα οχι κοιλες συναρτησεις

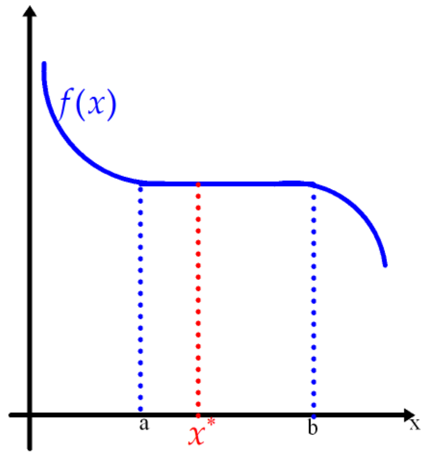


- εαν ολες οι συναρτησεις $g_1, g_2, .., g_m$ ειναι οιονει κοιλες,τοτε το εφικτο συνολο ειναι κυρτο,ως τομη των κυρτων υπερτερων συνολων των $g_1, g_2, .., g_m$.
- το εφικτο συνολο μπορει να ειναι κυρτο ακομα και αν καμμια απο τις συναρτησεις $g_1, g_2, .., g_m$ δεν ειναι οιονει κοιλη.



- η συνθηκη $f'(x^*) \neq 0$ αποκλειει περιπτωσεις οπως η ακολουθη

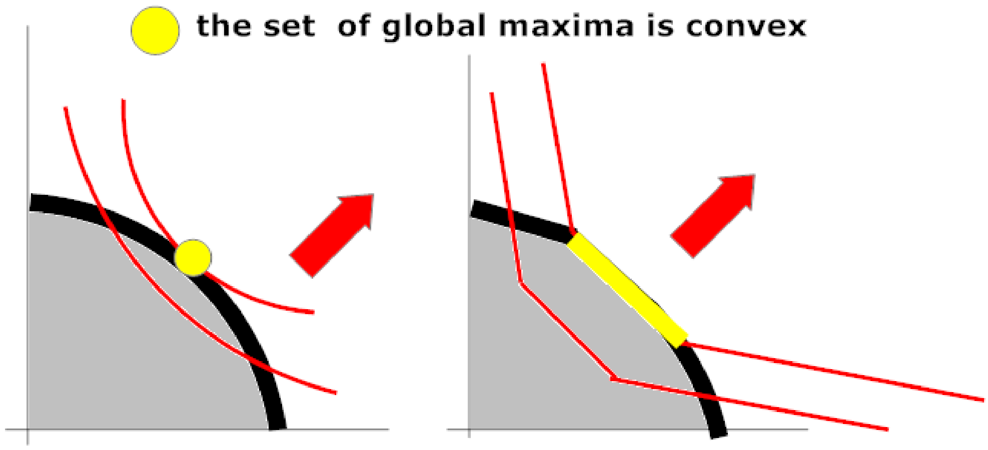
$$\max f(x), x \geq 0$$

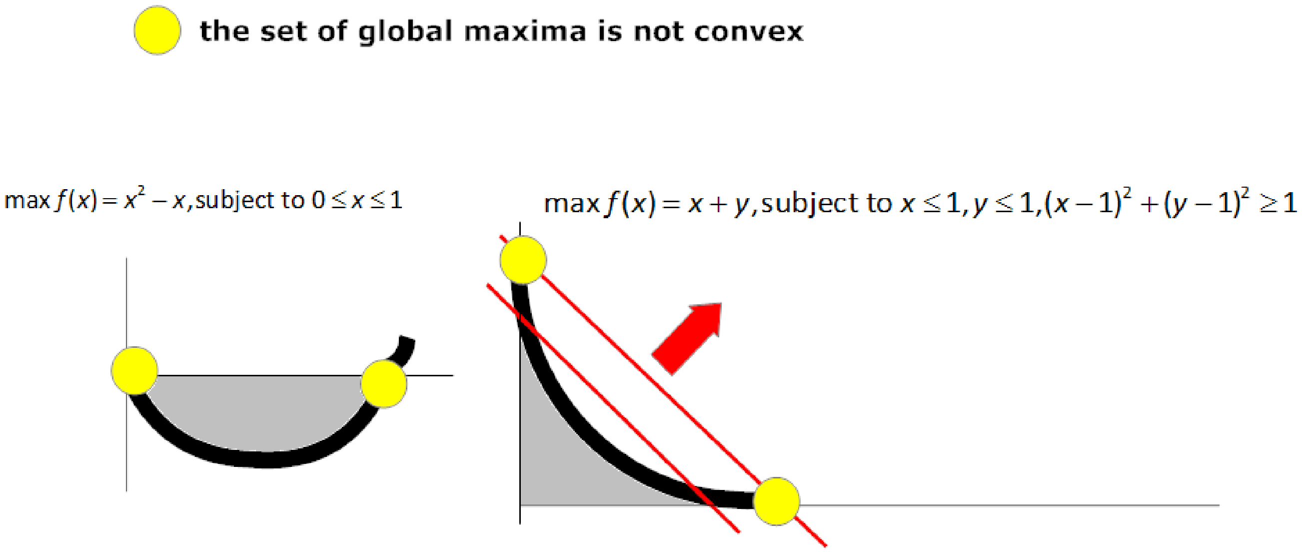


Η συναρτηση f ειναι οιονει κοιλη στο εφικτο συνολο $x \geq 0$,ως φθινουσα,και ταυτοχρονα δεν ειναι κοιλη .Παρολο που η συναρτηση δεν εχει ολικο μεγιστο ,καθε σημειο $x^{*} \in (a,b)$ ικανοποιει $f'(x^{*}) = 0$,και αρα τις αναγκαιες συνθηκες ∎

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΣΥΝΟΛΟΥ ΟΛΙΚΩΝ ΜΕΓΙΣΤΩΝ

Εαν η συναρτηση στοχου ειναι οιονει κοιλη,και το εφικτο συνολο ειναι κυρτο, τοτε το συνολο των ολικων μεγιστων ειναι κυρτο.





<u>Ορισμος</u> Η συναρτηση $f : S \subset R^n \to R$ ειναι <u>αυστηρα οιονει-κοιλη (</u>strictly quasi-concave<u>)</u> εαν

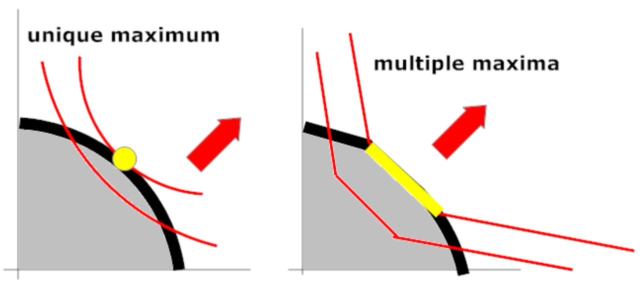
Καθε υπερτερο συνολο της ειναι κυρτο.

Το περιβλημα του καθε υπερτερου συνολου δεν περιεχει γραμμικα τμηματα.

- μια ισοδυναμη εκφραση ειναι οτι η συναρτηση $f : S \subset R^n \to R$ ειναι οιονει-κοιλη εαν το πεδιο ορισμου ειναι κυρτο και για καθε $x \ne y \in S, t \in (0,1)$ ισχυει $f(tx + (1-t)y) > \min\{f(x), f(y)\}$.

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΟΛΙΚΩΝ ΜΕΓΙΣΤΩΝ

Εαν η συναρτηση στοχου ειναι αυστηρα οιονει κοιλη,και το εφικτο συνολο ειναι κυρτο, τοτε υπαρχει το πολυ ενα ολικο μεγιστο



ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑΣ

Εαν τουλαχιστον ενα απο τα ακολουθα κριτηρια ισχυει,τοτε η συναρτηση $f : S \subset R^n \to R$ ειναι κοιλη.Στις περιπτωσεις 3 και 7 ισχυει και το αντιστροφο.

1. για καθε $x, y \in S, t \in [0,1]$ ισχυει $f(tx+(1-t)y) \geq tf(x)+(1-t)f(y)$

2. η f ειναι γραμμικη+σταθερα,δηλαδη της μορφης
$f(x) = px + \alpha = p_1 x_1 + .. + p_n x_n + \alpha$

3. $n=1$ και $f''(x) \leq 0, \forall x \in S$

4. $f = \alpha g, \alpha > 0, g$ κοιλη(θετικος επι κοιλη=κοιλη)

5. $f = g + h$, και g, h κοιλες (κοιλη+κοιλη=κοιλη)

6. $f(x) = g(u(x)), u$ concave,g increasing and concave (Ο αυξων κοιλος μετασχηματισμος μιας κοιλης συναρτησης ειναι κοιλη συναρτηση)

7. το προσημο καθε κυριας ελασσονος(principal minor) ταξεως κ του εσσιανου πινακα της f ειναι το ιδιο με του $(-1)^k$,η ειναι 0.

- Μια κυρια ελασσων (principal minor) ταξεως κ αποκταται αφαιρωντας απο τον εσσιανο πινακα <u>οποιεσδηποτε</u> n-k γραμμες και τις <u>ιδιες</u> στηλες. Υπαρχουν ακριβως $2^n - 1$ τετοιες ελασσονες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΟΙΛΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1.λογαριθμικη $\log(x), x > 0$

2. εκθετικη $x^\alpha, x > 0$,οπου το α ειναι παραμετρος, $\alpha(\alpha - 1) \leq 0$

3. εκθετικη $-x^\alpha, x > 0$,οπου το α ειναι παραμετρος, $\alpha(\alpha - 1) \geq 0$

4. διωνυμικη $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, οπου το α ειναι παραμετρος, $\alpha \leq 0$.

5. $\dfrac{x}{x+\alpha}, x > -\alpha$, οπου το α ειναι παραμετρος, $\alpha \geq 0$.

6. εκθετικη $-e^{-\alpha x}, x > 0$, οπου το α ειναι παραμετρος, $\alpha \geq 0$.

7. $y +$ μια απο τις παραπανω συναρτησεις.

8. Cobb-Douglas $x^a y^b, x > 0, y > 0$,οπου το a, b ειναι παραμετροι, $0 \leq a, 0 \leq b, a + b \leq 1$

9. Leontief $\min\{\alpha x, \beta y\}, \alpha > 0, \beta > 0$

10. Constant elasticity of substitution (CES) $\left(x^r + y^r\right)^{1/r}, x > 0, y > 0$, οπου το r ειναι παραμετρος, $0 < r \leq 1$, διοτι

$$Hessian = \begin{bmatrix} \dfrac{x^{(-2+r)}(x^r+y^r)^{\left(\frac{1}{r}\right)} y^r (r-1)}{x^{(2r)}+2x^r y^r + y^{(2r)}} & -\dfrac{x^{(r-1)} y^{(r-1)} (x^r+y^r)^{\left(\frac{1}{r}\right)} (r-1)}{x^{(2r)}+2x^r y^r + y^{(2r)}} \\ -\dfrac{x^{(r-1)} y^{(r-1)} (x^r+y^r)^{\left(\frac{1}{r}\right)} (r-1)}{x^{(2r)}+2x^r y^r + y^{(2r)}} & \dfrac{y^{(-2+r)}(x^r+y^r)^{\left(\frac{1}{r}\right)} x^r (r-1)}{x^{(2r)}+2x^r y^r + y^{(2r)}} \end{bmatrix}$$

$$\det(Hessian) = 0$$

$$\frac{x^{(-2+r)}(x^r+y^r)^{\left(\frac{1}{r}\right)} y^r (r-1)}{x^{(2r)}+2x^r y^r + y^{(2r)}} \le 0$$

$$\frac{y^{(-2+r)}(x^r+y^r)^{\left(\frac{1}{r}\right)} x^r (r-1)}{x^{(2r)}+2x^r y^r + y^{(2r)}} \le 0$$

10. Ο αυξων μετασχηματισμος μιας κοιλης συναρτησης δεν ειναι αναγκαστικα κοιλη συναρτηση.Η $u(x) = x^{\frac{1}{2}}, x > 0$ ειναι κοιλη και η $g(z) = z^4, z > 0$ ειναι αυστηρως αυξουσα,αλλα η συναρτηση $v(x) = g(u(x)) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4 = x^2$ δεν ειναι κοιλη.

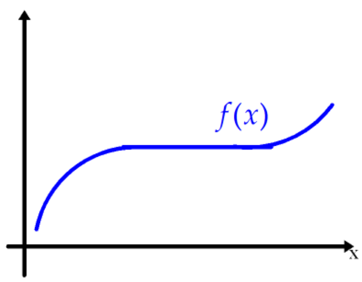
ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΙΟΝΕΙ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑΣ

Εαν τουλαχιστον ενα απο τα ακολουθα κριτηρια ισχυει,τοτε η συναρτηση $f : S \subset R^n \to R$ ειναι οιονει κοιλη .Για το πρωτο κριτηριο ισχυει και το αντιστροφο.Το πεδιο ορισμου S πρεπει να ειναι κυρτο σε ολα τα ακολουθα κριτηρια

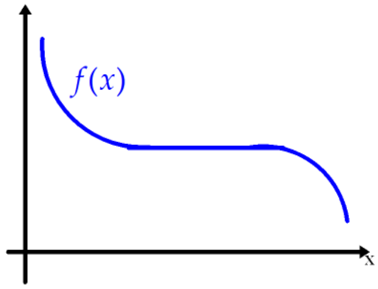
1. για καθε $x, y \in S, t \in [0,1]$ ισχυει $f(tx + (1-t)y) \ge \min\{f(x), f(y)\}$

2.η f ειναι κοιλη

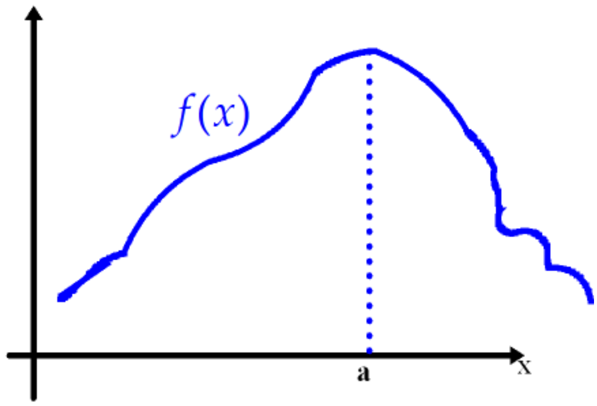
3. $n = 1$ και η f ειναι αυξουσα συναρτηση



4. $n=1$ και η f ειναι φθινουσα συναρτηση



5. $n=1$,η f εχει ενα και μοναδικο ολικο μεγιστο a και ειναι αυξουσα αριστερα του a ,φθινουσα δεξια του.



6.η f ειναι μονοτονικος μετασχηματισμος μιας οιονει κοιλης συναρτησης,δηλαδη $v=g\circ u$, g strictly increasing, u quasi-concave

Παραδειγμα.η $u(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ειναι κοιλη στο συνολο $x>0, y>0$,και η $g(z)=z^2$ ειναι αυστηρως αυξουσα στο συνολο $z>0$,αρα η συναρτηση $v(x,y)=g(u(x,y))=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=x+y+2\sqrt{xy}$ ειναι οιονει κοιλη

7.κριτηριο του περιφραγμενου εσσιανου πινακα(bordered hessian matrix) $BH(x)$.

για καθε $x\in S$ και καθε $k=3,..,n+1$ εχουμε

$$(-1)^{k-1}\det(BH_k(x))>0$$

οπου $BH(x)$ ειναι ο πινακας διαστασεων $(n+1)\times(n+1)$

$$BH(x)=\begin{bmatrix} 0 & f'(x) \\ f'(x)^{\mathrm{T}} & f''(x) \end{bmatrix}$$

$f'(x)=\left[f_1(x),f_2(x),..,f_n(x)\right]=$ jacobian of f

$$f''(x)=\begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{bmatrix}=\text{hessian of } f$$

$BH_k(x)$ =ο πινακας που αποτελειται απο τις κ πρωτες γραμμες και στηλες του $BH(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΟΙΟΝΕΙ ΚΟΙΛΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Cobb-Douglas $f(x,y)=xy, x>0, y>0$,

- οχι κοιλη ,διοτι

$$f(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix})=f(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix})=4<5=\frac{1}{2}f(\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix})+\frac{1}{2}f(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix})$$

- Οιονει κοιλη ,διοτι

ο περιφραγμενος εσσιανος πινακας ειναι

$$BH:=\begin{bmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

με οριζουσα $2xy$,αρα η f ειναι οιονει κοιλη στο συνολο $x>0, y>0$,και συμφωνα με το κριτηριο 7.

2. $f(x)=x^2, x>0$

- οχι κοιλη ,διοτι $f''(x)=2>0$
- Οιονει κοιλη ,διοτι αυξουσα

3. $f(x)=1-\sqrt{2x-x^2}, 0\le x\le 1$

- οχι κοιλη ,διοτι $f''(x)=x^{-\frac{3}{2}}(2-x)^{-\frac{3}{2}}>0$
- Οιονει κοιλη ,διοτι φθινουσα

4. Cobb-Douglas $f(x,y)=x^a y^b, x>0, y>0$, οπου το a,b ειναι παραμετροι, $0\le a, 0\le b, a+b>1$

- οχι κοιλη ,διοτι

$$Hessian := \begin{bmatrix} x^{(a-2)}\, a\, y^b\, (a-1) & x^{(a-1)}\, a\, y^{(b-1)}\, b \\ x^{(a-1)}\, a\, y^{(b-1)}\, b & x^a\, y^{(b-2)}\, b\, (b-1) \end{bmatrix}$$

$$\det(Hessian) := -\frac{(x^a)^2\, a\, (y^b)^2\, b\, (a+b-1)}{x^2\, y^2} < 0$$

- Οιονει κοιλη ,διοτι

$$bordered\_hessian := \begin{bmatrix} 0 & x^{(a-1)}\, a\, y^b & x^a\, y^{(b-1)}\, b \\ x^{(a-1)}\, a\, y^b & x^{(a-2)}\, a\, y^b\, (a-1) & x^{(a-1)}\, a\, y^{(b-1)}\, b \\ x^a\, y^{(b-1)}\, b & x^{(a-1)}\, a\, y^{(b-1)}\, b & x^a\, y^{(b-2)}\, b\, (b-1) \end{bmatrix}$$

$$(-1)^2 \det(bordered\_hessian) := x^{(3a-2)}\, y^{(3b-2)}\, a\, b\, (a+b) > 0$$

Η,με αλλο κριτηριο,

- Οιονει κοιλη ,διοτι $x^a y^b = \left(x^{\frac{a}{a+b}} y^{\frac{b}{a+b}} \right)^{a+b}$ =αυξων μετασχηματισμος κοιλης συναρτησης.

5. Constant elasticity of substitution (CES) $f(x,y) = \left(x^r + y^r\right)^{1/r}$,$x>0, y>0$, οπου το r ειναι παραμετρος, $r>1$

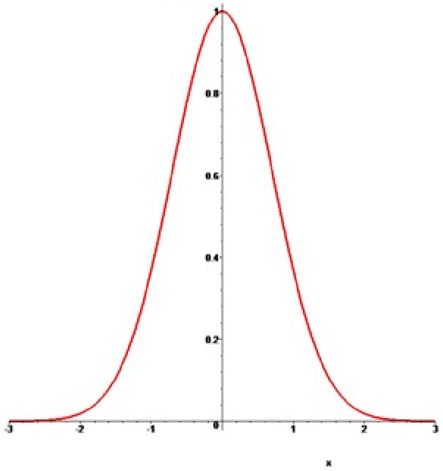
- Οχι οιονει κοιλη διοτι

$$(-1)^2 \det(bordered\_hessian) = -\frac{A^{\left(\frac{3}{r}\right)}\, (r-1)\, (x^{(2r)}\, y^r + y^{(2r)}\, x^r)}{A^3\, x^2\, y^2} < 0$$

οπου $A = x^r + y^r$

6.bell curve

$f(x) = \exp(-x^2), x \in R$



- οχι κοιλη ,διοτι η δευτερη παραγωγος ειναι θετικη για $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f''(x) = 2\,\mathbf{e}^{(-x^2)}(-1 + 2x^2)$

- οιονει-κοιλη διοτι η πρωτη παραγωγος $f'(x) = -2x\exp(-x^2)$ ειναι θετικη για $x < 0$,αρνητικη για $x > 0$