ΠΑΡΟΧΗ ΔΗΜΟΣΙΩΝ ΑΓΑΘΩΝ
(παράδειγμα σχεδιασμού συμβολαίων υπό συνθήκες κρυμμένης πληροφορίας και πολλούς παίκτες)

Έστω οικονομία με δυο παίκτες ,1και 2,και δυο αγαθά ,το ιδιωτικό L και το δημόσιο x.

- Προτιμήσεις. $u_i = L_i + \theta_i x, i = 1,2$ με τα $\theta_i \in (0,\theta)$ με το θ αρκετά μικρό
- Τεχνολογία .Το δημόσιο παράγεται από το ιδιωτικό με συνάρτηση παραγωγής $\hat{x} = \sqrt{2\hat{L}}$
- Περιούσιες .Ο κάθε παίκτης έχει μια μονάδα του ιδιωτικού αγαθου,και τα μισά κέρδη της επιχείρησης που παράγει το $\hat{x}$

1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

1. Ορίζουμε τιμές p, w
2. τυποποιούμε $w = 1$
3. μεγιστοποίηση κέρδους

   $$\Pi = p\hat{x} - w\hat{L} = p\hat{x} - \frac{\hat{x}^2}{2}$$

   $\frac{d\Pi}{d\hat{x}} = 0$ δίνει

   $$\boxed{\hat{x} = p} \text{ supply function for x} \tag{1}$$

   $$\boxed{\hat{L} = \frac{p^2}{2}} \text{ demand function for labor} \tag{2}$$

4. μεγιστοποίηση χρησιμοτήτων
   ο παίκτης 1 λύνει

   $$\max u_1 = L_1 + \theta_1 (x_1 + x_2)$$

   $$\text{subject to } px_1 + L_1 \leq 1 + \frac{\Pi}{2}$$

   η το ισοδύναμο πρόβλημα

   $$\max u_1 = 1 + \frac{\Pi}{2} + (\theta_1 - p) x_1 + \theta_1 x_2$$

   $$\text{subject to } 0 \leq x_1 \leq \frac{1 + \frac{\Pi}{2}}{p}$$

   η λύση είναι η ζήτηση του 1 για το x.

$$\boxed{x_1 = \begin{cases} \dfrac{1+\frac{\Pi}{2}}{p} & \text{if} \quad p < \theta_1 \\ \text{anything in } \left[0, \dfrac{1+\frac{\Pi}{2}}{p}\right] & \text{if} \quad p = \theta_1 \\ 0 & \text{if} \quad p > \theta_1 \end{cases}} \tag{3}$$

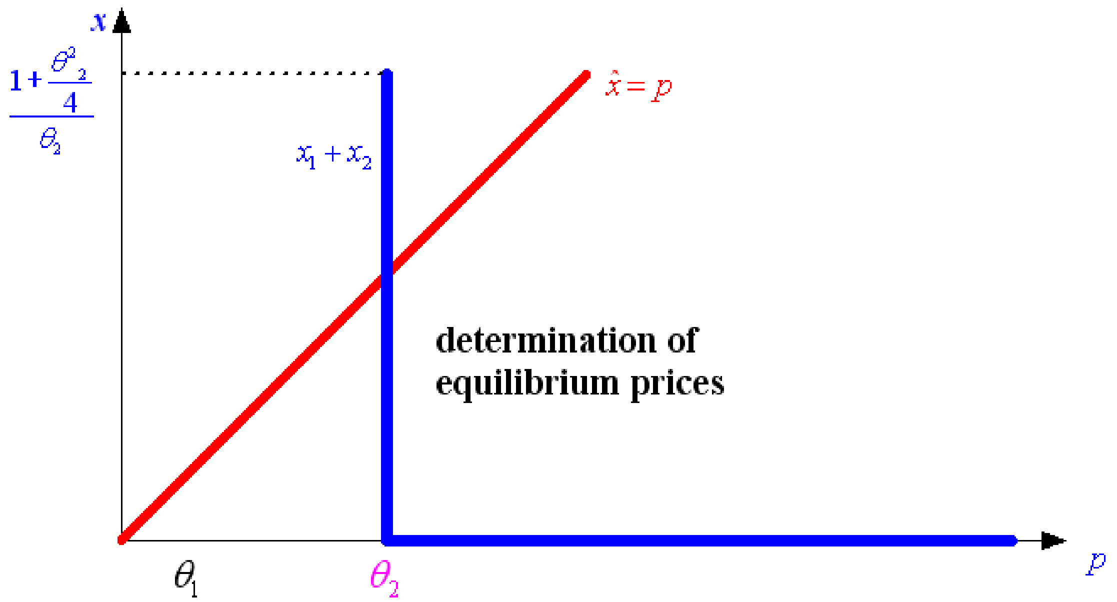
ομοίως για τον παίκτη 2 έχουμε

$$\boxed{x_2 = \begin{cases} \dfrac{1+\frac{\Pi}{2}}{p} & \text{if} \quad p < \theta_2 \\ \text{anything in } \left[0, \dfrac{1+\frac{\Pi}{2}}{p}\right] & \text{if} \quad p = \theta_2 \\ 0 & \text{if} \quad p > \theta_2 \end{cases}} \tag{4}$$

5. Συνθήκες ισορροπίας

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{x} = x_1 + x_2 \\ 2 = L_1 + L_2 + \hat{L} \end{array}} \tag{5}$$

Λύνουμε την πρώτη υποθέτοντας $\theta_1 \prec \theta_2$



η ισορροπία είναι

$$p=\theta_2$$
$$x_1=0, L_1=1+\frac{\theta_2^{\,2}}{4}, u_1=1+\frac{\theta_2^{\,2}}{4}+\theta_1\theta_2 \qquad (6)$$
$$x_2=\theta_2, L_2=1+\frac{\theta_2^{\,2}}{4}-\theta_2^{\,2}, u_2=1+\frac{\theta_2^{\,2}}{4}+\theta_2^{\,2}$$

2.ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ PARETO

Βρίσκουμε τα σημεία παρετο που αντιστοιχούν στις χρησιμότητες ισορροπίας, Δηλαδή λύνουμε

$$\max u_1 = L_1+\theta_1 x$$
subject to
$$u_2 = L_2+\theta_2 x \ge \bar{u}_2$$
$$L_1+L_2+\frac{x^2}{2}\le 2$$

η λύση είναι

$$\boxed{x=\theta_1+\theta_2} \qquad (7)$$
$$\boxed{L_1+L_2+\frac{x^2}{2}=2} \qquad (8)$$
$$L_2+\theta_2 x=\bar{u}_2 \qquad (9)$$

η λύση αυτή ισχύει όταν το $\bar{u}_2$ είναι αρκετά κοντά στη χρησιμότητα ισορροπίας $1+\frac{\theta_2^{\,2}}{4}+\theta_2^{\,2}$.

Συγκρίνοντας 7 και 6 συμπεραίνουμε ότι η ανταγωνιστική ισορροπία δεν είναι άριστη κατά παρετο,και ότι η διόρθωση απαιτεί γνώση των θ_i.

3.ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΑΠΟΚΑΛΥΨΗΣ

1. Ο παίκτης i=1,2 δηλώνει $\hat{\theta}_i \in (0,\theta)$
2. ο μηχανισμός προσδιορίζει την ποσότητα του δημόσιου αγαθού $x=\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2$ και τις φορολογίες $t_i(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)=1-L_i$
3. Παίγνιο οριζόμενο από το μηχανισμό

$$\begin{aligned} u_1(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\theta_1) &= 1-t_1(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)+\theta_1(\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2) \\ u_2(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\theta_2) &= 1-t_2(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)+\theta_2(\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2) \end{aligned} \qquad (10)$$

4. περιορισμοί αλήθειας

$$\boxed{\begin{array}{l} u_1\left(\theta_1,\hat{\theta}_2,\theta_1\right)\geq u_1\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\theta_1\right) \\ u_2\left(\hat{\theta}_1,\theta_2,\theta_2\right)\geq u_2\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\theta_2\right) \\ \forall\hat{\theta}_1,\forall\hat{\theta}_2,\forall\theta_1,\forall\theta_2\in\left(0,\theta\right)\end{array}} \qquad (11)$$

η 11 σημαίνει ότι η u_i μεγιστοποιείται όταν ο παίκτης i δηλώνει την αλήθεια $\left(\hat{\theta}_i=\theta_i\right)$.Οι αναγκαίες συνθήκες είναι

$$\left.\frac{\partial u_1\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\theta_1\right)}{\partial\hat{\theta}_1}\right]_{\hat{\theta}_1=\theta_1}=0 \qquad (12)$$

$$\left.\frac{\partial u_2\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\theta_2\right)}{\partial\hat{\theta}_2}\right]_{\hat{\theta}_2=\theta_2}=0 \qquad (13)$$

από τις 12,13 και 10

$$\boxed{\frac{\partial t_1\left(\theta_1,\theta_2\right)}{\partial\theta_1}=\theta_1} \qquad (14)$$

$$\boxed{\frac{\partial t_2\left(\theta_1,\theta_2\right)}{\partial\theta_2}=\theta_2} \qquad (15)$$

οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων είναι ο

5. μηχανισμός ο οποίος εξασφαλίζει την αποκαλυξη της αληθούς τιμής των θ_i και την παροχή της αντίστοιχης, αριστης,ποσοτητας του δημόσιου αγαθού $x=\theta_1+\theta_2$

$$\boxed{t_1\left(\theta_1,\theta_2\right)=t_1\left(0,\theta_2\right)+\frac{\theta_1^{\,2}}{2}} \qquad (16)$$

$$\boxed{t_2\left(\theta_1,\theta_2\right)=t_2\left(\theta_1,0\right)+\frac{\theta_2^{\,2}}{2}} \qquad (17)$$

4.ΔΙΛΗΜΜΑ ΑΛΗΘΕΙΑ /ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ

Οι 7,8,16, και 17 είναι **<u>ασύμβατες,</u>**

διοτι μας δινουν

$$t_1\left(0,\theta_2\right)+t_2\left(\theta_1,0\right)=\theta_1\theta_2\ ,\ \forall\theta_1\forall\theta_2 \qquad (18)$$

παραγωγιζοντας ως προς θ_1

$$\frac{\partial t_2\left(\theta_1,0\right)}{\partial\theta_1}=\theta_2\,.$$

παραγωγιζοντας ως προς θ_2

0=1,αντιφαση.

Ειδικη περιπτωση .Το διλημμα **δεν υπαρχει** όταν οι προτιμησεις ενός παικτη ,εστω του 1,είναι γνωστες σε ολους,διοτι τοτε το t_1 δεν υποκειται στην 16,και μπορει να χρησιμοποιηθει για την 18.Στο παραδειγμα που εξετασαμε, είναι γνωστο σε ολους.οτι $\boxed{\theta_1 = 0}$ Τοτε η18 συνεπαγεται

$$t_1(\theta_2) = -t_2(0) \ , \forall \theta_2 \tag{19}$$

και η 17 γινεται

$$t_2(\theta_2) = t_2(0) + \frac{\theta_2^{\ 2}}{2} \ , \forall \theta_2 \tag{20}$$

οι περιορισμοι εφικτοτητας $t_i(\theta_2) \leq 1 \ \ \forall \theta_2 \in (0, \theta)$ και οι 19,20 συνεπαγονται

$$-1 \leq t_2(0) \leq 1 - \frac{\theta^2}{2} \tag{21}$$

οι 19,20 ,21 περιγραφουν τους μηχανισμους που εξασφαλιζουν αληθεια και αποτελεσματικοτητα στην ειδικη περιπτωση

5.ΔΙΛΗΜΜΑ ΑΛΗΘΕΙΑ /ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ

παραμενουμε στην ειδικη περιπτωση που ολοι ξερουν ότι $\theta_1 = 0$.Εξεταζουμε αν μπορουμε να ικανοποιουνται οι **περιορισμοι συμμετοχης**

$u_i(\text{mechanism}) \geq u_i(\text{competitive equilibrium}) \ , \forall \theta_2 \in (0, \theta)$

απο τις 10,19,20 και $\theta_1 = 0$ εχουμε

$u_1(\text{mechanism}) = 1 + t_2(0)$

$u_2(\text{mechanism}) = 1 - t_2(0) + \frac{\theta_2^{\ 2}}{2}$

από την 6,

$u_i(\text{competitive equilibrium}) = 1 + \frac{\theta_2^{\ 2}}{4}$

αρα οι περιορισμοι συμμετοχης γινονται

$1 + t_2(0) \geq 1 + \frac{\theta_2^{\ 2}}{4}, \forall \theta_2 \in (0, \theta)$

$1 - t_2(0) + \frac{\theta_2^{\ 2}}{2} \geq 1 + \frac{\theta_2^{\ 2}}{4}, \forall \theta_2 \in (0, \theta)$

και συνεπαγονται

$t_2(0) = \frac{\theta_2^{\ 2}}{4}, \forall \theta_2 \in (0, \theta)$,αντιφαση