

Ποσοτικές Μέθοδοι στην Διαχείριση Κινδύνου: Πιθανότητες

ΕΝΟΤΗΤΑ 0.1 (Προπαρασκευαστικό)

Α. Ν. Γιαννακόπουλος

Ο.Π.Α

Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026

- 1 Εισαγωγή
- 2 Η έννοια της πιθανότητας
- 3 Τα ενδεχόμενα ως σύνολα
- 4 Αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων
- 5 Δεσμευμένη πιθανότητα
- 6 Ανεξαρτησία
- 7 Τα θεωρήματα του *Bayes*
- 8 Επαναλαμβανόμενα πειράματα

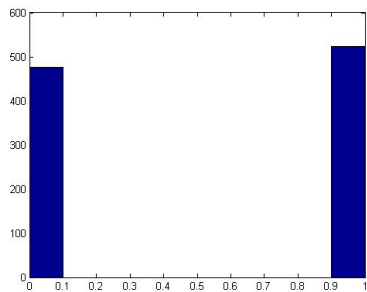
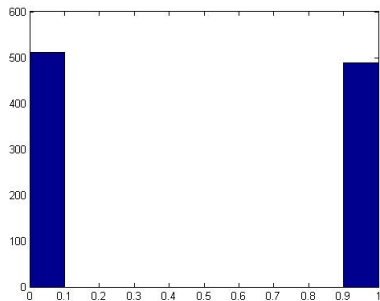
Εισαγωγή

Πολλά φαινόμενα στην φύση, την οικονομία και την καθημερινή ζωή περιλαμβάνουν την έννοια της αβεβαιότητας, της απροσδιοριστίας και της τυχαιότητας.

Υπάρχουν φαινόμενα τα οποία περιμένουμε να επαναλαμβάνονται με κάποια τάξη (π.χ. η κίνηση των πλανητών, η επαναληπτικότητα των 4 εποχών κλπ) τα οποία θα ονομάζουμε **αιτιοκρατικά** (ντετερμινιστικά) και

Φαινόμενα τα οποία δεν παρουσιάζουν την ίδια τάξη και επαναληπτικότητα (π.χ. η ριπή ενός νομίσματος, η κίνηση ενός κόκκου σκόνης, οι μεταβολές της τιμής μιας μετοχής, η διαθεση ενός καταναλωτή σχετικά με την αγορά ενός προϊόντος ή όχι κλπ) και τα οποία θα ονομάζουμε **τυχαία** φαινόμενα.

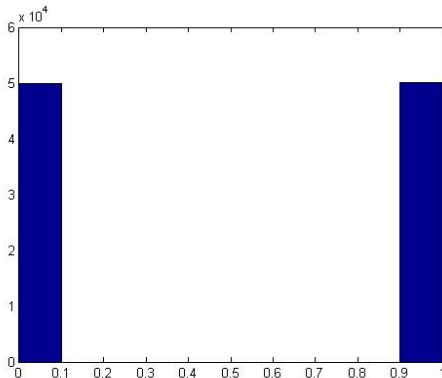
Ρίψη ενός νομίσματος



Δύο διαφορετικά ιστογράμματα απο 2 διαφορετικά πειράματα 1000

Όσες φορές και αν το δοκιμάσουμε θα πάρουμε διαφορετικά αποτελέσματα με μια απόκλιση απο το αναμενόμενο αποτέλεσμα που είναι το $1/2-1/2$.

Η απόκλιση αυτή θα γίνεται ολο και **μικροτερη** όσο μεγαλώνει ο αριθμός των πειραμάτων και μάλιστα περιμενουμε να συμπεριφέρεται με ρυθμό $N^{-1/2}$ καθώς $N \rightarrow \infty$ όπου N ο αριθμος των πειραματων.



Πιο πολύπλοκα ερωτήματα σχετικά με τις ρίψεις των νομισμάτων

Φυσικά, θα μπορούσαμε να κάνουμε σχετικά με την ρίψη των νομισμάτων και πιο πολύπλοκα αλλά και πιο ενδιαφέροντα ερωτήματα εκτός από τα απλά, δηλαδή από το αν θα έρθει κορώνα ή γράμματα.

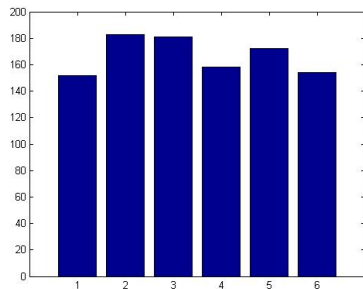
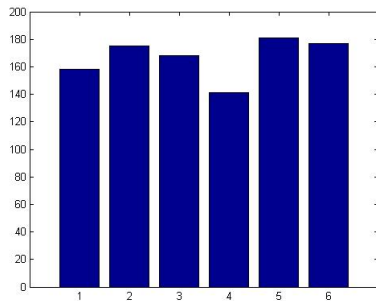
Π.χ. αν ρίξω 1024 φορές ένα νόμισμα, πόσες φορές περιμένω να έρθουν 3 κορώνες στην σειρά;

αν ρίξω 1024 φορές ένα νόμισμα, πόσες φορές περιμένω να έρθουν 3 γράμματα στην σειρά;

Πώς θα μπορούσα να απαντήσω τέτοια ερωτήματα;

Ρίψη ενός ζαριού

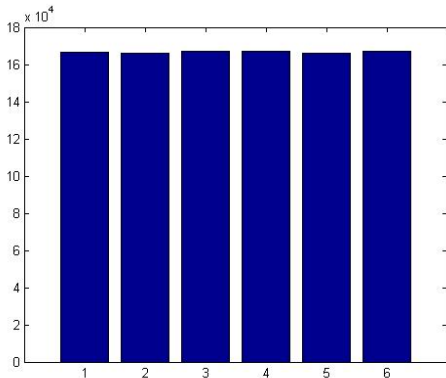




Δύο διαφορετικά ιστογράμματα απο 2 διαφορετικά πειράματα 1000
ρίψεων κάθε φορά

Όσες φορές και αν το δοκιμάσουμε θα πάρουμε διαφορετικά αποτελέσματα με μια απόκλιση απο το αναμενόμενο αποτέλεσμα που είναι το $1/6-1/6-1/6-1/6-1/6-1/6$.

Η απόκλιση αυτή θα γίνεται ολο και **μικροτερη** όσο μεγαλώνει ο αριθμός των πειραμάτων και μάλιστα περιμενουμε να συμπεριφέρεται με ρυθμό $N^{-1/2}$ καθώς $N \rightarrow \infty$ όπου N ο αριθμος των πειραματων.



Πιο πολύπλοκα ερωτήματα σχετικά με το ζάρι

Θα μπορούσαμε να ρωτήσουμε και πιο περίπλοκα ερωτήματα σχετικά με την ρίψη του ζαριού.

Ποσες φορές πχ μπορεί να φέρει στις 1000 ριψεις ένα τιμιο ζάρι αποτέλεσμα που είναι αρτιος αριθμός;

Ποσες φορές πχ μπορεί να φέρει στις 1000 ριψεις ένα τιμιο ζάρι αποτέλεσμα που είναι αρτιος αριθμός;

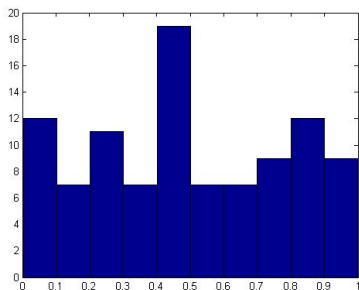
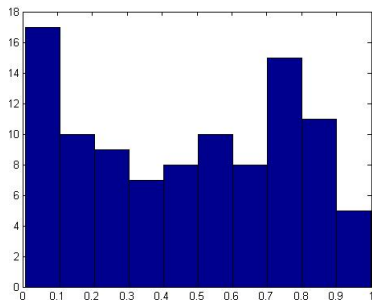
Πώς θα μπορούσαμε να απαντήσουμε τέτοια ερωτήματα;

Σκοποβολή στην ρυθ



Ρίχνουμε ένα βέλος σε ένα στόχο και μας ενδιαφέρει η απόσταση στην οποία θα πέσει το βέλος μας απο το κέντρο του στόχου.

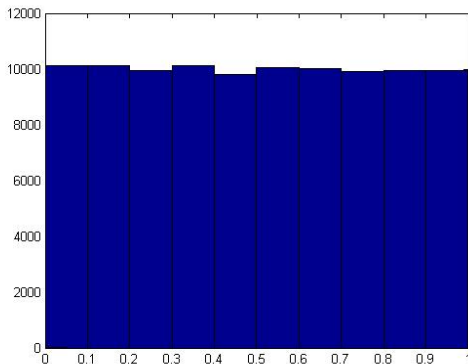
Το κάθε αποτέλεσμα, είναι ένας αριθμος $x \in [0, 1]$ και έχω απειρους αριθμούς στο διάστημα αυτό.



Δύο διαφορετικά ιστογράμματα απο 2 διαφορετικά πειράματα 100 ρίψεων κάθε φορά

Όσες φορές και αν το δοκιμάσουμε θα πάρουμε διαφορετικά αποτελέσματα με μια απόκλιση απο το αναμενόμενο αποτέλεσμα που είναι το $1/10$ του πληθυσμου σε κάθε ένα απο τα 10 κουτιά.

Η απόκλιση αυτή θα γίνεται ολο και **μικροτερη** όσο μεγαλώνει ο αριθμός των πειραμάτων και μάλιστα περιμενουμε να συμπεριφέρεται με ρυθμό $N^{-1/2}$ καθώς $N \rightarrow \infty$ όπου N ο αριθμος των πειραματων.



Θα μπορούσα να κάνω και πιο περιπλοκά ερωτήματα σχετικά με το παιχνίδι της σκοποβολής.

Πχ. Πόσες φορές σε 10000 ρίψεις περιμενω να έρθει το βέλος είτε σε απόσταση μικρότερη του 0.3 απο το κεντρο ειτε σε απόσταση μεγαλύτερη του 0.9 απο το κέντρο;

$$x \in (0, 0.3) \cup (0.9, 1)$$

Πώς θα μπορούσα να απαντήσω σε τέτοια ερωτήματα;

Η έννοια της πιθανότητας

Πως θα μπορούσαμε να ορίσουμε την πιθανότητα;

Πόσο **εύκολο** η **δύσκολο** είναι να πραγματοποιηθεί σε **κάποιες** **απο τις** **πολλες επαναλήψεις** το αποτέλεσμα το οποίο μας ενδιαφέρει.

Ορισμός

Η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός A το οποίο μας ενδιαφέρει μπορεί να οριστεί ως ακολούθως:

Επαναλαμβάνουμε ένα πείραμα N φορές και μετράμε τον αριθμό των επιτυχιών N_A κατά τις οποίες παρατηρήθηκε το εν λόγω γεγονός.

Η πιθανότητα εμφάνισης του γεγονότος A μπορεί να οριστεί ως ο λόγος

$$p(A) := \frac{N_A}{N}.$$

Απο τον ορισμό βλέπουμε ότι η πιθανότητα είναι ένας **αριθμός** p_A με την ιδιότητα $0 < p_A < 1$.

Παράδειγμα

Απο τους 100 πελάτες μιας τράπεζας που έχουν πάρει καταναλωτικό δάνειο οι 78 έχουν αποπληρώσει το δάνειο, οι 20 έχουν ζητήσει διακανονισμό λέγοντας ότι έχουν την διάθεση να καλύψουν τις υποχρεώσεις τους αλλά ζητούν παράταση, ενώ οι 2 έχουν δηλώσει οριστικά ότι αδυνατούν να πληρώσουν.

Η πιθανότητα ο τυπικός πελάτης της τράπεζας να

- μπορεί να πληρώσει είναι 0.78,
- να χρειαστεί παράταση 0.2 και
- να αδυνατεί να πληρώσει 0.02.

Στο παράδειγμα αυτό θεωρούμε τον κάθε πελάτη σαν ένα ανεξάρτητο πείραμα το οποίο **αντί να επαναλαμβάνεται τρέχει παράλληλα με τα υπόλοιπα.**

Τα ενδεχόμενα ως σύνολα

Η φυσιολογική γλώσσα της θεωρίας πιθανοτήτων είναι αυτή της θεωρίας συνόλων.

Τα ενδεχόμενα λοιπόν θα τα κατανοούμε σαν **σύνολα** (τα οποία ανήκουν σε ένα μεγαλύτερο σύνολο - υποσύνολα).

Ορισμός

Σύνολο είναι μια συλλογή από **ομοειδή αντικείμενα**.

Αν κάποιο αντικείμενο a ανήκει στην συλλογή αντικειμένων A θα συμβολίζουμε $a \in A$.

Το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο συμβολίζεται με $\emptyset$.

Ορισμός

Έστω 2 σύνολα A_1, A_2 .

Θα λέμε ότι το A_1 είναι υποσύνολο του A_2 αν κάθε στοιχείο του A_1 είναι και στοιχείο του A_2 , δηλαδή για κάθε $a \in A_1$ ισχύει ότι $a \in A_2$.

Θα συμβολίζουμε $A_1 \subset A_2$.

Παράδειγμα

Σύμφωνα με το IFRS9 ένα δανειακό προϊόν πρέπει να καταταγεί σε μία από 3 καταστάσεις, 1 : εξυπηρετούμενο, 2 : επισφαλές και 3 : default . Το σύνολο $A = \{1, 2, 3\}$ περιέχει όλες τις πιθανές καταστάσεις (δειγματικός χώρος).

Τα ενδεχόμενα

$$\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\},$$

είναι πιθανές εκβάσεις ή πιθανές σύνθετες ερωτήσεις που μπορεί να κάνει κάποιος για το δανειακό αυτό προϊόν.

Από αυτά τα ενδεχόμενα $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ μπορεί να συμβούν σε ένα πείραμα (π.χ. σε ένα δανειακό προϊόν) και ονομάζονται **απλά ενδεχόμενα** ενώ τα ενδεχόμενα $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A$ δεν μπορεί να συμβούν σε ένα πείραμα αλλά σε περισσότερα του ενός και αποτελούν σύνθετες ερωτήσεις που μπορεί να κάνει κάποιος για το πείραμα και ονομάζονται **σύνθετα ενδεχόμενα**.

Ορισμός

Το σύνολο που περιέχει όλα τα απλά γεγονότα που μπορεί να πραγματοποιηθούν σε κάποιο πείραμα ονομάζεται **δειγματοχώρος** και συνήθως συμβολίζεται με Ω .

Τα υποσύνολα του Ω περιγράφουν όλα τα απλά ή συνθετα γεγονότα τα οποία σχετίζονται με τα πείραμα αυτό.

Τα σύνθετα γεγονότα παράγονται από τα απλά χρησιμοποιώντας τις πράξεις των συνόλων

- Ένωση $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ όπου $a \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ αν και μόνο αν υπάρχει $i \in \mathcal{I}$ τέτοιο ώστε $a \in A_i$ **ερώτηση ή.**
- Τομή $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$ όπου $a \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$ αν και μόνο αν για κάθε $i \in \mathcal{I}$ $a \in A_i$ **ερώτηση και.**
- Συμπλήρωμα $A^c = \{a \in \Omega, a \notin A\}$, **ερώτηση όχι.**

Ένας τρόπος να ορίσουμε το μέγεθος ενός τέτοιου συνόλου είναι χρησιμοποιώντας τον αριθμό (δηλαδή το πλήθος) των στοιχείων του.

Ορισμός

Έστω A ένα πεπερασμένο σύνολο. Ο αριθμός των στοιχείων του ονομάζεται *πληθικός αριθμός* και συμβολίζεται $|A|$.

Ορισμός

Έστω Ω ένα πεπερασμένο σύνολο το οποίο είναι ο δειγματοχώρος για κάποιο πείραμα, και $A \subset \Omega$ κάποιο γεγονός.

Η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός A ορίζεται ως

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Παράδειγμα

Το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ είναι το σύνολο των αποτελεσμάτων που μπορεί να φέρει ένα ζάρι και έχει πληθικό αριθμό 6.

Τα σύνολα $A_1 = \{1, 3, 5\}$, $A_2 = \{2, 4, 6\}$ είναι υποσύνολα του.

Το A_1 μπορεί να περιγράψει το ενδεχόμενο να έρθει **άρτιο** αποτέλεσμα από το ζάρι ενώ το A_2 μπορεί να περιγράψει το ενδεχόμενο να έρθει **περιττό** αποτέλεσμα από το ζάρι.

Τόσο το A_1 όσο και το A_2 έχουν πληθικό αριθμό 3.

Φυσικά μπορεί κανείς να δει και άλλα υποσύνολα του A π.χ. το $A_3 = \{1\}$, $A_4 = \{2\}$ κλπ. τα οποία έχουν πληθικό αριθμό 1 το καθένα.

Μπορεί λοιπόν να πει κανείς ότι η πιθανότητα να φέρει το αριθμό 2 ένα ζάρι μπορεί να οριστεί ως $\frac{|A_4|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$, ενώ η πιθανότητα να φέρει άρτιο αριθμό μπορεί να οριστεί ως $\frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Ο παραπάνω ορισμός της πιθανότητας μπορεί να γενικευθεί και για περιπτώσεις όπου ο δειγματοχώρος ή το γεγονός που μας ενδιαφέρει δεν είναι ένα πεπερασμένο σύνολο.

Παράδειγμα

Το πάτωμα ενός δωματίου αποτελείται από 10 όμοια πλακάκια. Κάποιος ρίχνει ένα μαρκαδόρο η από ψηλά και με κλειστά μάτια. Ποιά είναι η πιθανότητα να λερωθεί το πρώτο πλακάκι;

Αν το συνολικό εμβαδό του πατώματος είναι E , το εμβαδό του κάθε πλακακιου είναι $\frac{E}{10}$.

Το σχετικό μέγεθος από ένα πλακάκι σε σχέση με όλο το πάτωμα είναι $1/10$ οπότε μπορεί να πει κανείς ότι η πιθανότητα να λερωθεί το πρώτο πλακάκι είναι το σχετικό μέγεθος για το πλακάκι αυτό σε σχέση με όλο το πάτωμα δηλαδή $1/10$.

Aide memoire ...

- ❶ για κάθε i , ισχύει ότι $A_i \subset \bigcup_{j=1}^m A_j = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$.
- ❷ για κάθε i , ισχύει ότι $\bigcap_{j=1}^m A_j = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m \subset A_i$.
- ❸ Τα A_1 και A_2 είναι ξένα μεταξύ τους αν και μόνο αν $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
- ❹ Είναι προφανές ότι $A \cup A^c = \Omega$. Επίσης, $A \cap A^c = \emptyset$.

Ιδιότητες των πράξεων

$$A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$$

$$A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$$

$$(\bigcup_i A_i)^c = \bigcap_i A_i^c$$

$$(\bigcap_i A_i)^c = \bigcup_i A_i^c$$

Ορισμός (Καρτεσιανό γινόμενο περισσοτέρων των δύο συνόλων.)

Έστω $A_1, \dots, A_m$, m σύνολα. Το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times \dots \times A_m$ είναι το σύνολο που αποτελείται απο διατεταγμένες m -άδες της μορφής $(a_{i_1}^{(1)}, \dots, a_{i_m}^{(m)})$ όπου $a_{i_1}^{(1)} \in A_1, \dots, a_{i_m}^{(m)} \in A_m$, ή με μαθηματικό συμβολισμό

$$A_1 \times \dots \times A_m = \{(a_{i_1}^{(1)}, \dots, a_{i_m}^{(m)}), \text{ όπου } a_{i_1}^{(1)} \in A_1, \dots, a_{i_m}^{(m)} \in A_m\}.$$

Ορισμός

Έστω A_1, A_2 δύο σύνολα.

Το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2$ είναι το σύνολο που αποτελείται από τα διατεταγμένα ζεύγη της μορφής $(a_i^{(1)}, a_j^{(2)})$ όπου $a_{i_1}^{(1)} \in A_1$ και $a_{i_2}^{(2)} \in A_2$.

Με μαθηματικό συμβολισμό αυτό το γράφουμε ως

$$A_1 \times A_2 = \{(a_{i_1}^{(1)}, a_{i_2}^{(2)}) \text{ όπου } a_{i_1}^{(1)} \in A_1 \text{ και } a_{i_2}^{(2)} \in A_2\}.$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε το καρτεσιανό γινόμενο περισσοτέρων των δύο συνόλων.

Ορισμός

Έστω $A_1, \dots, A_m$, m σύνολα. Το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times \dots \times A_m$ είναι το σύνολο που αποτελείται από διατεταγμένες m -άδες της μορφής $(a_{i_1}^{(1)}, \dots, a_{i_m}^{(m)})$ όπου $a_{i_1}^{(1)} \in A_1, \dots, a_{i_m}^{(m)} \in A_m$, ή με μαθηματικό συμβολισμό

Παράδειγμα

Μια τράπεζα έχει ένα χαρτοφυλάκιο δανείων το οποίο αποτελείται από m πελάτες.

Ο κάθε πελάτης μπορεί να

- αποπληρώσει πλήρως και επιτυχώς το δάνειο του (E_i),
- να ζητήσει παράταση (Π_i), ή
- να κηρύξει πτώχευση (X_i).

Ο δειγματοχώρος για τον κάθε πελάτη i , είναι το σύνολο
 $A_i = \{E_i, \Pi_i, X_i\}$.

Ο δειγματοχώρος για όλο το πελατολόγιο είναι το καρτεσιανό γινόμενο
 $\Omega = A_1 \times \cdots \times A_m$.

Αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων

Ο ορισμός $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ για την πιθανότητα είναι πολύ περιοριστικός μεταξύ άλλων επειδή θεωρεί ότι όλα τα απλά γεγονότα είναι ισοπίθανα.

Ορισμός (Αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων για πεπερασμένους δειγματοχώρους)

Έστω Ω ένα πεπερασμένο σύνολο το οποίο θεωρούμε ως τον δειγματοχώρο για κάποιο πείραμα.

Η πιθανότητα θα είναι μια απεικόνιση P η οποία σε κάθε υποσύνολο A του Ω θα αντιστοιχεί ένα αριθμό στο διάστημα $[0, 1]$ και η οποία έχει τις ιδιότητες

- (i) $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$,
- (ii) Αν τα υποσύνολα A_i , $i = 1, \dots, m$ του Ω είναι ανά δυο ξένα, δηλαδή $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m P(A_i).$$

Όλοι οι χωροι πιθανότητας που μας ενδιαφέρουν στην διαχείριση κινδύνου δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένοι.

Ορισμός (Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας)

Έστω Ω ένας οποιοσδήποτε δειγματικός χώρος. Θα ονομάζουμε πιθανότητα μια απεικόνιση από τα υποσύνολα του Ω (γεγονότα) στο διάστημα $[0, 1]$ με τις ιδιότητες

- (i) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1,$
- (ii) Αν τα A_i είναι γεγονότα ανα δύο ξένα ($A_i \cap A_j = \emptyset$) τότε
$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Το πεδίο ορισμού της απεικόνισης P θα πρέπει να είναι:

Ορισμός (σ-αλγεβρα)

Μια συλλογή $\mathcal{F}$ από υποσύνολα του Ω ονομάζεται σ-άλγεβρα αν

- ❶ $\emptyset \in \mathcal{F}$ και $\Omega \in \mathcal{F}.$
- ❷ Αν $A \in \mathcal{F}$ και $A^c \in \mathcal{F}.$
- ❸ Αν $A_i \in \mathcal{F},$ για $i \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}.$

Μια απεικόνιση $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1],$ όπου $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα, με τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται μέτρο πιθανότητας.

Παράδειγμα (Η κατανομή Poisson)

Ας υποθέσουμε όπως στο παράδειγμα την ποσοτικοποίησης των αιτήσεων για αποζημίωση που δέχεται μια ασφαλιστική εταιρεία ότι $\Omega = \mathbb{N}$.

Ο **γενικότερος** τρόπος να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στο $\Omega = \mathbb{N}$ είναι ορίζοντας μια ακολουθία $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, τέτοια ώστε $p_n \in (0, 1)$ και $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$.

Θεωρούμε ότι $P(\{n\}) = p_n$, είναι η πιθανότητα που αντιστοιχεί στο απλό γεγονός $\{n\}$.

Ένα σύνθετο γεγονός είναι ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{N}$, που αναγκαστικά θα είναι της μορφής $A = \{k : k \in J \subset \mathbb{N}\}$.

Για ένα τέτοιο σύνθετο γεγονός ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας ως $P(A) := \sum_{k \in J} p_k$.

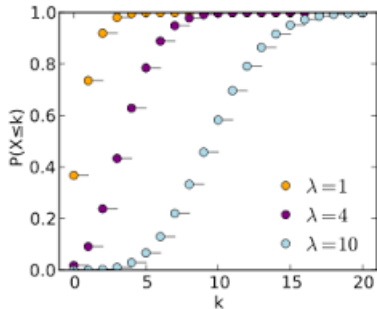
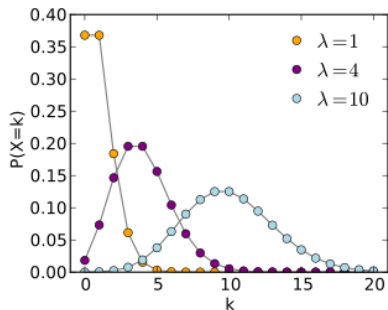
Στην ειδική περίπτωση όπου $p_n = \frac{1}{n!} \lambda^n e^{-\lambda}$, για κάποιο $\lambda > 0$ παίρνουμε ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{N}$ το οποίο αντιστοιχεί στην κατανομή Poisson ένα πολύ διαδεδομένο μοντέλο στα ασφαλιστικά μαθηματικά και την διαχείριση κινδύνου.

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό έχουμε ότι σε μία δεδομένη χρονική περίοδο T η πιθανότητα να δεχθεί η εταιρεία n αιτήσεις για αποζημίωση είναι ίση με

$$p_n = \frac{1}{n!} \lambda^n e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0$$

Η πιθανότητα να δεχθεί η εταιρεία στην περίοδο T το πολύ n αιτήσεις για αποζημίωση είναι ίση με

$$P(\text{το πολύ } n \text{ αιτήσεις}) = p_0 + p_1 + \cdots + p_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}$$



Source: Wikicommons

Παράδειγμα (Μέτρα πιθανότητας επάνω στο $\mathbb{R}$)

Ας υποθέσουμε ότι $\Omega = \mathbb{R}$, όπως στην περίπτωση π.χ. όπου μας ενδιαφέρει η μοντελοποίηση των αποδόσεων καποιας μετοχής.

Στην περίπτωση αυτή το $\mathcal{F}$ θα μπορούσε να είναι μια δομή υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, για παράδειγμα η άλγεβρα $Borel \mathcal{B}(\mathbb{R})$ η οποία και είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (αλλά και πολλά άλλα!)

Ένας τρόπος να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στο $\mathbb{R}$ είναι χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ η οποία να είναι αύξουσα και συνεχής απο τα δεξιά.

Τότε ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας για το οποίο να ισχυει

$$P((a, b)) = F(b^-) - F(a^+),$$

$$P((a, b]) = F(b^+) - F(a^+),$$

$$P([a, b]) = F(b^+) - F(a^-),$$

$$P([a, b)) = F(b^-) - F(a^-).$$

Ένας μνημονικός κανόνας είναι αν το άκρο του διαστήματος συμπεριλαμβάνεται στο διάστημα να το πλησιάσουμε από τα έξω, ενώ αν όχι από τα μέσα

Αν η συνάρτηση F είναι συνεχής τότε το αντίστοιχο μέτρο δίνει την ίδια πιθανότητα σε όλα τα διαστήματα!

Το παραπάνω μέτρο ονομάζεται μέτρο Stieltjes και συνδέεται με την συναρτηση κατανομής.

Αν $F(x) = x$ παίρνουμε ένα μέτρο που ονομάζεται μέτρο Lebesgue

Παράδειγμα

Ένας εναλλακτικός τρόπος να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ είναι να θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, και να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε

$$P((a, b)) = P((a, b]) = P([a, b]) = P([a, b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

Παράδειγμα

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να εργαστούμε και στην περίπτωση $\Omega = \mathbb{R}^d$, χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = 1$ και χρησιμοποιώντας d -διάστατα ολοκληρώματα.

Πρόταση

Έστω ότι P όπως στον παραπάνω ορισμό.

Τότε

- (i) Αν $A \subset B$ ισχύει $P(A) \leq P(B)$
- (ii) $P(A^c) = 1 - P(A)$,
- (iii) $P(A \setminus B) = P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$,
- (iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Απόδειξη.

(i) Παρατηρείστε ότι αν $A \subset B$ τότε $B = A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \cap A^c)$ και $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$. Απο την ιδιότητα (ii) του ορισμού έχουμε ότι

$$P(B) = P(A \cup (B \cap A^c)) = P(A) + P(B \cap A^c). \quad (1)$$

Όμως απο το γεγονός ότι η απεικόνιση P αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε υποσύνολο του Ω ένα θετικό αριθμό βλέπουμε ότι $P(B \cap A^c) \geq 0$ άρα απο την (1) βλέπουμε ότι θα πρέπει $P(B) \geq P(A)$.

(ii) Μπορούμε να γράψουμε $\Omega = A \cup A^c$ και φυσικά $A \cap A^c = \emptyset$.

Απο την ιδιότητα (ii) του ορισμού έχουμε ότι $P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$ και επειδή $P(\Omega) = 1$ καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Πιθανότητα της ένωσης περισσότερων των 2 γεγονότων

Πρόταση

Για οποιαδήποτε γεγονότα A_i , $i = 1, \dots, m$ έχουμε ότι

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k: \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m}} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}),$$

όπου το άθροισμα είναι ένα άθροισμα επάνω σε όλες τις πιθανές τιμές των (το πολύ) m δεικτών $i_1, i_2, \dots, i_m$ επιλεγμένες κατά τέτοιο τρόπο ώστε να είναι διατεταγμένες ως $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$.

Παράδειγμα

Ας πάρουμε την περίπτωση 3 ενδεχομένων. Γράψτε τον παραπάνω τυπο στην περίπτωση αυτή

Αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε 3 δείκτες i_1, i_2, i_3 .

Το k μπορεί να πάρει 3 τιμές, $k = 1, 2, 3$.

Όταν $k = 1$ μπορούμε να πάρουμε μόνο τον δείκτη i_1 ο οποίος παίρνει όλες τιμές $i_1 = 1, 2, 3$.

Αυτό μας δίνει την συνεισφορά

$$I_1 = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

στο άθροισμα.

Όταν $k = 2$ μπορούμε να πάρουμε μόνο τους δείκτες i_1, i_2 οι οποίοι παίρνουν τις τιμές $1 \leq i_1 < i_2 \leq 3$, δηλαδή επιτρέπονται τα ζεύγη τιμών για τους δείκτες (i_1, i_2) : $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, και αυτό μας δίνει την συνεισφορά

$$I_2 = - (P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3))$$

στο άθροισμα.

Τέλος, όταν $k = 3$, μπορούμε να πάρουμε 3 δεικτες i_1, i_2, i_3 οι οποίοι παίρνουν τις τιμες $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 3$, δηλαδή επιτρέπονται μόνο μια τριάδα τιμών για τους δεικτες (i_1, i_2, i_3) , η επιλογή $(1, 2, 3)$ η οποία και συνεισφέρει στο άθροισμα

$$I_3 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Το τελικό αποτέλεσμα είναι το αθροισμα και των 3 αυτών συνεισφορών.

Αυτό μας δίνει και το τελικό αποτέλεσμα το οποίο είναι το

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &- (P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)) \\ &+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Μία ασφαλιστική εταιρεία προσφέρει 3 είδη συνταξιοδοτικών προϊόντων τα E_1, E_2, E_3 .

Με βάση τα ιστορικά της στοιχεία από τους 100 πελάτες της οι 20 έχουν αγοράσει το E_1 , οι 30 το E_2 , οι 10 το E_3 , οι 15 και το E_1 και το E_2 , οι 5 και το E_1 και το E_3 , 9 και το E_2 και το E_3 ενώ 5 έχουν αγοράσει και τα 3 είδη.

Η εταιρεία αυτή ξεκινάει από αύριο ένα νέο κύκλο προσφορών στο ίδιο δίκτυο πελατών.

Ποια πιστεύετε ότι θα είναι η πιθανότητα κάποιος πελάτης να αγοράσει και τα 3 προϊόντα;

Ας ονομάσουμε A_i , $i = 1, 2, 3$ το γεγονός ότι ο τυπικός πελάτης της εταιρείας επιλέγει να αγοράσει το είδος E_i .

Με βάση τα ιστορικά στοιχεία της εταιρείας έχουμε ότι

$$P(A_1) = \frac{20}{100} = \frac{2}{10}, \quad P(A_2) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}, \quad P(A_3) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10},$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{15}{100}, \quad P(A_1 \cap A_3) = \frac{5}{100}, \quad P(A_2 \cap A_3) = \frac{9}{100},$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{5}{100}.$$

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του προηγούμενου παραδείγματος μπορούμε να υπολογίσουμε

$$I_1 = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{20}{100} + \frac{30}{100} + \frac{10}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},$$

$$I_2 = -(P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)) \\ = -\left(\frac{15}{100} + \frac{5}{100} + \frac{9}{100}\right) = -\frac{29}{100},$$

$$I_3 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{5}{100},$$

οπότε η πιθανότητα που ζητάμε είναι η

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{50}{100} - \frac{29}{100} + \frac{5}{100} = \frac{26}{100}.$$

Δεσμευμένη πιθανότητα

Ορισμός

Έστω A και B δυο γεγονότα. Η δεσμευμένη πιθανότητα του A δεδομένου ότι έχει συμβεί το B ορίζεται ως

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Η πιθανότητα αυτή μας δίνει μια καλύτερη πληροφορία σχετικά με την πραγματοποίηση του γεγονότος A αν προσπαθούσαμε να την εκτιμήσουμε χωρίς την δέσμευση.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι οι πίνακες επιβίωσης μας δείχνουν ότι η πιθανότητα να επιζήσει ένας ασφαλισμένος μέχρι και την ηλικία των x ετών δίνεται από την σχέση

$$P(X \leq x) := F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0, \quad X \text{ η ηλικία}$$

Ένας ασκούμενος αναλογιστής διερωτάται αν είναι συμφέρον συμφωνα με τους νόμους των πιθανοτήτων να ανανεώσει για ένα ακόμα χρόνο το ασφαλιστικό συμβόλαιο ενός πελάτη του που ήδη έχει περάσει τα 68. Τι θα του λέγατε;

Ας θέσουμε $t_1 = 68$ και $t_2 = 1$.

Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα

$$P(X > t_1 + t_2 \mid X > t_1)$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(X > t_1 + t_2) &= 1 - P(X \leq t_1 + t_2) = 1 - F(t_1 + t_2) \\ &= e^{-\lambda(t_1+t_2)} = e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda t_2} \\ &= (1 - P(X \leq t_1))(1 - P(X \leq t_2)) = P(X > t_1)P(X > t_2). \end{aligned}$$

Ας ορίσουμε τώρα τα γεγονότα

$$\begin{aligned} A &= \{X > t_1 + t_2\}, \\ B &= \{X > t_1\}, \end{aligned}$$

και απο τον ορισμο της δεσμευμένης πιθανότητας,

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(X > t_1)P(X > t_2)}{P(X > t_1)} = P(X > t_2).$$

Χρησιμοποιήσαμε την παρατήρηση $A \subset B$ οπότε $A \cap B = A$.

Συνεπώς $P(X < t_1 + t_2 | X > t_1) = P(X > t_2)$.

Πιθανότητα τομής πολλών γεγονότων

Πρόταση

Ισχυει ότι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_m) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) \cdots P(A_m \mid \bigcap_{i=1}^{m-1} A_i)$$

Απόδειξη:

Η προταση ισχυει για $m = 2$:

Πράγματι απο τον ορισμό της δεσμευμενης πιθανοτητας

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)$$

Ας υποθέσουμε οτι ισχύει για $m - 1$ δηλαδή οτι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{m-1}) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) \cdots P(A_{m-1} \mid \bigcap_{i=1}^{m-2} A_i)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για m .

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) &= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cap A_m\right) \\
 &= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right)\right) P\left(A_m \mid \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right)\right) \\
 &= P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_2 \cap A_1) \dots P\left(A_{m-1} \mid \left(\bigcap_{i=1}^{m-2} A_i\right)\right) \times \\
 &\quad \times P\left(A_m \mid \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right)\right)
 \end{aligned}$$

άρα ισχύει και για m .

Κατά συνέπεια από την επαγωγή ισχύει γενικά.

Q.E.D.

Παράδειγμα

Έχετε ένα δείγμα από 100 δανειακά προϊόντα από τα οποία γνωρίζετε ότι τα 10 θα κάνουν default. Επιλέγετε 3 από αυτά στην τύχη.

Υπολογίστε την πιθανότητα να είναι και τα 3 να κάνουν default..

Έστω A_1 το γεγονός ότι το πρώτο από τα προϊόντα που επιλέξαμε θα κάνει default, A_2 το δεύτερο και A_3 το τρίτο.

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_2 \cap A_3)$$

Παρατηρούμε ότι

$$P(A_1) = \frac{10}{100}$$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{9}{99}$$

(έχοντας αφαιρέσει 1 μένουν 99, και αφού αυτο που αφάιρεσα εκανε default τα 99 που μένουν περιέχουν 9 που θα κανουν default)

$$P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{8}{98}$$

(έχοντας αφαιρέσει 2 μένουν 98, και αφού αυτά τα 2 που αφάιρεσα εκαναν default τα 98 που μένουν περιέχουν 8 που θα κανουν default)

Αρα η πιθανοτητα που ζητάμε είναι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_2 \cap A_3) = \frac{10}{100} \frac{9}{99} \frac{8}{98}$$

Ανεξαρτησία

Ορισμός

Θα λέμε ότι τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα αν

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Η ανεξαρτησία σημαίνει ότι

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Γνώση σχετικά με το γεγονός B δεν αυξάνει την προβλεπτική ικανότητα σχετικά με το γεγονός A !

Παράδειγμα

Μια μετοχή μπορεί καθε ημέρα να παρουσιάσει ανοδική (H) ή καθοδική (T) τάση.

Παρατηρούμε την μετοχή 3 διαδοχικές ημέρες και θεωρούμε τα γεγονότα

$$A = \{ \text{την πρώτη μέρα είχαμε υψηλές αποδόσεις} \}$$

$$B = \{ \text{την δεύτερη ημέρα είχαμε υψηλές αποδόσεις} \}$$

$$C = \{ \text{έχουμε 2 ημέρες στην σειρά υψηλές αποδόσεις} \}$$

Δείξτε ότι τα γεγονότα αυτά είναι ανα 2 ανεξαρτηता.

Θα κατασκευάσουμε πρώτα τον δειγματοχωρο ο οποίος είναι ο

$$\Omega = \{H_1 H_2 H_3, H_1 H_2 T_3, H_1 T_2 H_3, H_1 T_2 T_3, T_1 H_2 H_3, T_1 H_2 T_3, \\ T_1 T_2 H_3, T_1 T_2 T_3\}$$

(αποτελείται από 8 στοιχεία)

Επίσης παρατηρούμε ότι τα γεγονότα

$$A = \{H_1 H_2 H_3, H_1 H_2 T_3, H_1 T_2 H_3, H_1 T_2 T_3\}$$

$$B = \{H_1 H_2 H_3, H_1 H_2 T_3, T_1 H_2 H_3, T_1 H_2 T_3\}$$

$$C = \{H_1 H_2 T_3, T_1 H_2 H_3\}$$

Είμαστε τώρα σε θέση να ελέγξουμε την ανεξαρτησία των διαφόρων ζευγών απο γεγονότα.

Για να ελέγξουμε π.χ τα A και C :

$$A \cap C = \{H_1 H_2 T_3\} \text{ οπότε } P(A \cap C) = \frac{1}{8}.$$

$$P(A)P(C) = \frac{4}{8} \frac{2}{8} = \frac{1}{8} = P(A \cap C)$$

Όμοια τα υπόλοιπα.

Παράδειγμα

Ένα ζευγάρι ασφαλίζεται ομαδικά. Ο άνδρας είναι ηλικίας 30 ετών και η γυναίκα 29. Το ζευγάρι έχει 2 συμβόλαια.

- Συμβόλαιο Α. Πληρώνει το ποσό X_A στα παιδιά αν και οι 2 πεθάνουν το τρέχον έτος.
- Συμβόλαιο Β. Πληρώνει το ποσό X_B σε όποιον απο τους δύο επιζώντες αν ένας απο τους 2 πεθάνει το τρέχον έτος.

Αν οι πίνακες επιβίωσης δίνουν πιθανότητα $q_{30}^A = 0.011$ και $q_{29}^F = 0.008$, υπολογίστε την πιθανότητα κάθε ένα απο τα παραπάνω συμβόλαια να πληρώσει αποζημίωση τον χρόνο αυτό (υποθέτωντας ανεξαρτησία).

Ας ορίσουμε τα γεγονότα C_A και C_Γ που αντιστοιχούν στον θάνατο του άνδρα και της γυναίκας αντιστοίχως, κατά το τρέχον έτος.

$$P(C_A) = q_{30}^A = 0.011, \text{ και } P(C_\Gamma) = q_{29}^\Gamma.$$

Το συμβόλαιο A θα πληρώσει αν συμβει το γεγονός $C_A \cap C_\Gamma$, δηλ.

$$P(A) = P(C_A \cap C_\Gamma) = P(C_A)P(C_\Gamma) = 0.011 \times 0.008 = 0.000088$$

Το συμβόλαιο B θα πληρώσει αν συμβεί το γεγονός $C_A \cup C_\Gamma$, δηλ.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(C_A \cup C_\Gamma) = P(C_A) + P(C_\Gamma) - P(C_A \cap C_\Gamma) \\ &= 0.011 + 0.008 - 0.000088 = 0.018912 \end{aligned}$$

Ποιό απο τα 2 συμβόλαια συμφέρει καλύτερα την εταιρεία;

Για να ορίσουμε ανεξαρτησία παραπάνω απο δύο γεγονότων θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν όλες τις πιθανες τομες, πχ. τα A_1, A_2, A_3 θα είναι ανεξαρτητα αν

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2),$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3),$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3),$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

Το να είναι ανα δυο ανεξάρτητα τρια γεγονοτα δεν σημαίνει απαραίτητα οτι είναι και ανεξαρτητα:

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και ας πάρουμε επάνω στο σύνολο αυτό την πιθανότητα που είναι συμβατη με το $P(\omega_i) = \frac{1}{4}$.

Ας θεωρήσουμε τωρα τα 3 γεγονότα $A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$, $A_2 = \{\omega_1, \omega_3\}$, $A_3 = \{\omega_2, \omega_3\}$.

Τα γεγονότα A_1, A_2, A_3 είναι ανα 2 ανεξάρτητα αλλα δεν είναι ανεξαρτητα.

Παράδειγμα

Δείξτε ότι αν τα A και B είναι ανεξάρτητα γεγονότα τότε είναι ανεξάρτητα και τα A και B^c .

Παρατηρούμε ότι $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$ και $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$.
Συνεπώς,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c),$$

οπότε

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c), \end{aligned}$$

δηλαδή τα A και B^c είναι ανεξάρτητα.

Τα θεωρήματα του Bayes

Πρόταση

Ας υποθέσουμε οι τα $A_1, \dots, A_m$ είναι τέτοια ώστε $A_i \cap A_j = \emptyset$ για κάθε $i, j = 1, \dots, m$ και $\bigcup_{i=1}^m A_i = \Omega$. Τότε, για κάθε γεγονός A ισχύει ότι

$$P(A) = \sum_{i=1}^m P(A | A_i)P(A_i)$$

Η συλλογή των γεγονότων A_i , $i = 1, \dots, m$ ονομάζεται διαμέριση του δειγματοχώρου.

Απόδειξη:

Παρατηρούμε ότι

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) = \bigcup_{i=1}^m (A \cap A_i)$$

Εφ' όσον τα A_i είναι ανα δυο ξένα το ίδιο ισχύει και για τα $A \cap A_i$, δηλαδή $(A \cap A_i) \cap (A \cap A_j) = \emptyset$.

Επομένως,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^m (A \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^m P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^m P(A | A_i) P(A_i).$$

Q.E.D

Το θεώρημα του Bayes.

Θεώρημα

Ας υποθέσουμε ότι $A_1, \dots, A_m$ είναι μια διαμέριση του δειγματοχώρου Ω και A ένα γεγονός τέτοιο ώστε $P(A) > 0$. Ισχύει ότι

$$P(A_i | A) = \frac{P(A | A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^m P(A | A_j)P(A_j)}$$

Απόδειξη:

Απο τον νόμο της ολικης πιθανότητας,

$$P(A) = \sum_{j=1}^m P(A | A_j)P(A_j)$$

Απο τον ορισμό της δεσμευμενης πιθανότητας

$$P(A | A_i) = \frac{P(A \cap A_i)}{P(A_i)}, \quad P(A_i | A) = \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)}$$

Συνεπώς

$$P(A_i | A) = \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A | A_i)P(A_i)}{P(A)}$$

Q.E.D

Παράδειγμα

Μια τράπεζα χρησιμοποιεί μια scorecard για να ελέγξει την αξιοπιστία των πελατών της και συγκεκριμένα για να αξιολογήσει ποιός πελάτης είναι αναξιόπιστος. Ας υποθέσουμε ότι η scorecard έχει 99 % επιτυχία (με την έννοια ότι στους 100 αναξιόπιστους πελάτες στους οποίους εφαρμόστηκε χαρακτηρίσε τους 99 αναξιόπιστους).

Απο τον γενικό πληθυσμό των πελατών της τράπεζας έχουμε παρατηρήσει ότι 1 στους 100 πελάτες είναι αναξιόπιστος.

Επίσης ας υποθέσουμε ότι η scorecard έχει 5% ποσοστό λανθασμενης αξιολόγησης με την έννοια ότι μπορεί να χαρακτηρίσει ως αναξιόπιστο έναν πελάτη ο οποίος στην πραγματικότητα είναι αξιόπιστος.

Ας υποθέσουμε ότι ένας καινούργιος πελάτης μπαίνει στην τράπεζα και η scorecard τον κρίνει αναξιόπιστο. Ποιά η πιθανότητα να είναι πραγματικά αναξιόπιστος;

Έστω A_1 το γεγονός ότι ένας πελάτης είναι αναξιόπιστος και A_2 ότι είναι αξιόπιστος.

Επίσης εστω B_1 το γεγονός ότι το τεστ το κρίνει αναξιόπιστο και B_2 το γεγονός ότι το τεστ τον κρίνει αξιόπιστο.

Η πιθανότητα $P(B_1 | A_1) = 0.99$ είναι το ποσοστό επιτυχίας του τεστ.

Η πιθανότητα $P(B_1 | A_2) = 0.05$ είναι το ποσοστό αποτυχίας του τεστ.

Εμείς χρειαζομαστε να υπολογίσουμε το $P(A_1 | B_1)$, δηλαδή την πιθανότητα ο πελάτης να είναι αναξιόπιστος δεδομένου ότι το τεστ τον χαρακτήρισε ως αναξιόπιστο.

Προσοχή, αυτό **δεν** είναι το ποσοστό επιτυχίας του τεστ, το οποίο ελέγχεται στο υποσύνολο του πληθυσμού των αναξιόπιστων πελατών και είναι το $P(B_1 | A_1)$.

Επίσης εν γένει ισχύει $P(B_1 | A_1) + P(B_1 | A_2) \neq 1$!

Αυτό που θα πρέπει να ισχύει είναι $P(A_1 | B_1) + P(A_2 | B_1) = 1$.

Απο τον τύπο του Bayes

$$\begin{aligned}
 P(A_1 | B_1) &= \frac{P(B_1 | A_1)P(A_1)}{P(B_1 | A_1)P(A_1) + P(B_1 | A_2)P(A_2)} \\
 &= \frac{\frac{99}{100} \frac{1}{100}}{\frac{99}{100} \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \frac{99}{100}} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Επαναλαμβανόμενα πειράματα

Ας πάρουμε ένα πείραμα το οποίο έχει δειγματικό χώρο Ω και ας θεωρήσουμε ότι το επαναλαμβάνουμε και η κάθε επανάληψη είναι ανεξάρτητη από την προηγούμενη.

Πρόταση

Ας θεωρήσουμε ένα γεγονός A και ας υποθέσουμε ότι κάνουμε n ανεξάρτητες επαναλήψεις αυτού του πειράματος.

Η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο αυτό και στις n επαναλήψεις είναι $(P(A))^n$.

Η πιθανότητα να μην εμφανιστεί σε καμία από τις n επαναλήψεις είναι $(1 - P(A))^n$.

Απόδειξη:

Ο δειγματικός χώρος των n επαναλήψεων είναι ο

$$\underbrace{\Omega \times \cdots \Omega}_{n\text{-φορές}}$$

Το ενδεχόμενο να εμφανιστεί το A και στις n επαναλήψεις είναι το

$$\underbrace{A \times \cdots A}_{n\text{-φορές}}$$

Λόγω της ανεξάρτησιας

$$P(\underbrace{A \times \cdots A}_{n\text{-φορές}}) = \underbrace{P(A) \cdots P(A)}_{n\text{-φορές}} = (P(A))^n$$

Q.E.D.