Θεωρουμε οικονομια με

- δυο αγαθα,τα Α και Χ
- εναν καταναλωτη ,και
- δυο επιχειρησεις,τις 1 και 2

Ο καταναλωτης εχει μια μοναδα του αγαθου Χ , και ειναι ιδιοκτητης των επιχειρησεων.

Οι προτιμησεις του περιγραφονται απο την συναρτηση οφελους $u = 2\log A + \log X$

Η επιχειρηση 1 παραγει το Α απο το Χ με τεχνολογια $A_1 = \sqrt{8X_1}$

Η επιχειρηση 2 παραγει το Α απο το Χ με τεχνολογια $A_2 = X_2$

Να υπολογιστουν η ανταγωνιστικη ισορροπια και τα σημεια παρετο.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

ΟΝΟΜΑΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΤΙΜΗ ΤΟΥ ΚΑΘΕ ΑΓΑΘΟΥ

$p = \text{price of } A, w = \text{price of } X$

ΟΡΙΖΟΥΜΕ ΤΟ ΕΙΣΟΔΗΜΑ ΤΟΥ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ

$$M = w + \Pi_1 + \Pi_2 \tag{1}$$

ΛΥΝΟΥΜΕ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΥ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ

$\underbrace{\max}_{A,X} u_A = 2\log A + \log X, \text{subject to } pA + wX \le M$,με λυση τις συναρτησεις ζητησης

$$(A, X) = \left(\frac{2}{3}\frac{M}{p}, \frac{1}{3}\frac{M}{w}\right) \tag{2}$$

ΛΥΝΟΥΜΕ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΗΣ ΚΑΘΕ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗΣ

$\underbrace{\max}_{X_1} \Pi_1 = pA_1 - wX_1 = p\sqrt{8X_1} - wX_1$,με λυση τις συναρτησεις ζητησης-προσφορας

$$(A_1, X_1, \Pi_1) = \left(\frac{4p}{w}, \frac{2p^2}{w^2}, \frac{2p^2}{w}\right) \tag{3}$$

$\underbrace{\max}_{X_2} \Pi_2 = pA_2 - wX_2 = (p - w)X_2$,με λυση τις συναρτησεις ζητησης-προσφορας

$$A_2 = X_2 = \begin{cases} \infty & \text{if} \quad p > w \\ \geq 0 & \text{if} \quad p = w \\ 0 & \text{if} \quad p < w \end{cases} \tag{4}$$

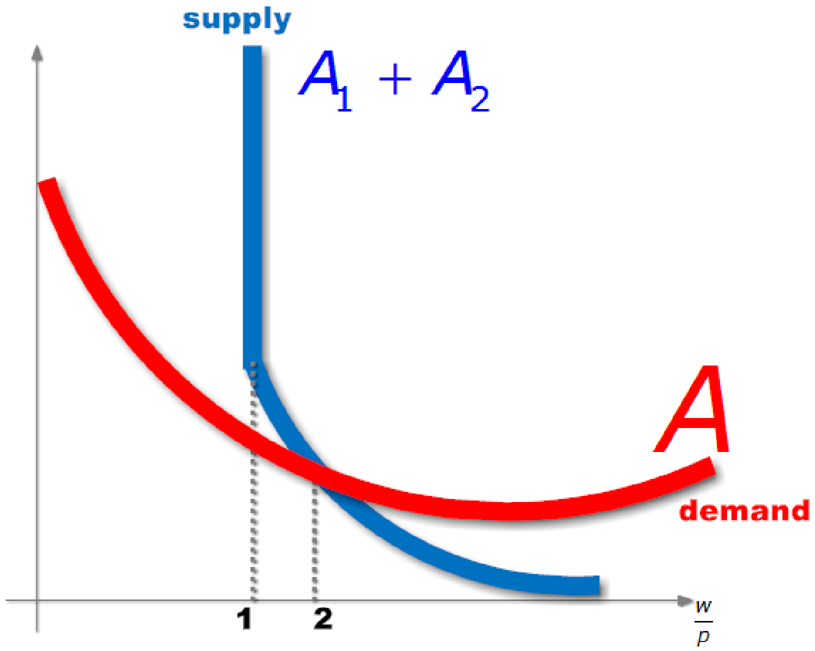
ΛΥΝΟΥΜΕ ΤΙΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

$$\boxed{\begin{aligned} A_1 + A_2 &= A \\ X_1 + X_2 + X &= 1 \end{aligned}} \tag{5}$$

Αναζητηση	**λυσης**	**των**	**εξισωσεων**	**ισορροπιας**
περιπτωση	Ζητηση $A_1 + A_2$	=	Προσφορα A	σχολια
$p > w$	$\frac{4p}{w} + \infty$	=	$\frac{2}{3}\frac{M}{p}$	Δεν υπαρχει ισορροπια με $p > w$,διοτι το προβλημα της επιχειρησης 2 δεν εχει λυση.
$p = w$	$4 + A_2$	=	$\frac{2}{3}\frac{M}{p} = 2$ διοτι $M = w + \Pi_1 + \Pi_2 = w + \frac{2p^2}{w} + 0 = 3w$	Δεν υπαρχει ισορροπια με $p = w$,διοτι η μοναδικη λυση των εξισωσεων ισορροπιας $A_2 = -2$ ειναι αρνητικη.
$p < w$	$\frac{4p}{w} + 0$	=	$\frac{2}{3}\frac{M}{p} = \frac{2}{3}\left(\frac{w}{p} + 2\frac{p}{w}\right)$ διοτι $M = w + \Pi_1 + \Pi_2 = w + \frac{2p^2}{w} + 0$	Η μοναδικη λυση των εξισωσεων ισορροπιας ειναι $\frac{w}{p} = 2$ Επειδη αυτη η λυση ικανοποιει την υποθεση $p < w$ η οποια την παρηγαγε, γινεται δεκτη ως ανταγωνιστικη ισορροπια

Η μοναδικη ισορροπια ειναι

$$\boxed{\begin{array}{l} \boxed{\text{unique competitive equilibrium}} \\ \dfrac{w}{p}=2 \\ (A_2,X_2,\Pi_2)=(0,0,0) \\ (A_1,X_1,\Pi_1)=\left(2,\dfrac{1}{2},p\right) \\ M=3p \\ (A,X)=\left(2,\dfrac{1}{2}\right) \end{array}} \quad (6)$$



ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΗΜΕΙΩΝ ΠΑΡΕΤΟ

1.ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΣΗ(SCALARIZATION)

Μετατρεπουμε το προβλημα διανυσματικης μεγιστοποιησης σε ισοδυναμο προβλημα συνηθους μεγιστοποιησης.

$$\max \; u = 2\log A + \log X \text{ subject t}$$

$$\underbrace{\boxed{\begin{array}{l} A \le A_1 + A_2 \\ X_1 + X_2 + X \le 1 \end{array}}}_{\text{Περιορισμοι των πορων}}$$

$$\underbrace{\boxed{\begin{array}{l} A_1 = \sqrt{8X_1} \\ A_2 = X_2 \end{array}}}_{\text{περιορισμοι της τεχνολογιας}}$$

$$A, A_1, A_2, X_1, X_2, X \ge 0$$

2.ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Με την συνηθη διαδικασια αντικαταστασεων,το προβλημα γραφεται σε κανονικη μορφη

$$\begin{aligned}
&\max\ u = 2\log A + \log X \text{ subject to} \\
&\sqrt{8X_1} + X_2 - A \geq 0 \\
&1 - X_1 - X_2 - X \geq 0 \\
&A, X_1, X_2, X \geq 0
\end{aligned}$$

3.ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Παρατηρουμε οτι ισχυουν τα θεωρηματα

- υπαρξης(weierstrass),και
- ικανων συνθηκων(arrow-enthoven)

αρα καθε λυση των αναγκαιων συνθηκων (fritz john) θα ειναι και ολικο μεγιστο

4.ΛΑΓΡΑΝΖΙΑΝΗ

$$L = \lambda_0\left(2\log A + \log X\right) + \lambda_1(\sqrt{8X_1} + X_2 - A) + \lambda_2(1 - X_1 - X_2 - X) \tag{7}$$

5.ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΤΩΝ ΑΝΑΓΚΑΙΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ

Υποθεση εστω οτι οι αναγκαιες συνθηκες εχουν λυση της μορφης
$A > 0, X > 0, X_1 > 0, X_2 > 0, \lambda_0 = 1$

Λυση

οι αναγκαιες συνθηκες συνεπαγονται

$\frac{\partial L}{\partial A} = \frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\partial L}{\partial X_1} = \frac{\partial L}{\partial X_2} = 0$,δηλαδη

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{A} = \lambda_1 \\
&\frac{1}{X} = \lambda_2 \\
&\frac{\lambda_1\sqrt{2}}{\sqrt{X_1}} = \lambda_2 \\
&\lambda_1 = \lambda_2
\end{aligned} \tag{8}$$

Απο την (8) συναγουμε οτι $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ και αρα απο τις αναγκαιες συνθηκες οι αντιστοιχοι περιορισμοι ισχυουν με ισοτητα

$$\begin{aligned}
&\sqrt{8X_1} + X_2 - A = 0 \\
&1 - X_1 - X_2 - X = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Απο τις (9),(8) συναγουμε οτι

$$A=2, X=1, X_1=2, X_2=-2, \lambda_1=\lambda_2=1 \tag{10}$$

<u>Ελεγχος</u> η λυση απορριπτεται διοτι $X_2=-2<0$

<u>Νεα Υποθεση</u> εστω οτι οι αναγκαιες συνθηκες εχουν λυση της μορφης
$A>0, X>0, X_1>0, X_2=0, \lambda_0=1$

<u>Λυση</u>

οι αναγκαιες συνθηκες συνεπαγονται

$\frac{\partial L}{\partial A}=\frac{\partial L}{\partial X}=\frac{\partial L}{\partial X_1}=0$,δηλαδη

$$\begin{gathered} \frac{2}{A}=\lambda_1 \\ \frac{1}{X}=\lambda_2 \\ \frac{\lambda_1\sqrt{2}}{\sqrt{X_1}}=\lambda_2 \end{gathered} \tag{11}$$

Απο την (11) συναγουμε οτι $\lambda_1>0, \lambda_2>0$ και αρα απο τις αναγκαιες συνθηκες οι αντιστοιχοι περιορισμοι ισχυουν με ισοτητα

$$\begin{gathered} \sqrt{8X_1}+X_2-A=0 \\ 1-X_1-\overbrace{X_2}^{0}-X=0 \end{gathered} \tag{12}$$

Απο τις (12),(11) συναγουμε οτι

$$A=2, X=\frac{1}{2}, X_1=\frac{1}{2}, X_2=0, \lambda_1=1, \lambda_2=2 \tag{13}$$

<u>Ελεγχος</u> η λυση γινεται δεκτη διοτι ικανοποιει ολες τις εναπομειναςες ανισοτητες($\frac{\partial L}{\partial X_2}=\lambda_1-\lambda_2=1-2<0$).

6.ΟΛΙΚΑ ΜΕΓΙΣΤΑ,ΣΗΜΕΙΑ ΠΑΡΕΤΟ

Η λυση (13) ειναι και ολικο μεγιστο διοτι ικανοποιουνται οι ικανες συνθηκες.Αυτο ειναι και το μοναδικο ολικο μεγιστο,διοτι η συναρτηση στοχου ειναι αυστηρως κοιλη.

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{unique pareto point}} \\ A_1 = A = 2, A_2 = X_2 = 0, X = \frac{1}{2}, X_1 = \frac{1}{2}\end{array}} \tag{14}$$