

# Ποσοτικές Μέθοδοι στην Διαχείριση Κινδύνου: Πιθανότητες ΕΝΟΤΗΤΑ 1

A. N. Γιαννακόπουλος

Ο.Π.Α

Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026

## 1 Δεσμευμένη μέση τιμή

- Δεσμευμενη μεση τιμή ως προς γεγονός
- Δεσμευμενη μεση τιμή ως προς διακριτή τυχαία μεταβλητή
- Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς διαμέριση
- Ανεξαρτησία και δεσμευμένη μέση τιμή
- Υπο συνθήκη μέση τιμή ως προς  $\sigma$ -άλγεβρα

# Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς γεγονός

## Ορισμός

Ας θεωρήσουμε ένα δειγματικό χώρο  $\Omega$  και ένα γεγονός  $A \subset \Omega$ , τέτοιο ώστε  $P(A) > 0$ . Αν  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια τυχαία μεταβλητή, μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα

$$\mathbb{E}^A[X] := \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A] = \sum_{\omega \in A} X(\omega) P(\{\omega\})$$

Η ποσότητα αυτή είναι η αναμενόμενη τιμή της  $X$  αν περιοριστούμε στα γεγονότα τα οποία ανήκουν στο  $A$ .

## Ορισμός

Ας θεωρήσουμε ένα δειγματικό χώρο  $\Omega$  και ένα γεγονός  $A \subset \Omega$ , τέτοιο ώστε  $P(A) > 0$ . Αν  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια τυχαία μεταβλητή, μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα

$$\mathbb{E}[X | A] := \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}^A[X] = \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A].$$

Η ποσότητα αυτή ονομάζεται η δεσμευμένη μέση τιμή της  $X$  ως προς το γεγονός  $A$ .

Μπορούμε να δούμε ότι η ποσότητα  $\mathbb{E}[X \mid A]$  και η δεσμευμένη κατανομή  $P_A$  σχετίζονται μεταξύ τους.

### Πρόταση

Ισχυει ότι

$$\mathbb{E}[X \mid A] = \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{P_A}[X],$$

όπου

$$P_A(B) := P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \forall B \subset \Omega.$$

είναι η δεσμευμένη κατανομή ως προς το γεγονός  $A$ .

### Απόδειξη.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \mid A] &= \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_A] = \frac{1}{P(A)} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbf{1}_A(\omega) P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \frac{1}{P(A)} P(\{\omega\} \cap A) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P_A(\{\omega\}) = \mathbb{E}_{P_A}[X]. \end{aligned}$$



## Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς διακριτή τυχαία μεταβλητή

Έστω  $\Omega$  ένας δειγματικός χώρος και  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  δύο τυχαίες μεταβλητές με την  $Y$  διακριτή,  $Rg(Y) = \{y_1, y_2, \dots\}$

### Ορισμός

Η δεσμευμένη μέση τιμή της  $X$  ως προς την  $Y$  είναι η **τυχαία μεταβλητή**  $\mathbb{E}[X | Y] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία ορίζεται ως

$$\mathbb{E}[X | Y](\omega) = \mathbb{E}[X | Y = y_i] = \mathbb{E}[X | A_i] = \frac{1}{P(A_i)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_i}] \text{ αν } Y(\omega) = y_i,$$

όπου  $A_i = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\} \subset \Omega$

Ο όρισμός αυτός μας δίνει την καλύτερη δυνατή πρόβλεψη που μπορούμε να έχουμε για τις τιμές που μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή  $X$  δεδομένου ότι γνωρίζουμε ότι η τυχαία μεταβλητή  $Y$  πήρε την τιμή  $y_i \in Rg(Y)$ .

## Παράδειγμα

Δίνονται οι ακόλουθες επενδύσεις

A. Μια επένδυση που αποφέρει κέρδος 1 ευρώ αν η κίνηση της αγοράς είναι ανοδική (και ζημιά 1 αλλιώς) σε χρονικό ορίζοντα 2 περιόδων.  $X$  η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει την χρηματορροή της επένδυσης A.

B. Μια επένδυση που αποφέρει κέρδος 1 ευρώ αν η κίνηση της αγοράς την πρώτη περίοδο είναι ανοδική (και ζημιά 1 αλλιώς) και 2 ευρώ αν η κίνηση της αγοράς την δεύτερη περίοδο είναι ανοδική (και ζημιά 2 αλλιώς).

$Y$  η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει την χρηματορροή της επένδυσης B.

Υπολογίστε την  $\mathbb{E}[X \mid Y]$  και την  $\mathbb{E}[Y \mid X]$ .

Συμβολίζοντας με  $H_i$  και  $T_i$  την ανοδική και την καθοδική κίνηση της αγοράς στην  $i$  περίοδο αντιστοίχως μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τις τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$ :

$$X(\omega) = \begin{cases} -2 & \text{αν } \omega \in \{T_1 T_2\}, \\ 0 & \text{αν } \omega \in \{T_1 H_2, H_1 T_2\}, \\ +2 & \text{αν } \omega \in \{H_1 H_2\}, \end{cases}$$

$$Rg(X) = \{-2, 0, 2\}$$

$$X^{-1}(\{-2\}) = \{T_1 T_2\}, \quad X^{-1}(\{0\}) = \{T_1 H_2, H_1 T_2\}, \quad X^{-1}(\{2\}) = \{H_1 H_2\},$$

$$\Delta(X) = \{A_1, A_2, A_3\} = \{\{T_1 T_2\}, \{T_1 H_2, H_1 T_2\}, \{H_1 H_2\}\}$$

$\Delta(X)$  η διαμέριση του  $\Omega$  που παράγει η τ.μ.  $X$ .

Συμβολίζοντας με  $H_i$  και  $T_i$  την ανοδική και την καθοδική κίνηση της αγοράς στην  $i$  περίοδο αντιστοίχως μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τις τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$ :

$$Y(\omega) = \begin{cases} -3 & \text{αν } \omega \in \{T_1 T_2\}, \\ -1 & \text{αν } \omega \in \{H_1 T_2\}, \\ +1 & \text{αν } \omega \in \{T_1 H_2\}, \\ +3 & \text{αν } \omega \in \{H_1 H_2\}, \end{cases}$$

$$Rg(Y) = \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$Y^{-1}(\{-3\}) = \{T_1 T_2\}, \quad Y^{-1}(\{-1\}) = \{H_1 T_2\},$$

$$Y^{-1}(\{1\}) = \{T_1 H_2\}, \quad X^{-1}(\{3\}) = \{H_1 H_2\},$$

$$\Delta(Y) = \{B_1, B_2, B_3, B_4\} = \{\{T_1 T_2\}, \{H_1 T_2\}, \{T_1 H_2\}, \{H_1 H_2\}\}$$

$\Delta(Y)$  η διαμέριση του  $\Omega$  που παράγει η τ.μ.  $Y$ .

Παρατηρούμε ότι η  $\Delta(Y)$  είναι **λεπτότερη** της  $\Delta(X)$

(για την ακρίβεια είναι η πιο λεπτή διαμέριση που υπάρχει στο  $\Omega$  εφόσον αποτελείται αποκλειστικά απο μονοσύνολα).



Υπολογισμός της  $\mathbb{E}[Y \mid X]$ 

Θα χρειαστούμε την διαμέριση

$$\begin{aligned}\Delta(X) &= \{A_1, A_2, A_3\} = \{\{T_1 T_2\}, \{T_1 H_2, H_1 T_2\}, \{H_1 H_2\}\} \\ &= \{\{X = -2\}, \{X = 0\}, \{X = 2\}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y \mid X = -2] &= \mathbb{E}[Y \mid A_1] = \frac{1}{P(A_1)} \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{A_1}] \\ &= \frac{1}{P(\{T_1 T_2\})} Y(T_1 T_2) P(\{T_1 T_2\}) = Y(T_1 T_2) = -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y \mid X = 0] &= \mathbb{E}[Y \mid A_2] = \frac{1}{P(A_2)} \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{A_2}] \\ &= \frac{1}{P(\{T_1 H_2, H_1 T_2\})} \left[ Y(T_1 H_2) P(\{T_1 H_2\}) + Y(H_1 T_2) P(\{H_1 T_2\}) \right] \\ &= \frac{1}{1/2} \left[ 1 \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{1}{4} \right] = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y \mid X = +2] &= \mathbb{E}[Y \mid A_3] = \frac{1}{P(A_3)} \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{A_3}] \\ &= \frac{1}{P(\{H_1 H_2\})} Y(H_1 H_2) P(\{H_1 H_2\}) = Y(H_1 H_2) = +3\end{aligned}$$

Η τυχαία μεταβλητή  $Z_1 := \mathbb{E}[Y \mid X]$  είναι λοιπόν η

$$Z_1(\omega) := \mathbb{E}[Y \mid X](\omega) = \begin{cases} -3 & \text{αν } \omega \in \{T_1 T_2\}, \\ 0 & \text{αν } \omega \in \{T_1 H_2, H_1 T_2\}, \\ +3 & \text{αν } \omega \in \{H_1 H_2\}, \end{cases}$$

$$Rg(Z_1) = \{-3, 0, +3\}$$

$$Z_1^{-1}(\{-3\}) = \{T_1 T_2\}, \quad Z_1^{-1}(\{0\}) = \{T_1 H_2, H_1 T_2\}, \quad Z_1^{-1}(\{3\}) = \{H_1 H_2\},$$

$$\Delta(Z_1) = \{A_1, A_2, A_3\} = \{\{T_1 T_2\}, \{T_1 H_2, H_1 T_2\}, \{H_1 H_2\}\}$$

$\Delta(Z_1)$  η διαμέριση του  $\Omega$  που παράγει η τ.μ.  $X$ .

Παρατηρούμε ότι  $\Delta(Z_1) = \Delta(\mathbb{E}[Y \mid X]) = \Delta(X)$ !

# Υπολογισμός του $\mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X]]$

Η  $Z_1 := \mathbb{E}[Y \mid X]$  είναι μια τυχαία μεταβλητή οπότε έχει νόημα η ερώτηση 'Ποιά είναι η μέση τιμή της;'

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_1] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X]] \\ &= Z_1(T_1 T_2)P(\{T_1 T_2\}) + Z_1(T_1 H_2)P(\{T_1 H_2\}) \\ &\quad + Z_1(H_1 T_2)P(\{H_1 T_2\}) + Z_1(H_1 H_2)P(\{H_1 H_2\}) \\ &= (-3) \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 0 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} \\ &= (-3) \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 0\end{aligned}$$

Παρατηρείστε ότι

$$\mathbb{E}[Y] = (-3) \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = 0$$

Αρα

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X]] = \mathbb{E}[Y]!$$

# Υπολογισμός της $\mathbb{E}[X \mid Y]$

Θα χρειαστούμε την διαμέριση

$$\begin{aligned}\Delta(Y) &= \{B_1, B_2, B_3, B_4\} = \{\{T_1 T_2\}, \{H_1 T_2\}, \{T_1 H_2\}, \{H_1 H_2\}\} \\ &= \{\{Y = -3\}, \{Y = -1\}, \{Y = +1\}, \{Y = +3\}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \mid Y = -3] &= \mathbb{E}[X \mid B_1] = \frac{1}{P(B_1)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{B_1}] \\ &= \frac{1}{P(\{T_1 T_2\})} X(T_1 T_2) P(\{T_1 T_2\}) = X(T_1 T_2) = -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \mid Y = -1] &= \mathbb{E}[X \mid B_2] = \frac{1}{P(B_2)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{B_2}] \\ &= \frac{1}{P(\{H_1 T_2\})} X(H_1 T_2) P(\{H_1 T_2\}) = X(H_1 T_2) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \mid Y = 1] &= \mathbb{E}[X \mid B_3] = \frac{1}{P(B_3)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{B_3}] \\ &= \frac{1}{P(\{T_1 H_2\})} X(T_1 H_2) P(\{T_1 H_2\}) = X(T_1 H_2) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \mid Y = +3] &= \mathbb{E}[X \mid B_4] = \frac{1}{P(B_4)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{B_4}] \\ &= \frac{1}{P(\{H_1 H_2\})} X(H_1 H_2) P(\{H_1 H_2\}) = X(H_1 H_2) = +2\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}[X | Y](\omega) = \begin{cases} -2 & \text{αν } \omega \in \{T_1 T_2\}, \\ 0 & \text{αν } \omega \in \{T_1 H_2, H_1 T_2\}, \\ +2 & \text{αν } \omega \in \{H_1 H_2\}, \end{cases} = X(\omega)$$

Γνώση της  $Y$  μας παρέχει πλήρη γνώση της  $X$ !

Δεν συμβαίνει το ίδιο αν έχουμε γνώση της  $X$

Το ποσό της πληροφορίας που κουβαλάει για την αγορά η  $Y$  είναι διαφορετικό απο αυτό που κουβαλάει η  $X$ !

Αυτό έχει να κάνει με την διαμέριση που παράγουν οι  $X$  και  $Y$  ή ισοδύναμα με την μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα που περιέχει όλα τα σύνολα που περιέχονται στις αντίστοιχες διαμερίσεις.

Η  $\Delta(Y)$  είναι πιο λεπτή απο την  $\Delta(X)$ , ή ισοδύναμα  $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$ .

$$\begin{aligned}\Delta(X) &= \{A_1, A_2, A_3\} = \{\{T_1 T_2\}, \{T_1 H_2, H_1 T_2\}, \{H_1 H_2\}\}, \\ \Delta(Y) &= \{B_1, B_2, B_3, B_4\} = \{\{T_1 T_2\}, \{H_1 T_2\}, \{T_1 H_2\}, \{H_1 H_2\}\}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2 \cup B_3, \quad A_3 = B_4,$$

δηλ. **καθε σύνολο που ανήκει στην  $\Delta(Y)$  είναι υποσύνολο κάποιου συνόλου που ανήκει στην  $\Delta(X)$ !**

Για τον λόγο αυτό λέμε ότι η  $\Delta(Y)$  είναι **πιο λεπτή** απο την  $\Delta(X)$  και συμβολίζουμε

$$\Delta(Y) << \Delta(X)$$

Η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα που περιέχει τα σύνολα που απαρτίζουν την  $\Delta(X)$ , δηλαδή τα  $A_1, A_2, A_3$ , είναι η

$$\begin{aligned}\Delta(X) &= \{\emptyset, \Omega, A_1, A_2, A_3, A_1^c, A_2^c, A_3^c\} \\ &= \{\emptyset, \Omega, A_1, A_2, A_3, A_2 \cup A_3, A_1 \cup A_3, A_1 \cup A_2\}\end{aligned}$$

Η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα που περιέχει τα σύνολα που απαρτίζουν την  $\Delta(Y)$ , δηλαδή τα  $B_1, B_2, B_3, B_4$ , είναι η

$$\begin{aligned}\Delta(Y) &= \{\emptyset, \Omega, B_1, B_2, B_3, B_4, B_1 \cup B_2, B_1 \cup B_3, B_1 \cup B_4, B_2 \cup B_3, \\ &\quad B_2 \cup B_4, B_3 \cup B_4, B_1^c, B_2^c, B_3^c, B_4^c\} \\ &= \{\emptyset, \Omega, A_1, B_2, B_3, , A_3, B_1 \cup B_2, B_1 \cup B_3, B_1 \cup B_4, A_3, \\ &\quad B_2 \cup B_4, B_3 \cup B_4, A_2 \cup A_3, B_2^c, A_1 \cup A_3, A_1 \cup A_2\}.\end{aligned}$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\Delta(X) \subset \Delta(Y)$$

# Βασικές ιδιότητες της τυχαίας μεταβλητής $\mathbb{E}[X \mid Y]$

## Πρόταση

1. Η τυχαία μεταβλητή  $\mathbb{E}[X \mid Y]$  παράγει την ίδια διαμέριση του δειγματικού χώρου με την τυχαία μεταβλητή  $Y$ .
2. Ισχύει ότι  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \mathbb{E}[X]$ .
3. Έστω  $Y, Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  δυο τυχαίες μεταβλητές οι οποίες παράγουν την ίδια διαμέριση, τότε  $\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X \mid Z]$ .

## Παράδειγμα

Υπολογίστε την  $\mathbb{E}[X \mid Y]$  και την  $\mathbb{E}[X \mid Y^2]$ .



### Απόδειξη.

1. Εφόσον  $Rg(Y)$  αριθμήσιμο σύνολο ισχυει και οτι  $Rg(\mathbb{E}[X | Y])$  είναι αριθμήσιμο σύνολο. Έστω  $Rg(Y) = \{y_1, y_2, \dots\}$  και  $Rg(\mathbb{E}[X | Y]) = \{z_1, z_2, \dots\}$ .

Μπορούμε να δούμε απο τον ορισμο της  $\mathbb{E}[X | Y]$  ότι για κάθε  $i$  ισχύει

$$\mathbb{E}[X | Y]^{-1}(\{z_i\}) = \{\omega \in \Omega : \mathbb{E}[X | Y](\omega) = z_i\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\} =$$

Απο αυτό βλέπουμε ότι οι τυχαιες μεταβλητές  $\mathbb{E}[X | Y]$  και  $Y$  παράγουν τις ιδιες διαμερίσεις του δειγματικού χώρου  $\Omega$ .



Απόδειξη.

2. Ας υποθέσουμε ότι  $Rg(\mathbb{E}[X | Y]) = \{z_1, z_2, \dots\}$  και  $Rg(Y) = \{y_1, y_2, \dots\}$ .  
Έχουμε από τον ορισμό της  $\mathbb{E}[X | Y]$  ότι για κάθε  $i$

$$\mathbb{E}[X | Y](\omega) = z_i \text{ αν } Y(\omega) = y_i.$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] = \sum_i z_i \bar{P}(\mathbb{E}[X | Y] = z_i) = \sum_i z_i \bar{P}(Y = y_i).$$

Από τον ορισμό της  $\mathbb{E}[X | Y]$  μπορούμε να δούμε ότι για κάθε  $i$ ,

$$z_i = \mathbb{E}[X | \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\}] = \frac{1}{\bar{P}(Y = y_i)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_i}]$$

όπου  $A_i = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\}$ .

Μπορούμε να δούμε επίσης ότι  $\bigcup_i A_i = \Omega$  και  $\sum_i \mathbf{1}_{A_i} = 1$ .

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] &= \sum_i \frac{1}{\bar{P}(Y = y_i)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_i}] \bar{P}(Y = y_i) \\ &= \sum_i \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[X \sum_i \mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[X]. \end{aligned}$$



## Παράδειγμα (Το μοντέλο Cramér-Lundberg )

Μια ασφαλιστική εταιρεία δέχεται ένα τυχαίο αριθμό αιτήσεων  $N(t)$  για αποζημίωση σε ένα καθορισμένο χρονικό ορίζοντα  $t$ , και το ύψος της κάθε αίτησης είναι μια τυχαία μεταβλητή  $X_i$ .

Αν η αναμενόμενη τιμή του πλήθους των αιτήσεων  $\mathbb{E}[N(t)]$  είναι γνωστή και ίση με  $\bar{N}$  και η αναμενόμενη τιμή του ύψους της κάθε αίτησης είναι επίσης γνωστό και ίσο προς  $\mathbb{E}[X_i] = \bar{X}$ , υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή του συνολικού ύψους των αποζημιώσεων στον χρονικό ορίζοντα.

Ισχύει ότι  $X = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ .

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid N(t)]] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X \mid N(t) = n] P(N(t) = n) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] P(N(t) = n) = \sum_{i=1}^{\infty} n \bar{X} P(N(t) = n) \\ &= \bar{X} \sum_{i=1}^{\infty} n P(N(t) = n) = \bar{X} \mathbb{E}[N(t)] = \bar{N} \bar{X}.\end{aligned}$$

# Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς διαμέριση

Έστω  $\Delta := \{A_1, \dots, A_n\}$  μια διαμεριση του δειγματικού χώρου  $\Omega$ , δηλαδή μια συλλογή απο συνολα με την ιδιότητα  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$  και  $\bigcup_i A_i = \Omega$ .

## Ορισμός

Η δεσμευμένη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ως προς την διαμέριση  $\Delta$ , ορίζεται ως η τυχαία μεταβλητή

$$\mathbb{E}[X \mid \Delta](\omega) := \mathbb{E}[X \mid A_1]\mathbf{1}_{A_1}(\omega) + \dots + \mathbb{E}[X \mid A_n]\mathbf{1}_{A_n}(\omega),$$

όπου

$$\mathbb{E}[X \mid A_i] = \frac{1}{P(A_i)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_i}].$$

δηλ.

$$\mathbb{E}[X \mid \Delta](\omega) = \mathbb{E}[X \mid A_i] \quad \text{αν} \quad \omega \in A_i$$

Επειδή μια διακριτή τυχαία μεταβλητή  $Y$  παράγει μια διαμέριση του δειγματικού χώρου  $\Omega$ , την  $\Delta_Y = \{A_i\}$  βάσει του κανόνα  $A_i = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\}$  για κάθε  $y_i \in Rg(Y)$ , μπορούμε να δούμε ότι

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X \mid \Delta_Y]$$

## Πρόταση

- ① Η διαμεριση που παράγει στον  $\Omega$  η τυχαία μεταβλητή  $\mathbb{E}[X \mid \Delta]$  είναι η  $\Delta$ .
- ② Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε την τυχαία μεταβλητή  $\mathbb{E}[X \mid \Delta]$  σαν την μοναδική τυχαία μεταβλητή  $Z$  η οποία παράγει την διαμεριση  $\Delta$  και που έχει την ιδιότητα

$$\mathbb{E}_P[Z1_{A_i}] = \mathbb{E}_P[X1_{A_i}], \text{ για κάθε } A_i \in \Delta.$$

- ③ Έστω  $\Omega$  ένας δειγματικός χώρος,  $\Delta = \{A_i\}$  μια διαμέριση του και  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  μια τυχαία μεταβλητή. Ας ορίσουμε  $\mathbb{E}[X \mid \Delta]$  την δεσμευμένη μεση τιμή της  $X$  ως προς την διαμεριση  $\Delta$ . Ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_P[\mathbb{E}[X \mid \Delta]] = \mathbb{E}_P[X].$$

- ④ Ας υποθέσουμε οτι η τυχαία μεταβλητή  $X$  παράγει την διαμεριση  $\Delta$  για τον δειγματικό χώρο. Τότε,  $\mathbb{E}_P[X \mid \Delta] = X$ .
- ⑤ Ας υποθεσουμε οτι η τυχαία μεταβλητη  $Y$  παράγει την διαμεριση  $\Delta$  ενώ η  $X$  όχι. Τότε

$$\mathbb{E}[XY \mid \Delta] = Y\mathbb{E}[X \mid \Delta].$$

- ⑥ Ας υποθέσουμε οτι εχουμε 2 διαμερίσεις του  $\Omega$ ,  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$  όπου η  $\Delta_2$  είναι πιο λεπτή απο την  $\Delta_1$ . Τότε,

$$\mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[X \mid \Delta_1] \mid \Delta_2] = \mathbb{E}_P[X \mid \Delta_1].$$

# Απόδειξη

2. Ας θέσουμε  $Z = \mathbb{E}[X \mid \Delta]$ .

Για κάθε  $i$  ισχυει ότι

$$Z\mathbf{1}_{A_i} = \mathbb{E}_P[X \mid A_i]\mathbf{1}_{A_i}.$$

Μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P[Z\mathbf{1}_{A_i}] &= \sum_{\omega \in A_i} Z(\omega)P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A_i} \mathbb{E}[X \mid A_i]P(\{\omega\}) \\ &= \mathbb{E}[X \mid A_i] \sum_{\omega \in A_i} P(\{\omega\}) = \mathbb{E}[X \mid A_i]P(A_i) \\ &= \frac{1}{P(A_i)}\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A_i}]P(A_i) = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A_i}].\end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathbb{E}_P[Z\mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}_P[X\mathbf{1}_{A_i}], \text{ για κάθε } A_i \in \Delta. \quad (1)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπήρχε και μια δευτερη τυχαία μεταβλητή  $Y$  με την ιδια ιδιότητα, δηλαδη οτι η διαμέριση του  $\Omega$  η οποία παράγει είναι η  $\Delta$  και

$$\mathbb{E}_P[Y\mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}_P[X\mathbf{1}_{A_i}], \text{ για κάθε } A_i \in \Delta.$$

Εφόσον η  $Y$  παράγει την  $\Delta$  θα παίρνει την ιδια τιμή  $y_i$  για κάθε  $\omega \in A_i \in \Delta$ , δηλαδή  $Y(\omega) = y_i$ , αν  $\omega \in A_i$ . Όμοια  $Z(\omega) = z_i$  αν  $\omega \in A_i$ . Για να καθορίσουμε λοιπόν πλήρως τις τυχαίες μεταβλητές  $Z$  και  $Y$  αρκεί να καθορίσουμε τις τιμες που παίρνουν στα σύνολα που απαρτίζουν την διαμεριση. Αν  $y_i = z_i$  για κάθε  $i$  τότε  $Y = Z$  με την έννοια ότι  $Y(\omega) = Z(\omega)$  για κάθε  $\omega \in \Omega$ .

Γνωρίζουμε απο τον ορισμο της  $Z = \mathbb{E}[X | \Delta]$  ότι

$$z_i = \frac{1}{P(A_i)} \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_{A_i}] = \frac{1}{P(A_i)} \mathbb{E}_P[Z \mathbf{1}_{A_i}],$$

όπου χρησιμοποιήσαμε πρώρα τον ορισμό της  $Z$  και μετά την ιδιότητα (1).

Όμως θυμηθείτε οτι υποθέσαμε οτι  $\mathbb{E}_P[Z \mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}_P[Y \mathbf{1}_{A_i}]$  για κάθε  $i$ .

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{1}{P(A_i)} \mathbb{E}_P[Z \mathbf{1}_{A_i}] = \frac{1}{P(A_i)} \mathbb{E}_P[Y \mathbf{1}_{A_i}] \\ &= \frac{1}{P(A_i)} \sum_{\omega \in A_i} Y(\omega) P(\{\omega\}) = \frac{1}{P(A_i)} \sum_{\omega \in A_i} y_i P(\{\omega\}) \\ &= \frac{1}{P(A_i)} y_i \sum_{\omega \in A_i} P(\{\omega\}) = \frac{1}{P(A_i)} y_i P(A_i) = y_i, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ότι η  $Y$  παίρνει την ίδια τιμή  $y_i$  για οποιοδήποτε  $\omega \in A_i$  (εφόσον η  $Y$  παράγει την διαμέριση  $\Delta = \{A_i\}$ ). Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε  $i$ , ισχύει ότι  $z_i = y_i$  κατά συνέπεια,  $Z = Y$  άρα η  $Z = \mathbb{E}[X | \Delta]$  είναι μοναδική.

3. Ας θέσουμε  $Z = \mathbb{E}[X \mid \Delta]$  και  $z_i = \mathbb{E}[X \mid A_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Για οποιοδήποτε  $A_i \in \Delta$  αποδείξαμε ότι

$$\mathbb{E}_P[Z \mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_{A_i}]$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} Z(\omega) &:= \mathbb{E}[X \mid \Delta](\omega) := \mathbb{E}[X \mid A_1] \mathbf{1}_{A_1}(\omega) + \dots + \mathbb{E}[X \mid A_n] \mathbf{1}_{A_n}(\omega) \\ &= z_1 \mathbf{1}_{A_1}(\omega) + \dots + z_n \mathbf{1}_{A_n}(\omega), \end{aligned}$$

Απο την γραμμικότητα της μέσης τιμής μπορώ να υπολογίσω

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P[Z] &= \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[X \mid A_1] \mathbf{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{E}_P[X \mid A_n] \mathbf{1}_{A_n}] \\ &= \mathbb{E}_P[z_1 \mathbf{1}_{A_1} + \dots + z_n \mathbf{1}_{A_n}] \\ &= z_1 \mathbb{E}_P[\mathbf{1}_{A_1}] + \dots + z_n \mathbb{E}_P[\mathbf{1}_{A_n}] \\ &= z_1 P(A_1) + \dots + z_n P(A_n) \\ &= \frac{1}{P(A_1)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_1}] P(A_1) + \dots + \frac{1}{P(A_n)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_n}] P(A_n) \\ &= \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_{A_1}] + \dots + \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_{A_n}] \\ &= \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_{A_1} + \dots + X \mathbf{1}_{A_n}] \\ &= \mathbb{E}_P[X (\mathbf{1}_{A_1} + \dots + \mathbf{1}_{A_n})] = \mathbb{E}[X], \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $\mathbf{1}_{A_1} + \dots + \mathbf{1}_{A_n} = 1$ .



4. Έστω  $\Delta = \{A_i\}$  η διαμεριση η οποία παράγει η τυχαία μεταβλητή  $X$ . Αυτό σημαίνει ότι η  $X$  μπορεί να γραφεί ως

$$X = c_1 \mathbf{1}_{A_1} + \cdots + c_n \mathbf{1}_{A_n},$$

για κάποιες σταθερές  $c_1, \dots, c_n$ . Τότε, για κάθε  $i$ , έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_P[X \mid A_i] = \frac{1}{P(A_i)} \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_{A_i}] = \frac{1}{P(A_i)} c_i P(A_i) = c_i.$$

Απο τον ορισμο όμως της τυχαίας μεταβλητής  $\mathbb{E}_P[X \mid \Delta]$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \mid \Delta] &= \mathbb{E}[X \mid A_1] \mathbf{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{E}[X \mid A_n] \mathbf{1}_{A_n} \\ &= c_1 \mathbf{1}_{A_1} + \cdots + c_n \mathbf{1}_{A_n} = X. \end{aligned}$$

## Πρόταση

Έστω  $\Omega$  ένας δειγματικός χώρος και  $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$  μια διαμέριση του. Έστω  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  μια τυχαία μεταβλητή η οποία για την πλήρη της περιγραφή χρειάζεται μια πιο λεπτή διαμέριση από την  $\Delta$  π.χ. την  $\Delta' = \{B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1}, \dots, B_m\}$ .

Η καλύτερη προσέγγιση της  $X$  από μια τυχαία μεταβλητή  $Y$  που παράγει την διαμέριση  $\Delta$  είναι η  $\mathbb{E}[X \mid \Delta]$  υπο την έννοια ότι ελαχιστοποιεί το μεσο τετραγωνικό σφάλμα  $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ , δηλαδή

$$\mathbb{E}[(X - Z)^2] = \min_{Y \in \sigma(\Delta)} \mathbb{E}[(Y - Z)^2],$$

και με  $\sigma(\Delta)$  συμβολίζουμε το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών που παράγουν την διαμέριση  $\Delta$ .

Το σύνολο  $\sigma(\Delta)$  δεν είναι τιποτε άλλο από το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών την μορφής

$$Y = x_1 \mathbf{1}_{A_1} + x_2 \mathbf{1}_{A_2} + \dots + x_n \mathbf{1}_{A_n} \simeq (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

# Απόδειξη

Η απόδειξη βασίζεται στην ιδιότητα που έχει η δεσμευμένη μέση τιμή ότι αν  $Z = \mathbb{E}[X \mid \Delta]$  τότε  $\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A_i}]$  για κάθε  $A_i \in \Delta$ .

Την σχέση αυτή μπορούμε να την ξαναγράψουμε χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα της μεσης τιμής ως

$$\mathbb{E}[(Z - X)\mathbf{1}_{A_i}] = 0, \text{ για κάθε } A_i \in \Delta.$$

Οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή  $Y'$  η οποία παράγει την  $\Delta$  μπορεί να γραφεί με την μορφή

$$Y' = y'_1\mathbf{1}_{A_1} + \cdots y'_n\mathbf{1}_{A_n}$$

για αυθαίρετα (ντετερμινιστικά)  $y'_i \in \mathbb{R}$ . Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - Z)Y'] &= \mathbb{E}[(X - Z)(y'_1\mathbf{1}_{A_1} + \cdots y'_n\mathbf{1}_{A_n})] \\ &= \mathbb{E}[y'_1(X - Z)\mathbf{1}_{A_1} + \cdots y'_n(X - Z)\mathbf{1}_{A_n}] \\ &= y'_1\mathbb{E}[(X - Z)\mathbf{1}_{A_1}] + \cdots + y'_n\mathbb{E}[(X - Z)\mathbf{1}_{A_n}] \\ &= y'_1 0 + \cdots + y'_n 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathbb{E}[(X - Z)Y'] = 0,$$

για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή  $Y'$  η οποία παράγει την διαμέριση  $\Delta$ . 

Ας πάρουμε τώρα μια οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή  $Y$  η οποία παράγει την  $\Delta$ .

Όμως,

$$\begin{aligned}(X - Y)^2 &= (X - Z + Z - Y)^2 \\ &= (X - Z)^2 + (Z - Y)^2 + 2(X - Z)(Z - Y)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X - Y)^2] &= \mathbb{E}[(X - Z)^2] + \mathbb{E}[(Z - Y)^2] + 2\mathbb{E}[(X - Z)(Z - Y)] \\ &= \mathbb{E}[(X - Z)^2] + \mathbb{E}[(Z - Y)^2] + 2\mathbb{E}[(X - Z)Y']\end{aligned}$$

όπου  $Y' = Z - Y$ .

Εφόσον οι  $Z$  και  $Y$  παράγουν τη διαμέριση  $\Delta$  και η τυχαία μεταβλητή  $Y' = Z - Y$  παράγει την διαμέριση  $\Delta$  οπότε  $\mathbb{E}[(X - Z)Y'] = 0$ .

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X - Y)^2] &= \mathbb{E}[(X - Z)^2] + \mathbb{E}[(Z - Y)^2] \geq \mathbb{E}[(X - Z)^2], \\ &\text{για κάθε } Y \in \sigma(\Delta)\end{aligned}\tag{2}$$

επειδή  $\mathbb{E}[(Z - Y)^2] \geq 0$ .

Η (2) μας εξασφαλίζει το ζητούμενο.

## Παράδειγμα

Μια μετοχή καθε χρονική στιγμή μπορεί να έχει ανοδικές αποδόσεις ( $H$ ) ή καθοδικές αποδόσεις ( $T$ ) με πιθανότητα  $1/2$ .

Έστω ότι έχουμε ένα παράγωγο προϊόν το οποίο μας αποφέρει 1 ευρώ αν η μετοχή ανέβει αλλά μας ζημιώνει κατά 1 ευρώ αν η μετοχή κατέβει.

Κρατάμε αυτό το προϊόν στην κατοχή μας για 2 χρονικές περιόδους. Ποια θα είναι η καλύτερη πρόβλεψη για το κέρδος μας συνολικά μέχρι και το τέλος των 2 περιόδων αν γνωρίζουμε τι έγινε στην αγορά σχετικά με την μετοχή κατά την πρώτη περίοδο;

Η αγορά (όπως περιγράφεται απο τις διακυμάνσεις της μετοχής) περιγράφεται απο τις ακόλουθες διαμερίσεις του δειγματικού χώρου:

Η μηδενική χρονική στιγμή ( $t = 0$ ) την διαμέριση  $\Delta_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ .

Η πρώτη χρονική στιγμή ( $t = 1$ ) την διαμεριση  $\Delta_1 = \{A_1, A_2\}$  όπου  $A_1 = \{H_1 H_2, H_1 T_2\}$ ,  $A_2 = \{T_1 H_2, T_1 T_2\}$ .

Η δευτερη χρονική στιγμή ( $t = 2$ ) την διαμεριση  $\Delta_2 = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ , όπου  $B_1 = \{H_1 H_2\}$ ,  $B_2 = \{H_1 T_2\}$ ,  $B_3 = \{T_1 H_2\}$ ,  $B_4 = \{T_1 T_2\}$ .

Η διαμέριση  $\Delta_2$  είναι πιο λεπτή απο την  $\Delta_1$  και η  $\Delta_1$  είναι πιο λεπτή απο την  $\Delta_0$ . Αυτό προκύπτει απο το οτι  $A_1 = B_1 \cup B_2$  και  $A_2 = B_3 \cup B_4$ .

Η τυχαία μεταβλητή  $X$  μπορεί να γραφει ως

$$X = 2\mathbf{1}_{B_1} + 0\mathbf{1}_{B_2} + 0\mathbf{1}_{B_3} + (-2)\mathbf{1}_{B_4}$$

Ας πάρουμε τώρα οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή  $Y$  η οποία παράγει την διαμεριση  $\sigma(\Delta_1)$ .

Αυτή θα είναι της μορφής

$$Y = x_1 \mathbf{1}_{A_1} + x_2 \mathbf{1}_{A_2}$$

όπου  $x_1, x_2$  αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί. Θα πρέπει να βρούμε τα  $x_1, x_2$  κατά τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται η ποσότητα  $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ .

Παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{1}_{A_1} = \mathbf{1}_{B_1 \cup B_2} = \mathbf{1}_{B_1} + \mathbf{1}_{B_2}$$

και

$$\mathbf{1}_{A_2} = \mathbf{1}_{B_3 \cup B_4} = \mathbf{1}_{B_3} + \mathbf{1}_{B_4}$$

(εφόσον  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  και  $B_3 \cap B_4 = \emptyset$ ).

Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned} Y &= x_1 \mathbf{1}_{A_1} + x_2 \mathbf{1}_{A_2} = x_1(\mathbf{1}_{B_1} + \mathbf{1}_{B_2}) + x_2(\mathbf{1}_{B_3} + \mathbf{1}_{B_4}) \\ &= x_1 \mathbf{1}_{B_1} + x_1 \mathbf{1}_{B_2} + x_2 \mathbf{1}_{B_3} + x_2 \mathbf{1}_{B_4}, \end{aligned}$$

οπότε

$$X - Y = (2 - x_1) \mathbf{1}_{B_1} + (0 - x_1) \mathbf{1}_{B_2} + (0 - x_2) \mathbf{1}_{B_3} + (-2 - x_2) \mathbf{1}_{B_4}$$

και

$$\begin{aligned} (X - Y)^2 &= (2 - x_1)^2 \mathbf{1}_{B_1} + (0 - x_1)^2 \mathbf{1}_{B_2} + (0 - x_2)^2 \mathbf{1}_{B_3} + (-2 - x_2)^2 \mathbf{1}_{B_4} \\ &= (2 - x_1)^2 \mathbf{1}_{B_1} + x_1^2 \mathbf{1}_{B_2} + x_2^2 \mathbf{1}_{B_3} + (-2 - x_2)^2 \mathbf{1}_{B_4}, \end{aligned}$$

οπότε

$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] = \frac{1}{4}(2 - x_1)^2 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}(2 + x_2)^2$$

Αυτό είναι μια ποσοτητα που εξαρτάται απο τα  $x_1, x_2$  τα οποία πρέπει να επιλεγούν κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιηθεί η ποσοτητα αυτή. Αυτό είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης για την συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία ορίζεται ως

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(2 - x_1)^2 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}(2 + x_2)^2$$

Για να υπολογίσουμε το ελάχιστο θα πρέπει να ψάξουμε ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία της συναρτησης αυτής, και λόγω της κυρτότητας της έχουμε ότι τα κρίσιμα σημεία θα είναι και ελάχιστα.

Τα κρίσιμα σημεία δίνονται απο την λύση του συστηματος

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2}(2 - x_1) + \frac{1}{2}x_1 = x_1 - 1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}(2 + x_2) = x_2 + 1 = 0,\end{aligned}$$

δηλαδή  $x_1^* = 1, x_2^* = -1$ .

Συνεπώς,

$$Z = \mathbb{E}[X \mid \Delta_1] = x_1^* \mathbf{1}_{A_1} + x_2^* \mathbf{1}_{A_2} = (+1)\mathbf{1}_{A_1} + (-1)\mathbf{1}_{A_2}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό μας λέει οτι η καλύτερη μας πρόβλεψη για το κέρδος απο το παραγωγο προϊόν μετα απο 2 περιόδους, δεδομένης της γνώσης της κατάστασης της αγοράς την πρώτη περίοδο θα είναι 1 αν την πρώτη περίοδο η μετοχή είχε ανεβεί ( $H_1$ ) και -1 αν την πρώτη περίοδο η μετοχή είχε κατεβεί ( $T_1$ ).



# Ανεξαρτησία και δεσμευμένη μέση τιμή

Υπενθυμίζουμε τους ακόλουθους ορισμούς

## Ορισμός (Ανεξάρτητα γεγονότα)

Δυο γεγονότα  $A$  και  $B$  ονομάζονται ανεξάρτητα αν  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .  
Μια συλλογή  $\{A_i\}$ , όπου  $i \in \mathcal{I}$  με  $\mathcal{I}$  ένα σύνολο δεικτών αν για κάθε  $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$  ισχύει ότι  $P(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} A_j) = \prod_{j \in \mathcal{J}} P(A_j)$ .

## Ορισμός (Ανεξάρτητες διαμερίσεις)

Οι διαμερίσεις  $\Delta_1, \Delta_2$  είναι ανεξάρτητες αν για κάθε επιλογή  $A \in \Delta_1$  και  $B \in \Delta_2$  τα γεγονότα  $A, B$  είναι ανεξάρτητα δηλαδή  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

## Ορισμός (Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές)

Οι τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  είναι ανεξάρτητες αν οι διαμερίσεις  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$  που παράγουν στον δειγματικό χώρο είναι ανεξάρτητες.

Ενας ισοδύναμος τρόπος να μιλήσουμε για ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές είναι μέσω του πεδίου τιμών τους κατευθείαν.

### Ορισμός (Διακριτές TM)

Οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές  $X, Y$  ονομάζονται ανεξάρτητες αν  $\bar{P}(X = x_i, Y = y_j) = \bar{P}(X = x_i)\bar{P}(Y = y_j)$  για κάθε  $x_i \in Rg(X), y_j \in Rg(Y)$ .

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να γενικευθεί και για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

### Ορισμός (Συνεχείς TM)

Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές  $X, Y$  ονομάζονται ανεξάρτητες αν  $\bar{P}(X \in A, Y \in B) = \bar{P}(X \in A)\bar{P}(Y \in B)$  για κάθε  $A \subset Rg(X)$  και  $B \subset Rg(Y)$ .

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε ανεξαρτησία τυχαίας μεταβλητής ως προς διαμέριση (σ-άλγεβρα)

### Ορισμός (Ανεξαρτησία TM ως προς διαμέριση)

Η τυχαία μεταβλητή  $X$  θα ονομάζεται ανεξάρτητη από την διαμέριση  $\Delta$  αν η διαμεριση  $\Delta_X$  που παράγει είναι ανεξάρτητη από την  $\Delta$ .

## Παράδειγμα

Η μετοχή της  $XΥΖ$  που εμπορεύεται σογια συναλλάσσεται στο χρηματιστήριο της Σανγκάης, και κάθε χρονική περίοδο μπορεί να ανεβεί ( $H_1$ ) ή να κατεβεί ( $T_1$ ).

Η μετοχή της  $ZΥΧ$  που παράγει είδη υψηλής τεχνολογίας συναλλάσσεται στο χρηματιστήριο της Φρανκφουρτης και κάθε χρονική περίοδο μπορεί να ανεβεί ( $H_2$ ) ή να κατεβεί ( $T_2$ ).

Έστω ένα παραγωγο προϊόν που μας αποφέρει 1 ευρώ αν η μετοχή της  $XΥΖ$  ανεβεί και μας φερνει ζημιά 1 ευρώ αν η μετοχή της  $XΥΖ$  κατέβει — ονομάζουμε  $X$  την τυχαία μεταβλητή που δίνει το κέρδος μας απο αυτό το προϊόν.

Έστω ένα παραγωγο προϊόν που μας αποφέρει 1 ευρώ αν η μετοχή της  $ZΥΧ$  ανεβεί και μας φερνει ζημιά 1 ευρώ αν η μετοχή της  $ZΥΧ$  κατέβει — ονομάζουμε  $Y$  την τυχαία μεταβλητή που δίνει το κέρδος μας απο αυτό το προϊόν.

Οι τυχαιες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  είναι ανεξάρτητες.

Ο δειγματικός χώρος ως συνήθως είναι ο

$\Omega = \{H_1 H_2, H_1 T_2, T_1 H_2, T_1 T_2\}$ , και οι τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  ορίζονται ως

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in \{H_1 H_2, H_1 T_2\} = A_1, \\ -1 & \omega \in \{T_1 H_2, T_1 T_2\} = A_2, \end{cases}$$

και

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in \{H_1 H_2, T_1 H_2\} = B_1, \\ -1 & \omega \in \{H_1 T_2, T_1 T_2\} = B_2, \end{cases}$$

Η τυχαία μεταβλητή  $X$  παράγει την διαμεριση  $\Delta_1 = \{A_1, A_2\}$  ενώ η τυχαία μεταβλητή  $Y$  παράγει την διαμέριση  $\Delta_2 = \{B_1, B_2\}$ . Όλα τα πιθανά ζεύγη συνόλων που μπορούμε να επιλέξει κάποιος από τα  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$  είναι τα  $(A_1, B_1)$ ,  $(A_2, B_1)$ ,  $(A_1, B_2)$ ,  $(A_2, B_2)$ . Θα δείξουμε ότι καθένα από τα ζεύγη αυτά είναι ανεξαρτητά.

Πράγματι,

$$P(A_1 \cap B_1) = P(\{H_1 H_2\}) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(B_1),$$

$$P(A_2 \cap B_1) = P(\{T_1 H_2\}) = \frac{1}{4} = P(A_2)P(B_1),$$

$$P(A_1 \cap B_2) = P(\{H_1 T_2\}) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(B_2),$$

$$P(A_2 \cap B_2) = P(\{T_1 T_2\}) = \frac{1}{4} = P(A_2)P(B_2).$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην ανεξαρτησία των δύο αυτών τυχαιων μεταβλητών.

Εναλλακτικά  $Rg(X) = \{-1, 1\}$  και  $Rg(Y) = \{-1, 1\}$ .

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\bar{P}(X = 1) &= \frac{1}{2}, & \bar{P}(X = -1) &= \frac{1}{2}, \\ \bar{P}(Y = 1) &= \frac{1}{2}, & \bar{P}(Y = -1) &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Απο την αλλη,

$$\begin{aligned}\bar{P}(X = 1, Y = 1) &= P(\{H_1 H_2\}) = \frac{1}{4} = \bar{P}(X = 1)\bar{P}(Y = 1), \\ \bar{P}(X = 1, Y = -1) &= P(\{H_1 T_2\}) = \frac{1}{4} = \bar{P}(X = 1)\bar{P}(Y = -1), \\ \bar{P}(X = -1, Y = 1) &= P(\{T_1 H_2\}) = \frac{1}{4} = \bar{P}(X = -1)\bar{P}(Y = 1), \\ \bar{P}(X = -1, Y = -1) &= P(\{T_1 T_2\}) = \frac{1}{4} = \bar{P}(X = -1)\bar{P}(Y = -1)\end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει με βάση τον ισοδύναμο ορισμό την ανεξαρτησία των  $X$  και  $Y$ .

# Ανεξαρτησία και μέση τιμή / δεσμευμένη μέση τιμή

## Πρόταση

- 1 Αν  $X$  και  $Y$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ .
- 2 Αν  $X$  και  $Y$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = 0$ .
- 3 Αν η τυχαία μεταβλητή  $X$  είναι ανεξάρτητη από την διαμεριση  $\Delta$  τότε  $\mathbb{E}[X | \Delta] = \mathbb{E}[X]$ .

## Απόδειξη:

1. Θα κάνουμε την απόδειξη για διακριτές τυχαίες μεταβλητές, αλλά το αποτέλεσμα ισχύει γενικά. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \sum_{(x,y) \in Rg(X) \times Rg(Y)} xy \bar{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{(i,j)} x_i y_j \bar{P}(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_{(i,j)} x_i y_j \bar{P}(X = x_i) \bar{P}(Y = y_j) \\ &= \sum_{(i,j)} x_i \bar{P}(X = x_i) y_j \bar{P}(Y = y_j) \\ &= \left( \sum_i x_i \bar{P}(X = x_i) \right) \left( \sum_j y_j \bar{P}(Y = y_j) \right) \\ &= \left( \sum_{x \in Rg(X)} x \bar{P}(X = x) \right) \left( \sum_{y \in Rg(Y)} y \bar{P}(Y = y) \right) \\ &= \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y].\end{aligned}$$



3. Έστω ότι  $\Delta_X = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$  η διαμέριση που παράγεται από την  $X$  και  $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ .

Η τυχαία μεταβλήτη  $X$  μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$X = x_1 \mathbf{1}_{B_1} + \dots + x_m \mathbf{1}_{B_m}.$$

Από τον ορισμό της  $\mathbb{E}[X \mid \Delta]$  έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[X \mid \Delta] = \mathbb{E}[X \mid A_1] \mathbf{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{E}[X \mid A_n] \mathbf{1}_{A_n}.$$

Για οποιοδήποτε  $i = 1, \dots, n$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \mid A_i] &= \frac{1}{P(A_i)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_i}] = \frac{1}{P(A_i)} \mathbb{E}[(x_1 \mathbf{1}_{B_1} + \dots + x_m \mathbf{1}_{B_m}) \mathbf{1}_{A_i}] \\ &= \frac{1}{P(A_i)} (x_1 \mathbb{E}[\mathbf{1}_{B_1} \mathbf{1}_{A_i}] + \dots + x_m \mathbb{E}[\mathbf{1}_{B_m} \mathbf{1}_{A_i}]) \\ &= \frac{1}{P(A_i)} (x_1 \mathbb{E}[\mathbf{1}_{B_1}] \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i}] + \dots + x_m \mathbb{E}[\mathbf{1}_{B_m}] \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i}]) \\ &= \frac{1}{P(A_i)} (x_1 P(B_1) P(A_i) + \dots + x_m P(B_m) P(A_i)) \\ &= x_1 P(B_1) + \dots + x_m P(B_m) = \mathbb{E}[X].\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{E}[X \mid \Delta] = \mathbb{E}[X] \mathbf{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{E}[X] \mathbf{1}_{A_n} = \mathbb{E}[X] (\mathbf{1}_{A_1} + \dots + \mathbf{1}_{A_n}) = \mathbb{E}[X].$$

## Παράδειγμα

Στο προηγούμενο παράδειγμα με τις 2 μετοχές απο διαφορετικούς κλάδους και απο 2 διαφορετικά χρηματιστήρια μπορούμε να δούμε οτι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= (+1)(+1)\bar{P}(X=1, Y=1) + (+1)(-1)\bar{P}(X=1, Y=-1) \\ &\quad + (-1)(1)\bar{P}(X=-1, Y=1) + (-1)(-1)\bar{P}(X=-1, Y=-1) \\ &= 1\frac{1}{4} + (-1)\frac{1}{4} + (-1)\frac{1}{4} + (1)\frac{1}{4} = 0.\end{aligned}$$

Απο την αλλα

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= (+1)\bar{P}(X=1) + (-1)\bar{P}(X=-1) = 1\frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = 0, \\ \mathbb{E}[Y] &= (+1)\bar{P}(Y=1) + (-1)\bar{P}(Y=-1) = 1\frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = 0\end{aligned}$$

οπότε

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

## Παράδειγμα

Στο προηγούμενο παράδειγμα με τις 2 μετοχές, μία επενδύτρια απο το Σικάγο (η γνωστή θεία) αγοράζει ένα παράγωγο προϊόν στην μία μετοχή και ένα παράγωγο προϊόν στην άλλη μετοχή.

Υπολογίστε το συνολικό του κέρδος, αν είναι γνωστό το κέρδος απο την θέση του στην μετοχή στο χρηματιστήριο της Σανκάνης.

Έστω  $X_1$  κέρδος του απο την θέση στο παραγωγο στην μια μετοχή (XYZ) και  $X_2$  το κέρδος του απο την θέση στο παράγωγο απο την άλλη μετοχή (ZYX).

Υπολογίστε την  $\mathbb{E}[X_1 + X_2 \mid X_1]$ .

Έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2 \mid X_1] = \mathbb{E}[X_1 \mid X_1] + \mathbb{E}[X_2 \mid X_1] = X_1 + \mathbb{E}[X_2] = X_1.$$

## Υπο συνθήκη μέση τιμή ως προς $\sigma$ -άλγεβρα

Η παραπάνω συζήτηση μας οδηγεί στο να ορίσουμε τελικά την έννοια της υπο συνθήκη μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής  $X$  ως προς ένα τέτοιο σύνολο γεγονότων, μια  $\sigma$ -άλγεβρα.

### Ορισμός

Έστω  $\sigma(A)$  μια  $\sigma$ -άλγεβρα που περιεχει τα γεγονότα  $A = (A_1, \dots, A_n)$ . Η υπο συνθήκη μέση τιμή της  $X$  ως προς την  $\sigma(A)$ , είναι μια τυχαία μεταβλητή  $Z = \mathbb{E}[X \mid \sigma(A)]$  τέτοια ώστε

- ① Να μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως τις τιμές που παίρνει η  $Z$  γνωρίζοντας μόνο τα γεγονότα στο  $A$  (δηλαδή η  $Z$  είναι  $\sigma(A)$ -μετρήσιμη.
- ② Για κάθε  $B \in \sigma(A)$  να ισχύει

$$\sum_{\omega \in B} Z P(\omega) = \sum_{\omega \in B} X P(\omega)$$

Η υπο συνθήκη μέση τιμή έχει τις εξής πολύ χρήσιμες ιδιότητες:

- Αν  $\mathcal{F}_M \subset \mathcal{F}_N$  τότε  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_M] | \mathcal{F}_N] = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_M]$ .
- Αν  $\mathcal{F}_M \subset \mathcal{F}_N$  τότε  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_N] | \mathcal{F}_M] = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_M]$ .
- Αν η τυχαία μεταβλητή  $X$  καθορίζεται πλήρως απο τα γεγονότα που περιλαμβάνονται στην  $\mathcal{F}$ , δηλαδή η  $X$  είναι μετρήσιμη ως προς την  $\mathcal{F}$  τότε  $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}] = X$ .
- Αν η  $X$  είναι ανεξάρτητη της  $\mathcal{F}$  τότε  $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$
- Η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης

$$\min_{Y \in m(\sigma(A))} \mathbb{E}[(X - Y)^2],$$

είναι η  $Z = \mathbb{E}[X | \sigma(A)]$ , δηλαδή η  $Z$  είναι η καλύτερη εκτιμήτρια της  $X \notin m(\sigma(A))$  (που θέλει περισσότερη πληροφορία απο αυτή που βρίσκεται στην  $\sigma(A)$  για να εκτιμηθεί πλήρως) βάσει της (ελλιπούς) πληροφορίας που περιέχεται στην  $\sigma(A)$ .