

Πιθανότητες και υπολογιστικές εφαρμογές

Ασκήσεις

Προσπαθείστε να λύσετε οσες περισσότερες απο τις παρακάτω ασκήσεις μπορείτε. Οι ασκήσεις είναι για προ-σωπική σας εξάσκηση, δεν χρειάζεται να τις παραδώσετε.

1. Έστω $\{X_i\}$ οικογένεια απο ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, τέτοιες ώστε $P(X_i = 1) = p$ και $P(X_i = 0) = 1 - p$. Αν $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$, υπολογίστε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ \mathbb{E}[Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

Μπορείτε να βρείτε τιμές για τα p έτσι ώστε $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Y_n$;

Μπορείτε να βρείτε τιμές για τα p και a έτσι ώστε $\mathbb{E}[Y_{n+1}^2 - a(n+1)|\mathcal{F}_n] = Y_n^2 - an$;

Το παραπάνω παράδειγμα θα μας φανεί πολύ χρήσιμο στην μελέτη της αποτίμησης παραγώγων συμβολαίων στα χρηματοοικονομικά

2. Αν $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ για κάθε n και για την οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{Y_n\}$ ισχύει $\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = Y_n$, δείξτε ότι $\mathbb{E}[Y_n] = \text{const.}$
3. Δείξτε ότι αν $Z \sim N(0, 1)$ τότε $a + bZ \sim N(a, b^2)$.
4. Έστω $\{X_i\}$ οικογένεια απο ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, τέτοιες ώστε $P(X_i = 1) = p$ και $P(X_i = 0) = 1 - p$. Αν $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ποια θα είναι η κατανομή της. Μπορείτε να προσεγγίσετε την κατανομή της Y_n για μεγάλα n απο την κανονική κατανομή και αν ναι με ποιές παραμέτρους.
5. Ένα χαρτοφυλάκιο δανείων αποτελείται απο $N = 1000$ δάνεια το καθένα με πιθανότητα αθέτησης $p = 5\%$. Ποια η πιθανότητα να αθετηθούν 40 δάνεια απο το χαρτοφυλάκιο αυτό;
6. Ένα ομόλογο το οποίο δεν έχει ωρίμανση (perpetuity πχ ένα Consol) πληρώνει ετήσια κουπόνια των 20000 ευρώ. Το ομόλογο έχει πιθανότητα αθέτησης του ετησίου κουπονιού $p = 5\%$. Ο κύριος X ο οποίος είναι εισοδηματίας και ετών 70 βασίζει το ετήσιο εισόδημα του σε αυτό το ομόλογο. Ποιά η πιθανότητα να μπορέσει να συνεχίσει να επιζεί απο αυτό μέχρις ότου φτάσει τα 85.
7. Μια ασφαλιστική εταιρεία δέχεται κάθε χρόνο N αιτήσεις για αποζημιώσεις ύψους X_i ευρώ η καθεμία. Αν $N \sim \text{Pois}(\lambda)$ και $X_i \sim \text{Exp}(\alpha)$ υπολογίστε την αναμενόμενη συνολική ζημιά και την διασπορά της.