

Ποσοτικές Μέθοδοι στην Διαχείριση Κινδύνου: Πιθανότητες

ΕΝΟΤΗΤΑ 0.2 (Προπαρασκευαστικό)

Α. Ν. Γιαννακόπουλος

Ο.Π.Α

Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026

- 1 Τυχαίες μεταβλητές
- 2 Συναρτήσεις κατανομής
- 3 Μέση τιμή και ροπές τυχαίων μεταβλητών
- 4 Μέσες τιμές γενικότερων ποσοτήτων
- 5 Μια εναλλακτική αναπαράσταση της μέσης τιμής
- 6 Ιδιότητες της μέσης τιμής
- 7 Έχουν όλες οι τυχαίες μεταβλητές μέση τιμή και διασπορά;

Τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια απεικόνιση, η οποία σε κάθε (απλό) ενδεχόμενο αντιστοιχεί ένα πραγματικό αριθμό. Η απεικόνιση X ονομάζεται τυχαία μεταβλητή.

Μια τυχαία μεταβλητή μπορεί να χαρακτηριστεί σαν το παρατηρήσιμο μέγεθος από κάποιο τυχαίο πείραμα. Είναι προφανές ότι για κάποιο τυχαίο πείραμα μπορούμε να ορίσουμε πολλά παρατηρήσιμα μεγέθη δηλαδή πολλές τυχαίες μεταβλητές.

Παράδειγμα

Μια χρηματαγορά μπορεί να έχει ανοδικες αποδόσεις (H) ή καθοδικες αποδόσεις (T).

Ένας επενδυτής ο οποίος έχει τοποθετηθεί σε ένα δείκτη αυτής της αγοράς, μέσω ενός παραγώγου συμβολαιου το οποίο του αποφέρει 1 ευρώ αν η κίνηση της αγοράς είναι ανοδική αλλά του δημιουργεί ζημιά 1 ευρώ αν η κίνηση της αγοράς είναι καθοδική.

Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής κρατάει την θέση αυτή για 2 συνεχόμενες χρονικές περιόδους.

Περιγράψτε την τυχαία μεταβλητή X που αντιστοιχεί στο κέρδος του επενδυτή από την τοποθέτηση αυτή.

Πρώτα καθορίζουμε τον δειγματικό χώρο ο οποίος περιέχει όλα τα απλά ενδεχόμενα για το πείραμα,

$$\Omega = \{H_1 H_2, H_1 T_2, T_1 H_2, T_1 T_2\}$$

Για να καθορίσουμε την τυχαία μεταβλητή X αρκεί να καθορίσουμε την τιμή που παίρνει η απεικόνιση αυτή για κάθε στοιχείο του Ω ,

$$X(H_1 H_2) = 1 + 1 = 2,$$

$$X(H_1 T_2) = 1 + (-1) = 0,$$

$$X(T_1 H_2) = (-1) + 1 = 0,$$

$$X(T_1 T_2) = (-1) + (-1) = -2.$$

Η X μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα παρατηρήσιμο μέγεθος σχετικά με την κατάσταση της αγοράς (πείραμα) το οποίο μπορεί να μας αποκαλύψει κάποια πληροφορία σχετικά με το τι έγινε στο πείραμα.

Αν σας ανακοινώσει ότι κερδίσατε 2 ευρώ τότε είστε σίγουροι ότι οι κινήσεις της αγοράς ήταν και οι δυο ανοδικες δηλ. $H_1 H_2$.

Σε μαθηματική γλώσσα αυτό μπορούμε να το συμβολίσουμε $X^{-1}(\{2\}) = \{H_1 H_2\}$, όπου με $\{2\}$ συμβολίζουμε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών το οποίο αποτελείται μόνο απο το στοιχείο 2.

Αν σας ανακοινώσει ότι χάσατε 2 ευρώ (δηλαδή κερδίσατε -2) τότε και πάλι είστε σίγουροι ότι οι κινήσεις της αγοράς ήταν και οι 2 καθοδικες δηλ. $T_1 T_2$, και στην γλώσσα των μαθηματικών $X^{-1}(\{-2\}) = \{T_1 T_2\}$.

Αν σας ανακοινώσει ότι κερδίσατε 0 ευρώ τότε μπορεί να ήρθε είτε το $H_1 T_2$ είτε το $T_1 H_2$ αλλά δεν μπορείτε να πείτε με σιγουριά ποιό απο τα 2!

Συνεπώς $X^{-1}(\{0\}) = \{H_1 T_2, T_1 H_2\} = \{H_1 T_2\} \cup \{T_1 H_2\}$.

Καμία άλλη τιμή δεν μπορεί να σας ανακοινωθεί.

Απο τις τιμές που σας εχουν ανακοινωθεί λοιπόν μπορείτε να συνάγετε ότι έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο $A_1 = \{H_1 H_2\}$, ή το ενδεχόμενο $A_2 = \{T_1 T_2\}$, ή το ενδεχόμενο $A_3 = \{H_1 T_2, T_1 H_2\}$.

Παρατηρούμε οτι τα A_1, A_2, A_3 αποτελούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου, εφόσον είναι ανα δύο ξένα και η ένωση τους μας δίνει όλο το Ω .

Επίσης παρατηρούμε οτι το X δεν μας δίνει **πλήρη** γνώση σχετικά με το τι έγινε στην αγορά επειδή η γνώση σχετικά με την τιμή της X **δεν** μας επιτρέπει να γνωρίζουμε με ακρίβεια αν συνέβηκε το $\{T_1 H_2\}$ ή αν συνεβηκε το $\{H_1 T_2\}$.

Το μόνο πράγμα που μπορούμε να πουμε οτι έχει συμβεί κάποιο απο τα δύο γεγονοτα $\{T_1 H_2\}, \{H_1 T_2\}$ αλλα δεν γνωρίζω επακριβώς ποιό απο τα δύο!

Δεν είναι απαραίτητο όλες οι τυχαίες μεταβλητές να ορίζονται σε διακριτούς δειγματικούς χώρους.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι μπορείτε να υποστείτε μια ζημιά η οποία μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή $x \in [0, 1]$.

Έχετε αγοράσει ένα ασφαλιστικό συμβόλαιο το οποίο αν η ζημιά είναι μικρότερη ή ίση από $1/2$, δεν σας δίνει καμία αποζημίωση ενώ αν η ζημιά είναι μεγαλύτερη από το $1/2$ η αποζημίωση είναι ίση με την ζημιά.

Το ύψος της αποζημίωσης από το συμβόλαιο αυτό είναι μια τυχαία μεταβλητή

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \leq 1/2 \\ x & \text{αν } x > 1/2 \end{cases}$$

Είναι συνηθισμένο να χρησιμοποιούμε την ακόλουθη ορολογία.

Ορισμός

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή. Θα συμβολίζουμε με $Rg(X)$ το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής, δηλαδή

$$Rg(X) = \{x \in \mathbb{R} : \text{υπάρχει } \omega \in \Omega \text{ για το οποίο ισχύει } X(\omega) = x\} \subset \mathbb{R}.$$

Το σύνολο αυτό περιέχει όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή X .

- (i) Η τυχαία μεταβλητή X θα ονομάζεται διακριτή αν το σύνολο $Rg(X)$ είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.
- (ii) Η τυχαία μεταβλητή X θα ονομάζεται συνεχής αν το σύνολο $Rg(X)$ δεν είναι ούτε πεπερασμένο ούτε αριθμήσιμο.

Παράδειγμα

Ας πάρουμε σαν παράδειγμα την τυχαία μεταβλητή X που δίνει την αξία ενός χαρτοφυλακίου 2 δανείων αξίας 1 το καθένα αν αποπληρωθεί και -1 αν όχι.

Το πεδίο τιμών της μεταβλητής X είναι το σύνολο $Rg(X) = \{-2, 0, 2\}$ το οποίο είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, άρα η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή.

Παράδειγμα

Ας πάρουμε το παράδειγμα της μετοχής που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή $x \in [0, 1]$ και ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από 100 τίτλους από αυτή την μετοχή.

Η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου μπορεί να εκφραστεί από την τυχαία μεταβλητή $X = 100x$ όπου $x \in \Omega = [0, 1]$ είναι η τιμή της μετοχής.

Το $Rg(X) = [0, 100]$ που είναι ένα μη πεπερασμένο και μη αριθμήσιμο σύνολο οπότε η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής.

Παράδειγμα

Μία ασφαλιστική εταιρεία έχει αναλάβει ένα κίνδυνο $x \in [0, 1]$ και για να τον διαχειριστεί απευθύνεται σε μία αντασφαλιστική εταιρεία και συνάπτει ένα αντασφαλιστικό συμβόλαιο σύμφωνα με το οποίο

- Αν η ζημιά είναι μικροτερη του $\frac{1}{3}$ η αντασφαλίστρια εταιρεία δεν καλύπτει τίποτα
- Αν η ζημιά είναι μεγαλύτερη του $\frac{1}{3}$ και μικρότερη ή ίση του $\frac{1}{2}$ πληρώνει $\frac{1}{2}(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{5}{12}$
- Αν η ζημιά είναι μεγαλύτερη του $\frac{1}{2}$ πληρώνει $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4}$

Μπορείτε να περιγράψετε την τυχαία μεταβλητή που περιγράφει την έκθεση της αντασφαλίστριας εταιρείας στον κίνδυνο αυτό;

Μπορούμε να περιγράψουμε το ποσό με την τυχαία μεταβλητή Y ,

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{5}{12} & \text{αν } \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{4} & \text{αν } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y έχουμε ότι $Rg(Y) = \{0, \frac{5}{12}, \frac{3}{4}\}$ το οποίο είναι ένα πεπερασμένο σύνολο άρα η τυχαία μεταβλητή Y είναι διακριτή.

Συναρτήσεις κατανομής

Ένας βολικός τρόπος περιγραφής μιας τυχαίας μεταβλητής είναι η συναρτηση κατανομής $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ η οποία ορίζεται ως εξής:

Ορισμός

Έστω Ω ο δειγματοχώρος ενός πειράματος και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή. Η συναρτηση κατανομής της X είναι μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται βάσει του τύπου

$$F(x) = \bar{P}(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

Το P είναι μια πιθανότητα στον δειγματικό χώρο Ω ενώ το $\bar{P}$ είναι μια πιθανότητα στον δειγματικό χώρο $\mathbb{R}$!

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε μια αγορά η οποία σε κάθε περίοδο μπορεί να έχει μια ανοδική κίνηση (H) ή μια καθοδική (T) κίνηση.

Ας υποθέσουμε ότι εχετε τοποθετηθεί σε μία επένδυση η οποία κάθε φορά που η αγορά ανεβαίνει σας αποφέρει 1 ευρώ ενώ αν η αγορά κατεβαίνει σας ζημιώνει κατά ένα ευρώ.

Αν X είναι η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το κέρδος από αυτή την επένδυση υπολογίστε την συνάρτηση κατανομής F για την X .

Το πεδίο τιμών της X είναι το σύνολο $Rg(X) = \{-2, 0, 2\}$. Αν $x < -2$, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \emptyset$ (δεν υπάρχει κανένα ενδεχόμενο το οποίο να μας δίνει κέρδος μικρότερο του -2), συνεπώς

$$F(x) = \bar{P}(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(\emptyset) = 0, \text{ αν } x \in (-\infty, -2).$$

Αν $-2 \leq x < 0$ τότε $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{T_1 T_2\}$ (η μόνη τιμή που μπορεί να πάρει η X στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι η -2 και αυτή μόνο για το ενδεχόμενο $\{T_1 T_2\}$ συνεπώς

$$F(x) = \bar{P}(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(\{T_1 T_2\}) = \frac{1}{4}, \text{ αν } x \in [-2, 0).$$

Αν $0 \leq x < 2$ τότε $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{T_1 T_2, H_1 T_2, T_1 H_2\}$ (οι μόνες τιμές που μπορεί να πάρει η X στο διάστημα $(-\infty, 2)$ είναι οι -2 και 0 και αυτές για τα ενδεχόμενα $\{T_1 T_2\}$ και $\{H_1 T_2, T_1 H_2\}$ αντιστοίχως, συνεπώς

$$F(x) = \bar{P}(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(\{T_1 T_2, H_1 T_2, T_1 H_2\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

αν $x \in [0, 2)$.

Αν $x \geq 2$ τότε $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{T_1 T_2, H_1 T_2, T_1 H_2, H_1 H_2\}$ (οι μόνες τιμές που μπορεί να πάρει η X στο διάστημα $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ είναι οι -2 , 0 και 2 και αυτές για τα ενδεχόμενα $\{T_1 T_2\}$, $\{H_1 T_2, T_1 H_2\}$ και $\{H_1 H_2\}$ αντιστοίχως, συνεπώς

$$F(x) = \bar{P}(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(\Omega) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1, \text{ αν } x \geq 2.$$

Η συναρτηση κατανομής λοιπόν είναι η συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < -2, \\ \frac{1}{4} & \text{αν } -2 \leq x < 0, \\ \frac{3}{4} & \text{αν } 0 \leq x < 2, \\ 1 & \text{αν } 2 \leq x. \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι ασυνεχής (παρουσιάζει ασυνέχειες στα σημεία $x = -2, 0, 2$ δηλαδή στις τιμές που μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή X και

$$F(-2^+) - F(-2^-) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4},$$

$$F(0^+) - F(0^-) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$F(2^+) - F(2^-) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$F(-2^+) - F(-2^-) = \bar{P}(X = -2) = P(X^{-1}(\{-2\})) = P(\{T_1 T_2\}),$$

$$F(0^+) - F(0^-) = \bar{P}(X = 0) = P(X^{-1}(\{0\})) = P(\{H_1 T_2, T_1 H_2\}),$$

$$F(2^+) - F(2^-) = \bar{P}(X = 2) = P(X^{-1}(\{2\})) = P(\{H_1 H_2\}),$$

δηλαδή το άλμα της συνάρτησης κατανομής στα σημεία ασυνέχειας μας δίνει την πιθανότητα των αντιστοίχων γεγονότων!

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι επιλέγουμε ένα σημείο στην τύχη από ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1 και γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να απέχει το σημείο που επιλέξαμε απόσταση μικρότερη ή ίση προς y από την αρχή του ευθυγράμμου τμήματος είναι ίση προς y .

Αν $X = y$ είναι η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει την απόσταση του σημείου από την αρχή τότε η συνάρτηση κατανομής για την μεταβλητή αυτή είναι

$$F(x) = \bar{P}(X \leq x) = P(y \leq x) = x, \quad x \in [0, 1].$$

Αυτή είναι μια συνεχής συνάρτηση κατανομής.

Ας υποθέσουμε ότι βάζουμε ένα στοίχημα και θα χάσουμε ένα ποσό που είναι ίσο προς 100 φορές την απόσταση y του σημείου που επιλέξαμε απο την αρχή του ευθυγράμμου τμήματος.

Η τυχαία μεταβλητή X_1 που εκφράζει την ζημιά μας θα είναι ίση προς $X_1 = 100y$ και η συνάρτηση κατανομής της είναι ίση προς

$$F_1(x) = \bar{P}(X_1 \leq x) = P(100y \leq x) = P(y \leq \frac{x}{100}) = \frac{x}{100}, \quad x \in [0, 100].$$

Πολλές φορές οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές μπορεί να έχουν συνάρτηση κατανομής η οποία να περιγράφεται με την χρήση της λεγόμενης συναρτησης πυκνότητας πιθανότητας.

Ορισμός

Αν η συνάρτηση κατανομής F μπορεί να περιγραφεί με την βοήθεια μιας συνάρτησης f μέσω του τυπου

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds$$

τότε η f ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ικανοποιεί τις συνθήκες

- (i) $f(x) \geq 0$ για κάθε x ,
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Η συναρτηση πυκνότητας πιθανοτητας μπορεί να ταυτιστεί με την παράγωγο της συνάρτησης κατανομής εφόσον αυτή υπάρχει.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0, \\ x & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{αν } x > 1, \end{cases}$$

έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0, \\ 1 & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{αν } x > 1, \end{cases}$$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{αν } 0 \leq x, \end{cases}$$

για $\lambda > 0$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{αν } 0 \leq x. \end{cases}$$

Πρόταση

Έστω $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή και $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση κατανομής της.

- (i) $\bar{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.
- (ii) Αν η συνάρτηση κατανομής F εκφράζεται από μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f , τότε

$$\begin{aligned}\bar{P}(a \leq X \leq b) &= \bar{P}(a < X \leq b) = \bar{P}(a \leq X < b) \\ &= \bar{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.\end{aligned}$$

Υπο αυτή την έννοια πολλές φορές γράφουμε (μη αυστηρά!) ότι $\bar{P}(x \leq X \leq x + dx) = f(x)dx$.

Μέση τιμή και ροπές τυχαίων μεταβλητών

Θα προσπαθήσουμε τώρα να δώσουμε διάφορους τρόπους περιγραφής τυχαίων μεταβλητών που δεν χρειάζονται γνώση είτε όλων των τιμών που μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή για οποιοδήποτε ενδεχόμενο, ούτε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας.

Το ιδανικό θα ήταν να έχουμε περιγραφή της τυχαίας μεταβλητής απο κάποιον ή απο κάποιους πραγματικούς αριθμούς που μας εκφράζουν τις πιο πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει αυτή η τυχαία μεταβλητή.

Οι ποσότητες αυτές είναι η μέση τιμή και οι διάφορες ροπές της τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός

Έστω $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια διακριτή τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει τις τιμές $Rg(X) = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Η μέση τιμή της X είναι ο πραγματικός αριθμός $\mathbb{E}[X]$ η οποία ορίζεται ως

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i \bar{P}(X = x_i) = \sum_i x_i (F(x_i^+) - F(x_i^-)).$$

Αν η $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή η οποία έχει πυκνότητα πιθανότητας $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, η μέση τιμή της X μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια ενός ολοκληρώματος,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Παράδειγμα

Ποια είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής η οποία εκφράζει το κέρδος απο μία επένδυση 2 χρονικών περιόδων που αποφέρει 1 ευρώ στις ανοδικές κινήσεις της αγοράς και -1 ευρώ στις καθοδικές κινήσεις της αγοράς αν η πιθανότητα ανοδικής κίνησης είναι $1/2$;

Η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τις τιμές $\{-2, 0, 2\}$ με πιθανότητα $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{4}$ αντιστοίχως. Έρα,

$$\mathbb{E}[X] = (-2) \frac{1}{4} + 0 \frac{1}{2} + 2 \frac{1}{4} = 0.$$

Το αναμενόμενο μας κέρδος λοιπόν είναι 0.

Παράδειγμα

Μία ασφαλιστική εταιρεία μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα π.χ. ένα έτος, μπορεί να δεχθεί n αιτήσεις αποζημίωσης στην διάρκεια της λειτουργίας του με πιθανοτητα $p_n = \frac{1}{n!} \lambda^n e^{-\lambda}$ όπου $\lambda > 0$ μια δεδομένη παράμετρος.

Ας ονομάζουμε X την τυχαία μεταβλητή που περιγράφει τον αριθμό των αιτήσεων αποζημίωσης που δέχθηκε η εταιρεία. Βρείτε το $\mathbb{E}[X]$.

Η τυχαία μεταβλητή X έχει πεδίο τιμών $Rg(X) = \mathbb{N}$, το σύνολο των φυσικών αριθμών. Επίσης, $\bar{P}(X = n) = p_n$.

Συνεπώς,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{1}{n!} \lambda^n e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{1}{n!} \lambda^n = \lambda.$$

Ο αναμενόμενος αριθμός αιτήσεων θα είναι ίσος προς λ .

Παράδειγμα

Έστω η τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής F ,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0, \\ x & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{αν } x > 1. \end{cases}$$

Βρείτε την $\mathbb{E}[X]$.

Η τυχαία αυτή μεταβλητή έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0, \\ 1 & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{αν } x > 1. \end{cases}$$

Συνεπώς, η μέση τιμή της X είναι ίση προς

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα

Ο χρόνος αναμονής για την πραγματοποίηση ενός καταστροφικού συμβάντος είναι μια τυχαία μεταβλητή X η οποία βάσει παρελθοντικών παρατηρήσεων γνωρίζουμε ότι έχει πυκνότητα πιθανότητας $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ αν $x \geq 0$ και 0 αλλιώς, με $\lambda = 0.01$ (μονάδες έτους). Υπολογίστε την $\mathbb{E}[X]$.

Έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Η ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος είναι ότι το γεγονός αυτό αναμένεται (χονδρικά μιλώντας) περίπου κάθε 100 έτη.

Η μέση τιμή μας δίνει την πιο πιθανή τιμή σχετικά την παρατήρηση μιας τυχαίας μεταβλητης αλλά θα ήταν χρησιμο να ειχαμε ενα μέτρο σχετικά με το πόσο χαρακτηριστικο μεγεθος ειναι αυτό για την τυχαια μεταβλητη, δηλαδή σχετικά με το πόσο μακριά μπορεί να πέσει μια συγκεκριμένη παρατήρηση απο την μεση τιμή. Αυτό δινεται απο την διασπορά.

Ορισμός

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια διακριτή τυχαία μεταβλητη X . Η διασπορά της ορίζεται ως το άθροισμα

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_n (x_n - \mathbb{E}[X])^2 \bar{P}(X = x_n).$$

Αν η τυχαία μεταβλητη ειναι συνεχης με συναρτηση πυκνοτητας πιθανότητας f η διασπορά ορίζεται απο το ολοκλήρωμα

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x) dx.$$

Η διασπορά ειναι μια ποσότητα που ειναι πάντοτε θετικη!

Παράδειγμα

Υπολογίστε την διασπορά της τυχαίας μεταβλητης που σας δίνει το κερδος απο την επένδυση που αποφέρει 1 ευρώ κερδος αν έχουμε ανοδική κίνηση της αγοράς και 1 ευρώ ζημιά αν έχουμε καθοδική κίνηση της αγοράς σε 2 χρονικές περιόδους και όταν η άνοδος και η κάθοδος είναι ισοπίθανη.

Έχουμε ότι $\mathbb{E}[X] = 0$ οπότε η τυχαία μεταβλητη $X - \mathbb{E}[X]$ μπορεί να πάρει τις τιμες $\{-2, 0, 2\}$ με πιθανότητες $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ αντιστοίχως, και η τυχαία μεταβλητή $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$ τις τιμές $\{0, 4\}$ με πιθανότητα $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ αντιστοίχως.

Άρα

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[Y] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε την διασπορά για την τυχαία μεταβλητή X που δίνει τον αριθμό των αιτήσεων σε μια ασφαλιστική εταιρεία. . Θυμηθείτε ότι

$\mathbb{E}[X] = \lambda$ συνεπώς η τυχαία μεταβλητή $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$ παίρνει τις τιμές $y_n = (n - \lambda)^2$ με πιθανότητα $p_n = e^{-\lambda} \frac{1}{n!} \lambda^n$.

Συνεπώς,

$$\text{Var}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n p_n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (n - \lambda)^2 \frac{1}{n!} \lambda^n = \lambda.$$

Παράδειγμα

Βρείτε την διασπορά για την τυχαία μεταβλητή που έχει πυκνότητα πιθανότητας $f(x) = 1$ αν $x \in [0, 1]$ και 0 αλλιώς.

Για την τυχαία μεταβλητή αυτή ισχύει $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}$ οπότε η τυχαία μεταβλητή $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2 = (X - \frac{1}{2})^2$.

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[Y] = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx = \frac{1}{12}.$$

Παράδειγμα

Βρείτε την διασπορά για την τυχαία μεταβλητή που έχει πυκνότητα πιθανότητας $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ αν $x \geq 0$ και 0 αλλιώς.

Για την τυχαία μεταβλητή αυτή ισχύει $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ οπότε η τυχαία μεταβλητή $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2 = (X - \frac{1}{\lambda})^2$.

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[Y] = \int_0^{\infty} (x - \frac{1}{\lambda})^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Μέσες τιμές γενικότερων ποσοτήτων

Στην μοντελοποίηση τυχαίων γεγονότων πολλές φορές χρειαζόμαστε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της μέσης τιμής για γενικότερες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες παράγονται απο την σύνθεση μιας τυχαίας μεταβλητής $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με μια πραγματική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ορισμός

Έστω $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή, και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια ντετερμινιστική συνάρτηση. Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $g(X)$ (δηλαδή της σύνθεσης $g \circ X$) ορίζεται ως:

- (i) Αν η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με κατανομή πιθανότητας $\bar{P}(X = x_i) = \bar{p}_i$ για κάθε $x_i \in Rg(X)$ και συνάρτηση κατανομής F τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X)] &= \sum_{x \in Rg(X)} g(x) \bar{P}(X = x) = \sum_i g(x_i) \bar{P}(X = x_i) \\ &= \sum_i g(x_i) \bar{p}_i = \sum_i g(x_i) (F(x_i^+) - F(x_i^-)).\end{aligned}$$

- (ii) Αν η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f τότε

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{Rg(X)} g(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx,$$

όπου θεωρούμε ότι $f(x) = 0$ αν $x \notin Rg(X)$.

Παρατηρήσετε ότι στον παραπάνω ορισμό **δεν** χρησιμοποιούμε την συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $Y = g(X)$ αλλά της X . Αυτό είναι βολικό γιατί για να περάσουμε απο την συνάρτηση κατανομής της X στην συνάρτηση κατανομής της Y θα πρέπει να αντιστρέψουμε την συνάρτηση g .

Πράγματι αν F η συνάρτηση κατανομής της X και F_Y η συνάρτηση κατανομής της $Y = g(X)$ τότε,

$$F_Y(y) = \bar{P}(Y \leq y) = \bar{P}(g(X) \leq y) = \bar{P}(X \leq g^{-1}(y)) = F(g^{-1}(y)).$$

και η αντιστροφή της g ενδεχομενως να μην είναι ότι το ευκολότερο. Όμως παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] &= \sum_{Y \in Rg(Y)} y \bar{P}(Y = y) = \sum_{Y \in Rg(Y)} y (F_Y(y^+) - F_Y(y^-)) \\ &= \sum_{x \in Rg(X)} g(x) \bar{P}(X = x) = \sum_{x \in Rg(X)} g(x) (F(x^+) - F(x^-)), \end{aligned}$$

όπου τα x και y συνδέονται μέσω της σχέσης $y = g(x)$.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι στο παράδειγμα για το δικαίωμα αγοράς η συνάρτηση κατανομής της τιμής της μετοχής S την χρονική στιγμή T είναι η

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{αν } x \geq 0, \\ 0 & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

για κάποιο $\lambda > 0$. Υπενθυμίζουμε ότι αυτό σημαίνει ότι $\bar{P}(S \leq x) = F(x)$. Ποιά είναι η αναμενόμενη απολαβή $\mathbb{E}[\Pi]$ από ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης K ;

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, αν $x \geq 0$ και $f(x) = 0$ αν $x < 0$ (το $Rg(S) = \mathbb{R}_+$), συνεπώς, αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με $g(x) = (x - K)^+ = \max(x - K, 0)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\Pi] &= \mathbb{E}[g(S)] = \int_0^\infty g(x)f(x)dx = \int_0^\infty \max(x - K, 0)\lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \int_0^K \max(x - K, 0)\lambda e^{-\lambda x} dx + \int_K^\infty \max(x - K, 0)\lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \int_0^K 0\lambda e^{-\lambda x} dx + \int_K^\infty (x - K)\lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= 0 + \int_K^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx - \int_K^\infty K\lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \int_K^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx - K \int_K^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \int_K^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx - K(1 - \bar{P}(S \leq K)) \\
 &= \int_K^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx - K(1 - F(K)) \\
 &= \int_K^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx - Ke^{-\lambda K}.
 \end{aligned}$$

Απομένει ο υπολογισμός του πρώτου ορου, δηλαδή του ολοκληρώματος αυτού, το οποίο μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Μια εναλλακτική αναπαράσταση της μέσης τιμής

Ορισμός

Έστω $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή σε ένα αριθμήσιμο δειγματικό χώρο Ω . Μπορούμε να ορίσουμε

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) = \sum_n X(\omega_n)P(\{\omega_n\}) = \sum_n X(\omega_n)p_n.$$

Αν ο δειγματικός χώρος δεν είναι αριθμήσιμος το παραπάνω άθροισμα μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ολοκλήρωμα επάνω στο μέτρο πιθανότητας

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega).$$

Προσέξτε! Το άθροισμα που μόλις δώσαμε είναι **διαφορετικό** από το άθροισμα

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \text{Rg}(X)} x \bar{P}(X = x) = \sum_i x_i \bar{P}(X = x_i)$$

το οποίο είχαμε χρησιμοποιήσει σαν ορισμό της $\mathbb{E}[X]$ στην προηγούμενη ενότητα.

Ομως, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι τα αθροίσματα είναι ίσα

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \text{Rg}(X)} x \bar{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

Παράδειγμα

Δίνεται η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το κέρδος απο ένα παιγνιδι κορώνα- γράμματα όπου ποντάρετε 1 ευρώ στην κορώνα. Υπολογίστε την μεση τιμή $\mathbb{E}[X]$ με τους δύο τρόπους.

Ο δειγματικός χώρος είναι πεπερασμενος

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{H_1 H_2, H_1 T_2, T_1 H_2, T_1 T_2\} \text{ και } P(\{\omega_1\}) = p_1 = \frac{1}{4}, \\ P(\{\omega_2\}) = p_2 = \frac{1}{4}, P(\{\omega_3\}) = p_3 = \frac{1}{4}, P(\{\omega_4\}) = p_4 = \frac{1}{4}.$$

Επίσης $X(\omega_1) = x_1 = 2$, $X(\omega_2) = x_2 = 0$, $X(\omega_3) = x_2 = 0$, $X(\omega_4) = x_3 = -2$. Παρατηρείστε ότι η τιμή $X(\omega_2) = X(\omega_3) = x_2 = 0$ οπότε την λαμβάνουμε μια φορά υπόψιν στο $Rg(X)$ αλλά η πιθανότητα να συμβεί είναι $\bar{P}(X = 0) = \bar{p}_2 = p_2 + p_3 = \frac{1}{2}$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\bar{P}(X = 2) = \bar{p}_1 = P(\{\omega_1\}) = p_1 = \frac{1}{4},$$

$$\bar{P}(X = 0) = \bar{p}_2 = P(\{\omega_2, \omega_3\}) = p_2 + p_3 = \frac{1}{2},$$

$$\bar{P}(X = -2) = \bar{p}_4 = P(\{\omega_4\}) = p_4 = \frac{1}{4}.$$

Ο υπολογισμός της $\mathbb{E}[X]$ χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση της σαν άθροισμα επάνω στον δειγματικό χώρο Ω θα μας δώσει

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= X(\omega_1)P(\{\omega_1\}) + X(\omega_2)P(\{\omega_2\}) + X(\omega_3)P(\{\omega_3\}) + X(\omega_4)P(\{\omega_4\}) \\ &= (+2)\frac{1}{4} + 0\frac{1}{4} + 0\frac{1}{4} + (-2)\frac{1}{4} = 0,\end{aligned}$$

ενώ χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση της σαν άθροισμα επάνω στο πεδίο τιμών της X δηλαδή το σύνολο $Rg(X)$ θα μας δώσει

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= x_1\bar{P}(X = x_1) + x_2\bar{P}(X = x_2) + x_3\bar{P}(X = x_3) \\ &= (+2)\frac{1}{4} + 0\frac{1}{2} + (-2)\frac{1}{4} = 0.\end{aligned}$$

Παρότι τελικά μας δίνουν την ίδια αριθμητική τιμή πρόκειται για δύο διαφορετικά αθροίσματα!

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε εναλλακτικά και την μεση τιμή για συνθεση τυχαίων μεταβλητών με κάποια ντετερμινιστική συνάρτηση.

Ορισμός

Έστω $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια ντετερμινιστική συνάρτηση. Αν ο δειγματικός χώρος Ω είναι αριθμήσιμος μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega))P(\{\omega\}) = \sum_n g(X(\omega_n))P(\{\omega_n\}) = \sum_n g(X(\omega_n))p_n.$$

Ιδιότητες της μέσης τιμής

Η μέση τιμή έχει πολύ σημαντικές ιδιότητες οι οποίες μας βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση των ιδιοτήτων των τυχαίων μεταβλητών.

Σε ότι ακολουθεί θα καταλαβαίνουμε την μέση τιμή σαν μια απεικόνιση που μας παίρνει από το σύνολο που περιέχει τις τυχαίες μεταβλητές στους πραγματικούς αριθμούς.

Η απεικόνιση αυτή ορίζεται ως $X \mapsto \mathbb{E}[X]$ και απεικονίζει την τυχαία μεταβλητή X (η οποία είναι με την σειρά της και αυτή μια απεικόνιση $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$) στους πραγματικούς αριθμούς.

Πρόταση

Η μεση τιμή είναι μια γραμμική απεικόνιση. Με άλλα λόγια αν $X_1, X_2; \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ δύο τυχαίες μεταβλητές και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, τότε

$$\mathbb{E}[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2] = \lambda_1 \mathbb{E}[X_1] + \lambda_2 \mathbb{E}[X_2].$$

Πρόταση

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $X \geq 0$ (με την έννοια ότι $X(\omega) \geq 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$ ο δειγματικός χώρος είναι αριθμήσιμος ή $X(\omega) \geq 0$ για κάθε $\omega \in A \subset \Omega$ τέτοιο ώστε $P(A) > 0$). Τότε $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

Παράδειγμα

Ένας επενδυτής μπορεί επενδύσει σε 2 μετοχές που έχουν απόδοσεις που μπορεί να μοντελοποιηθούν από τις τυχαίες μεταβλητές R_1 και R_2 αντιστοίχως με μέσες τιμές $\mathbb{E}[R_1]$ και $\mathbb{E}[R_2]$. Αν τοποθετήσει ποσοστό w του κεφαλαίου του στην 1 και το υπόλοιπο στην 2 ποιά θα είναι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου του;

Η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου θα περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή $R = wR_1 + (1 - w)R_2$ και η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου θα είναι $\mathbb{E}[R] = w\mathbb{E}[R_1] + (1 - w)\mathbb{E}[R_2]$.

Πρόταση

Έστω 2 τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και λ_1, λ_2 δυο πραγματικοί αριθμοί. Ισχύει ότι

$$\text{Var}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1^2 \text{Var}(X_1) + \lambda_2^2 \text{Var}(X_2) + 2\lambda_1 \lambda_2 \sigma_{12},$$

όπου

$$\sigma_{12} := \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])(X_2 - \mathbb{E}[X_2])],$$

μια ποσότητα που ονομάζεται συνδιακύμανση των X_1 και X_2 .

Απόδειξη

Απο τον ορισμο

$$\text{Var}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \mathbb{E}[Y^2]$$

όπου $Y := (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) - \mathbb{E}[(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)]$.

Η γραμμικότητα της μέσης τιμής δίνει

$$\begin{aligned} Y &:= (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) - \mathbb{E}[(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)] \\ &= (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) - \mathbb{E}[\lambda_1 X_1] - \mathbb{E}[\lambda_2 X_2] \\ &= \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 - \lambda_1 \mathbb{E}[X_1] - \lambda_2 \mathbb{E}[X_2] \\ &= \lambda_1 (X_1 - \mathbb{E}[X_1]) + \lambda_2 (X_2 - \mathbb{E}[X_2]) \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$Y^2 = \lambda_1^2 (X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2 + \lambda_2^2 (X_2 - \mathbb{E}[X_2])^2 + 2\lambda_1\lambda_2 (X_1 - \mathbb{E}[X_1])(X_2 - \mathbb{E}[X_2]),$$

οπότε παίρνοντας την μέση τιμή

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y^2] &= \lambda_1^2 \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2] + \lambda_2^2 \mathbb{E}[(X_2 - \mathbb{E}[X_2])^2] + \\ &\quad 2\lambda_1\lambda_2 \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])(X_2 - \mathbb{E}[X_2])] \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\text{Var}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1^2 \text{Var}(X_1) + \lambda_2^2 \text{Var}(X_2) + 2\lambda_1\lambda_2\sigma_{12}.$$

Q.E.D.

Η συνδιακύμανση είναι μια ποσότητα που μας δείχνει την στατιστική τάση που έχει η τυχαία μεταβλητή X_1 να παίρνει τιμές επάνω από την μέση τιμή της σε σχέση με την τυχαία μεταβλητή X_2 .

Αν συνήθως όταν η X_1 παίρνει τιμές μεγαλύτερες της $\mathbb{E}[X_1]$ και η X_2 παίρνει τιμές μεγαλύτερες της $\mathbb{E}[X_2]$ τότε $\sigma_{12} > 0$.

Αν συνήθως όταν η X_2 παίρνει τιμές μεγαλύτερες της $\mathbb{E}[X_1]$ η X_2 παίρνει τιμές μικρότερες της $\mathbb{E}[X_2]$ τότε $\sigma_{12} < 0$.

Αν $\sigma_{12} = 0$ οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 ονομάζονται ασυσχέτιστες και θα μπαιναμε στον πειρασμό να λέγαμε ότι είναι ανεξάρτητες αλλά **μην** το κάνουμε αυτό γιατί εν γένει **δεν** είναι σωστό!

Οι ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές είναι και ανεξάρτητες αν ακολουθούν μια πολύ ειδική κατανομή που θα δούμε στην συνέχεια και που ονομάζεται κανονική κατανομή.

Παράδειγμα

Ένας επενδυτής μπορεί επενδύσει σε 2 μετοχές που έχουν απόδοσεις που μπορεί να μοντελοποιηθούν από τις τυχαίες μεταβλητές R_1 και R_2 αντιστοίχως με μέσες τιμές $\mathbb{E}[R_1] = 0.5$ και $\mathbb{E}[R_2] = 0.9$, διακυμανσεις $\text{Var}(R_1) = 0.2$, $\text{Var}(R_2) = 0.7$ και συνδιακύμανση $\sigma_{12} = -0.2$. Αν τοποθετήσει ποσοστό w του κεφαλαίου του στην 1 και το υπόλοιπο στην 2 ποιά θα είναι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου του και ποιά η διασπορά (διακύμανση) της;

Η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου δίνεται από την τυχαία μεταβλητή $R = wR_1 + (1 - w)R_2$ οπότε

$$\mathbb{E}[R] = w\mathbb{E}[R_1] + (1 - w)\mathbb{E}[R_2] = 0.5w + (1 - w)0.9 = 0.9 - 0.4w.$$

Η συνολική διασπορά (που μπορεί να θεωρηθεί και σαν ένα μέτρο του κινδύνου που ενέχει αυτή η επένδυση) είναι ίση προς

$$\begin{aligned} \text{Var}(R) &= w^2 \text{Var}(R_1) + (1 - w)^2 \text{Var}(R_2) + 2w(1 - w)\sigma_{12} \\ &= 0.2w^2 + 0.7(1 - w)^2 + 2w(1 - w)(-0.2) \\ &= 1.3w^2 - 1.8w + 0.7 \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση για την διασπορά γενικεύεται για οποιοδήποτε πλήθος τυχαίων μεταβλητών

Πρόταση

Αν $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ δεδομένοι πραγματικοί αριθμοί ισχυει ότι

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \lambda_i \lambda_j = \sum_{i=1}^n \sigma_{ii} \lambda_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

όπου $\sigma_{ii} = \text{Var}(X_i)$ και $\sigma_{ij} = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])]$

Πρόταση (Ανισότητα Markov)

Ας υποθέσουμε ότι $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή για την οποία ισχύει $X \geq 0$ και για την οποία υπάρχει η μεση τιμή. Τότε για κάθε $t \geq 0$ ισχύει

$$\bar{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Πρόταση (Ανισότητα Chebychev)

Ας υποθέσουμε ότι $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή για την οποία ορίζεται η διασπορά, $\text{Var}(X)$. Τότε, για κάθε $t \geq 0$ ισχύει ότι

$$\bar{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2}.$$

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwartz)

Έστω $X_1, X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ δύο τυχαίες μεταβλητές οι οποίες έχουν πεπερασμένες διασπορές. Ισχύει ότι

$$|\mathbb{E}[X_1 X_2]| \leq (\mathbb{E}[X_1^2])^{1/2} (\mathbb{E}[X_2^2])^{1/2}$$

Η ανισότητα Cauchy-Schwartz εξασφαλίζει ότι

- αν μια τυχαία μεταβλητή έχει διασπορά έχει απαραίτητα και μέση τιμή.
- ο συντελεστής συσχέτισης δυο τυχαίων μεταβλητών

$$\sigma_{12} = \rho(X_1, X_2) := \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)} \sqrt{\text{Var}(X_2)}}$$

ικανοποιεί την συνθήκη $\rho(X_1, X_2) \in [-1, 1]$.

Έχουν όλες οι τυχαίες μεταβλητές μέση τιμή και διασπορά;

Μπορούμε να πούμε ότι κάθε τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ έχει μέση τιμή και διασπορά;

Για μη πεπερασμένους δειγματικούς χώρους ασφαλώς **όχι!**

Παράδειγμα

Η κατανομή του πλήθους των αιτήσεων για αποζημίωση σε μια ασφαλιστική εταιρεία δίνεται από την σχέση $P(X = n) = Cn^{-3/2}$.

- (α) Υπολογίστε την σταθερά C ;
- (β) Υπάρχει η μέση τιμή $\mathbb{E}[X]$;
- (γ) Υπάρχει η διασπορά $\text{Var}(X)$ ή η δεύτερη ροπή $\mathbb{E}[X^2]$;

Στο παραπάνω παράδειγμα δεν υπάρχει ούτε η $\mathbb{E}[X]$ ούτε η $\mathbb{E}[X^2]$.

Ο λόγος είναι γιατί η ουρά της κατανομής, δηλ. η πιθανότητα $P(X \geq N)$ πέφτει αρκετά αργά για μεγάλο N .

Πρόταση

Έστω $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ μια τυχαία μεταβλητή. Αν ορίζεται η αναμενόμενη τιμή της $\mathbb{E}[X]$ τότε

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}(X \geq n)$$

Αν η τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ είναι συνεχής τότε

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \bar{P}(X \geq x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx.$$