ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ 2

5/9/2002

Απαντήστε σε μια από τις δυο ερωτήσεις.

1. Θεωρουμε οικονομία αποτελούμενη από ένα καταναλωτή, με προτιμήσεις $U = \log A + 2\log X$, και περιουσία μόνο μια μονάδα του αγαθού X.

1. Να υπολογιστεί η ανταγωνιστική ισορροπία και τα σημεία Pareto της οικονομίας αυτής όταν η συνάρτηση παραγωγής είναι $\hat{A} = 4\sqrt{\hat{X}}$
2. Να υπολογιστεί η ανταγωνιστική ισορροπία και τα σημεία Pareto της οικονομίας αυτής όταν η συνάρτηση παραγωγής είναι $\hat{A} = 6\hat{X}$
3. Να υπολογιστεί η ανταγωνιστική ισορροπία και τα σημεία Pareto της οικονομίας αυτής όταν η συνάρτηση παραγωγής είναι $\hat{A} = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad \hat{X} \leq F \\ \hat{X} - F & \alpha\nu \quad \hat{X} \geq F \end{cases}$ οπου $0 \prec F \prec 1$

2. Να υπολογιστεί η ανταγωνιστική ισορροπία και τα σημεία Pareto της οικονομίας η οποία αποτελείται από δυο καταναλωτές, A και B, με προτιμήσεις και περιουσίες

$$U_A = \log A_1 + 3\log A_2$$

$$U_B = B_1 + B_2$$

περιουσιες	1	2
A	$s \succ 0$	0
B	0	$t \succ 0$

$$\frac{s}{t} \succ \frac{1}{3}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘ2,ΣΕΠΤ.2002

Πρόβλημα 1

1. ■Υπολογισμός της ανταγωνιστικής ισορροπίας

- Ονομάζουμε τις τιμές
  P=τιμή του A
  W=τιμή του X
- Τυποποιούμε P=1
- Υπολογίζουμε το εισόδημα του καταναλωτή
  $M = W + \Pi$
- Υπολογίζουμε τις συναρτήσεις ζήτησης του καταναλωτη,μεγιστοποιωντας τη χρησιμότητα υπό τον εισοδηματικό περιορισμό
  $$A = \frac{W + \Pi}{3}, X = \frac{2}{3}\frac{W + \Pi}{W}$$
- Υπολογίζουμε τις συναρτήσεις προσφοράς της επιχείρησης μεγιστοποιώντας το κέρδος
  $$\hat{X} = \frac{4}{W^2}, \hat{A} = \frac{8}{W}, \Pi = \frac{4}{W}$$
- Εξισώνουμε πρόσφορα και ζήτηση σε όλες τις αγορές
  $$A = \hat{A}$$
  $$X + \hat{X} = 1$$
- Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας
  $$\boxed{A = \hat{A} = \frac{4}{\sqrt{5}}, X = \frac{4}{5}, \hat{X} = \frac{1}{5}}$$
  $$W = 2\sqrt{5}, \Pi = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

■ Υπολογισμός των σημείων Pareto

Είτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό, και λύνοντας το αντίστοιχο πρόβλημα μεγιστοποίησης. Είτε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ανταγωνιστική ισορροπία είναι ένα σημείο Pareto, και ότι **<u>επειδή υπάρχει μόνο ένας καταναλωτής,</u>** υπάρχει μόνο ένα σημείο Pareto, καταλήγουμε ότι το σημείο αυτό είναι

$$\boxed{A=\hat{A}=\frac{4}{\sqrt{5}},\ X=\frac{4}{5},\ \hat{X}=\frac{1}{5}}$$

2. ■Υπολογισμός της ανταγωνιστικής ισορροπίας

- Ονομάζουμε τις τιμές
  P=τιμή του A
  W=τιμή του X
- Τυποποιούμε P=1
- Υπολογίζουμε το εισόδημα του καταναλωτή
  $M = W + \Pi$
- Υπολογίζουμε τις συναρτήσεις ζήτησης του καταναλωτη, μεγιστοποιωντας τη χρησιμότητα υπό τον εισοδηματικό περιορισμό
  $A=\frac{W+\Pi}{3},\ X=\frac{2}{3}\frac{W+\Pi}{W}$
- Υπολογίζουμε τις συναρτήσεις προσφοράς της επιχείρησης μεγιστοποιώντας το κέρδος

$$\hat{X} = \begin{cases} \infty & w \prec 6 \\ \text{any nonegative number} & \text{if } w = 6 \\ 0 & w \succ 6 \end{cases} \qquad \hat{A}=6\hat{X}$$

- Εξισώνουμε πρόσφορα και ζήτηση σε όλες τις αγορές
  $A=\hat{A}$

  $X+\hat{X}=1$
- Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας
  $\boxed{A=\hat{A}=2,\ X=\frac{2}{3},\ \hat{X}=\frac{1}{3}}$

  $W=6,\Pi=0$

  ■ Υπολογισμός των σημείων Pareto
  Είτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό, και λύνοντας το αντίστοιχο πρόβλημα μεγιστοποίησης. Είτε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ανταγωνιστική ισορροπία είναι ένα σημείο Pareto, και ότι **<u>επειδή υπάρχει μόνο ένας καταναλωτής,</u>** υπάρχει μόνο ένα σημείο Pareto, καταλήγουμε ότι το σημείο αυτό είναι
  $\boxed{A=\hat{A}=2,\ X=\frac{2}{3},\ \hat{X}=\frac{1}{3}}$

3. ■Υπολογισμός της ανταγωνιστικής ισορροπίας

- Ονομάζουμε τις τιμές
  P=τιμή του A
  W=τιμή του X
- Τυποποιούμε P=1
- Υπολογίζουμε το εισόδημα του καταναλωτή
  $M = W + \Pi$
- Υπολογίζουμε τις συναρτήσεις ζήτησης του καταναλωτη,μεγιστοποιωντας τη χρησιμότητα υπό τον εισοδηματικό περιορισμό
  $$A = \frac{W + \Pi}{3}, X = \frac{2}{3}\frac{W + \Pi}{W}$$
- Υπολογίζουμε τις συναρτήσεις προσφοράς της επιχείρησης μεγιστοποιώντας το κέρδος
  $$\hat{X} = \begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix} \quad \text{if} \quad \begin{matrix} w \prec 1 \\ w \geq 1 \end{matrix}$$
  $$\Pi = \begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix} \quad \text{if} \quad \begin{matrix} w \prec 1 \\ w \geq 1 \end{matrix}$$
- Εξισώνουμε πρόσφορα και ζήτηση σε όλες τις αγορές
  $$A = \hat{A}$$
  $$X + \hat{X} = 1$$
- Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας
  Δεν υπάρχει λύση
  - Υπολογισμός των σημείων Pareto

$$\max \quad u = \log A + 2\log X$$

$$\hat{A} = \begin{matrix} 0 & \text{if} & \hat{X} \leq F \\ \hat{X} - F & \text{if} & \hat{X} \geq F \end{matrix}$$

$$A = \hat{A}, X + \hat{X} = 1, \text{all variables nonnegative}$$

παρατηρούμε ότι το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με το

$$\max \quad u = \log A + 2\log X$$

$$A = 1 - F - X$$

$$0 \leq X \leq 1 - F$$

Η λύση είναι

$$\boxed{A = \hat{A} = \frac{1 - F}{3}, X = \frac{2(1 - F)}{3}, \hat{X} = \frac{1 + 2F}{3}}$$

Πρόβλημα 2

1. ■Υπολογισμός της ανταγωνιστικής ισορροπίας

- Ονομάζουμε τις τιμές
  P_1=τιμή του 1
  P_2=τιμή του 2
- Τυποποιούμε $P_1=1$
- Υπολογίζουμε τα εισοδήματα των καταναλωτών

  $$M_A = s$$

  $$M_B = tp_2$$

- Υπολογίζουμε τις συναρτήσεις ζήτησης των καταναλωτων,μεγιστοποιωντας χρησιμότητες υπό τον εισοδηματικό περιορισμό

  $$A = (A_1, A_2) = \left(\frac{s}{4}, \frac{3s}{4p_2}\right)$$

  $$B = (B_1, B_2) = \begin{matrix} (0, t) & & p_2 \prec 1 \\ (B_1 + B_2 = t) & \text{if} & p_2 = 1 \\ (tp_2, 0) & & p_2 \succ 1 \end{matrix}$$

- Εξισώνουμε πρόσφορα και ζήτηση σε όλες τις αγορές

  $$A_1 + B_1 = s \Leftrightarrow B_1 = \frac{3s}{4}$$

  $$A_2 + B_2 = t \Leftrightarrow \frac{3s}{4p_2} + B_2 = t$$

- Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας

Περίπτωση 1 $\frac{s}{t} \succ \frac{4}{3}$

$$A = \left(\frac{s}{4}, t\right)$$

$$B = \left(\frac{3s}{4}, 0\right)$$

$$p_2 = \frac{3s}{4t}$$

Περιπτωση2 $\frac{1}{3} \prec \frac{s}{t} \le \frac{4}{3}$

$$A = \left(\frac{s}{4}, \frac{3s}{4}\right)$$

$$B = \left(\frac{3s}{4}, t - \frac{3s}{4}\right)$$

$$p_2 = 1$$

Υπολογισμός των σημείων Pareto

$$\max\ U_A$$

$$U_B \geq \bar{U}_B$$

$$A_1 + B_1 = s$$

$$A_2 + B_2 = t$$

η λύση είναι

- $\bar{U}_B \leq 0$

$$A = (s, t), B = (0, 0)$$

- $0 \prec \bar{U}_B \prec s - \dfrac{t}{3}$

$$A = (s - \bar{U}_B, t), B = (\bar{U}_B, 0)$$

- $s - \dfrac{t}{3} \leq \bar{U}_B \leq s + t$

$$A_1 = \frac{s + t - \bar{U}_B}{4}, A_2 = 3A_1$$

$$B_1 = s - A_1, B_2 = t - 3A_1$$

- $s + t \prec \bar{U}_B$

δεν υπάρχει λύση