

Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά

Εισαγωγή

A. N. Γιαννακόπουλος

Ο.Π.Α

Εαρινό Εξάμηνο 2024

- 1 Εισαγωγή
- 2 Οι χρηματοοικονομικές αγορές και ο ρόλος τους
- 3 Μεθοδολογία των χρηματοοικονομικών μαθηματικών
- 4 Τιμή και αξία
- 5 Τύποι περιουσιακών στοιχείων
- 6 Χρόνος και αξία
- 7 Παρούσα και μέλλουσα αξία
- 8 Αβεβαιότητα
- 9 *Arbitrage*
- 10 Ατέλειες των αγορών
- 11 Αποτελεσματικότητα
- 12 Συμπεράσματα

Εισαγωγή

- Μία οικονομία μπορεί να αποτελείται από μία σειρά αγορών οι οποίες είναι αλληλοσυνδεόμενες.
- Από όλες τις πιθανές αγορές που μπορεί να εμφανίζονται σε ένα οικονομικό σύστημα οι χρηματαγορές εμφανίζουν ίσως το μεγαλύτερο ενδιαφέρον.
- Αυτό γιατί συνδέονται με οποιαδήποτε άλλη αγορά αλλά και με το κάθε άτομο.
- Οι χρηματαγορές αποτελούν το μέσο που χρησιμοποιούν οι επιχειρήσεις για να μαζέψουν τα απαραίτητα κεφάλαια για να εξασφαλίσουν την λειτουργία τους, το μέσο που χρησιμοποιούν οι μεμονωμένοι επενδυτές για να αυξήσουν την ευημερία τους και το μέσο που χρησιμοποιούμε για να αποθηκεύσουμε τον πλεονάζοντα πλούτο.

- Τα Χρηματοοικονομικά είναι το κομμάτι της Οικονομικής Επιστήμης που ασχολείται με την λειτουργία των χρηματοοικονομικών αγορών.
- Τα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά είναι το κομμάτι των Μαθηματικών που ασχολείται με την παραγωγή μαθηματικών μοντέλων (υποδειγμάτων, προτύπων) σχετικά με την λειτουργία των χρηματοοικονομικών αγορών, την αποτίμηση των χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων, την επιλογή επενδύσεων κλπ.
- Τα μοντέλλα αυτά όπως άλλωστε και σε οποιαδήποτε άλλη επιστήμη (π.χ. Φυσική ή Βιολογία όπου τα μαθηματικά παίζουν πρωτεύοντα ρόλο στην μεθοδολογία τους) αποσκοπούν στο να αποκτήσουμε καλύτερη κατανόηση των διαδικασιών που παίζουν σημαντικό ρόλο σε ορισμένα φαινόμενα και εν τέλει στην δυνατότητα πρόβλεψης.

Τι μαθηματικά;

- Τυχαίότητα στην εξέλιξη των τιμών των χρηματοοικονομικών τίτλων.
- Πιθανότητες και στοχαστικές διαδικασίες.
- διαδικασίες Markov, διαδικασίες martingale, κίνηση Brown, στοχαστικό ολοκληρώμα και διαδικασίες Itô, στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις κ.α.
- Στατιστική: Βαθμονόμηση των μοντέλων στα δεδομένα της αγοράς.

- Οι αφηρημένες αυτές μαθηματικές έννοιες αποκτούν συγκεκριμένες ερμηνείες στα χρηματοοικονομικά π.χ όπως θα δούμε παρακάτω η έννοια των martingales σχετίζεται με την αποτελεσματικότητα των αγορών κ.α.
- Αμφίδρομη σχέση των Μαθηματικών και των Χρηματοοικονομικών.
- Τα εργαλεία αυτά σήμερα είναι πλέον αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινής εταιρικής πρακτικής και υπάρχει ολοένα και μεγαλύτερη ζήτηση για την δημιουργία νέων και πιο περίπλοκων μεθόδων.

Οι χρηματοοικονομικοί τίτλοι και ο ρόλος τους

Ορισμός

Ένα χρηματοοικονομικό περιουσιακό στοιχείο (*financial asset*) είναι μία αξίωση σε κάποιο μελλοντικό εισόδημα.

- ομόλογο με κουπόνια
- μετοχές
- παράγωγα προϊόντα

Τα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία έχουν δύο πολύ σημαντικούς ρόλους:

- Εξασφαλίζουν ένα τρόπο μέσω του οποίου περιουσιακά στοιχεία μπορεί να μεταφερθούν από αυτούς που έχουν πλεόνασμα προς αυτούς που τα χρειάζονται για πιθανές μελλοντικές επενδύσεις (που προφανώς θεωρούν ότι θα τους επιφέρουν κέρδος)
- Αποτελούν ένα τρόπο μεταφοράς του κινδύνου εν γένει και πιο συγκεκριμένα από αυτούς που θα αναλάβουν την επένδυση σε αυτούς που θα την χρηματοδοτήσουν μέσω των επενδύσεων τους.

Οι χρηματογορές και ο ρόλος τους

Τα περιουσιακά στοιχεία μπορεί να αλλάζουν μορφή και κατόχους.

Ορισμός

Η χρηματαγορά είναι ο 'τόπος' στον οποίο γίνονται οι συναλλαγές σε χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία.

Ο ρόλος των χρηματαγορών είναι επίσης διπλός.

- Προσφέρουν **ρευστότητα** εφόσον είναι ο χώρος στον οποίο τα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία μπορεί να μεταπωληθούν ή να ρευστοποιηθούν.
- Μειώνουν το κόστος των συναλλαγών.

Η μεθοδολογία των χρηματοοικονομικών μαθηματικών

Τα χρηματοοικονομικά σαν οποιαδήποτε επιστημονική θεωρία μπορεί να έχουν δύο μορφές.

- Κανονιστικό πλαίσιο (normative framework)
- Το θετικό πλαίσιο (positive framework) .

- ♦ Μία κανονιστική θεωρία είναι μία θεωρία που ουσιαστικά δίνει μία διαδικασία ή ένα σύνολο κανόνων για την επίτευξη κάποιου σκοπού.
- Τα χρηματοοικονομικά μπορεί να έχουν κανονιστική μορφή.
- Σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε προβλήματα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου, αξιολόγησης επενδύσεων κλπ.

- ◆ Μία θετική θεωρία είναι μία θεωρία η οποία περιγράφει το πως θα έπρεπε να ήταν ο κόσμος.
- Μία θετική θεωρία είναι μία περιγραφή του πως λειτουργεί κάποιο κομμάτι του κόσμου.
- Μία θετική θεωρία δεν δίνει απαραίτητα το τρόπο του πως μπορεί να γίνει κάτι αλλά αποσκοπεί περισσότερο στην κατανόηση του κόσμου.
- Ορισμένα από τα μοντέλα των χρηματοοικονομικών μπορεί να έχουν τέτοια μορφή.
- Σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε μοντέλα για την αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων κάτω από την υπόθεση της απουσίας arbitrage

Η έννοια της αξίας

Ορισμός

Η αξία ενός χρηματοοικονομικού περιουσιακού στοιχείου είναι η τιμή που η αγορά είναι πρόθυμη να δώσει για τις απολαβές που θα παρέχει στον κάτοχο του αυτός ο τίτλος. Πολλές φορές η αξία αυτή ονομάζεται και η αξία στην αγορά του περιουσιακού αυτού στοιχείου.

- Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την αποτίμηση μίας μετοχής.
- Η κατοχή της μετοχής αυτής εξασφαλίζει στον φέροντα μία μελλοντική σειρά από πληρωμές.
- Δύο είναι τα βασικά στοιχεία που πρέπει να κρατήσουμε υπόψη μας εδώ.
- Το πρώτο είναι ότι οι απολαβές από το περιουσιακό στοιχείο έρχονται στο μέλλον και όχι την σημερινή στιγμή.
- Το δεύτερο είναι ότι οι απολαβές αυτές δεν είναι σίγουρες αλλά εμπεριέχουν το στοιχείο του κινδύνου.
- Μια εκτίμηση για την τιμή της μετοχής θα είναι η κεφαλαιοποιημένη αξία των 'πληρωμών' που θα μαζέψει ο κάτοχος της μετοχής στο μέλλον

Το ότι οι πληρωμές γίνονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές από την στιγμή που μας ζητείται να ορίσουμε την αξία της μετοχής φέρνει στο προσκήνιο την έννοια της προεξόφλησης (discounting).

Η έννοια αυτή ουσιαστικά ανάγει την μία μελλοντική σειρά πληρωμών στην σημερινή τους αξία.

Πολλές φορές στην μετατροπή αυτή πρέπει να ληφθεί υπόψη όχι μόνο το ότι οι πληρωμές θα γίνουν στο μέλλον αλλά και ότι οι πληρωμές αυτές εμπεριέχουν και την έννοια του κινδύνου (π.χ. στην περίπτωση των μερισμάτων μετοχών).

Σαν απλό βασικό κανόνα πριν εμπλακούμε στον μαθηματικό φορμαλισμό των παραπάνω εννοιών μπορούμε να δώσουμε το εξής:

Όταν κάποιο εισόδημα πρόκειται να ληφθεί στο μέλλον και όταν το εισόδημα αυτό είναι αβέβαιο, τότε η αξία του εισοδήματος αυτού σήμερα θα είναι γενικά μικρότερη από το ποσό που αναμένουμε να λάβουμε στο μέλλον.

Τύποι περιουσιακών στοιχείων

- Ομόλογα - Fixed income securities
- Μετοχές
- Παράγωγα προϊόντα
- Χρήμα

Η έννοια του χρόνου και η σχέση της με την αξία των περιουσιακών στοιχείων

- Δύο στοιχεία παίζουν σημαντικό ρόλο στην αποτίμηση κάποιων περιουσιακών στοιχείων: ο χρόνος και η αβεβαιότητα.
- Η βασική στρατηγική για την αποτίμηση κάποιου περιουσιακού στοιχείου, η οποία μπορεί να ενσωματώσει αυτά τα δύο βασικά στοιχεία είναι η μετατροπή όλων των μελλοντικών πληρωμών στην σημερινή χρονική στιγμή.
- Αυτό χρειάζεται αφού οι συντελεστές της αγοράς **δεν** είναι αδιάφοροι ως προς τις χρονικές στιγμές στις οποίες λαμβάνονται ίδιες πληρωμές.

Αν δεν υπήρχε ούτε αβεβαιότητα και οι συντελεστές της αγοράς ήταν αδιάφοροι ως προς την έννοια του χρόνου τότε η αξία ενός περιουσιακού στοιχείου θα δίνονταν από την σχέση

$$V = \sum_{t=1}^N I_t$$

όπου I_t είναι το εισόδημα που συσσωρεύεται λόγω της κατοχής του περιουσιακού στοιχείου την χρονική περίοδο t .

Στην πραγματικότητα όμως αυτό δεν ισχύει εφόσον υπάρχει η έννοια του επιτοκίου που πηγάζει ότι το η αγορά δεν είναι αδιάφορη μεταξύ ισοδύναμων ποσών που όμως λαμβάνονται σε διαφορετικές χρονικές περιόδους.

- Το απλό επιτόκιο: Ας θεωρήσουμε ότι το ποσό ενός δανείου ή ενός ομολόγου αντιπροσωπεύεται από το P_1 και μετά από μία περίοδο αντιπροσωπεύεται από το P_2 (σε κάποιο νόμισμα). Το επιτόκιο μπορεί να οριστεί από την σχέση

$$1 + r = \frac{P_2}{P_1}$$

- Το σύνθετο επιτόκιο (compound interest) όταν χρειαστεί να ασχοληθούμε με δάνεια ή ομόλογα τα οποία δεν είναι μονάχα μίας περιόδου θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στο να διαχωρίζουμε μεταξύ του απλού επιτοκίου και του σύνθετου επιτοκίου. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα ομόλογο το οποίο έχει αξία P_1 σήμερα και αξία P_N μετά από $N - 1$ χρονικές περιόδους. Με απλές αλγεβρικές πράξεις μπορούμε να δούμε ότι η αξία την περίοδο N θα είναι

$$P_N = P_1(r + 1)^{N-1}$$

και από την σχέση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε το επιτόκιο.

- Συνεχής ανατοκισμός: Ας υποθέσουμε ότι ο ανατοκισμός του ποσού γίνεται συνεχώς στον χρόνο, δηλαδή ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι χωρίσαμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ σε απειροστά χρονικά διαστήματα μήκους dt και ότι κατά την διάρκεια του διαστήματος αυτού το ποσό αυξάνεται κατά το $r dt$. Κατά συνέπεια, το r μπορεί να θεωρηθεί σαν ο **ρυθμός** αύξησης του ποσού. Αν $P(t)$ είναι η αξία του ποσού την χρονική στιγμή t τότε ισχύει ότι

$$\frac{dP}{dt}(t) = r P(t)$$

συνεπώς $P(t) = P(0) \exp(rt)$ όπου $P(0)$ είναι το αρχικό ποσό που τοποθετήσαμε στην τράπεζα.

Παρούσα και μέλλουσα αξία

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι τοποθετούμε 1 Euro στην τράπεζα σήμερα με επιτόκιο r και το αφήνουμε εκεί για N έτη. Ποια θα είναι η αξία του ποσού αυτού το τέλος των N ετών;

Απλή άλγεβρα μπορεί να μας δώσει ότι

$$FV = 1(1 + r)^N$$

Για παράδειγμα, 1 Euro με επιτόκιο 10% θα αποκτήσει στην τράπεζα μελλοντική αξία σε 10 έτη ίση με 2.59 Euro.

Παράδειγμα

Ας αντιστρέψουμε το ερώτημα του παραπάνω παραδείγματος. Ποια είναι η αξία σήμερα 1 Euro το οποίο θα λάβουμε N χρονικές περιόδους απο σήμερα;

Σχετικά απλά μπορούμε να δούμε ότι

$$PV = \frac{1}{(1+r)^N}$$

Με διαφορετικά λόγια μπορούμε να πούμε ότι PV είναι το ποσό που θα πρέπει να τοποθετήσουμε σήμερα στην τράπεζα με επιτόκιο r για να έχουμε σε N έτη το ποσό του 1 Euro.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι τοποθετούμε κάθε χρόνο 1 Euro στην τράπεζα επί 10 έτη.

Στο τέλος μίας περιόδου N η μελλοντική αξία της επένδυσης αυτής θα είναι ίση προς

$$FV = 1(1+r) + 1(1+r)^2 + \dots + 1(1+r)^N = \sum_{t=1}^N 1(1+r)^t$$

Παράδειγμα

Το αντίστροφο στο παραπάνω ερώτημα είναι το ακόλουθο: Ποιά η αξία σήμερα μίας ροής εισοδήματος 1 Euro που λαμβάνεται στο τέλος κάθε περιόδου για N περιόδους;

Είναι σημαντικό να κάνουμε την διάκριση του αν το 1 Euro λαμβάνεται στην αρχή ή το τέλος της περιόδου.

Εφόσον ξεκαθαρίζεται ότι το ποσό λαμβάνεται στο τέλος της περιόδου η αξία του πρώτου Euro που λαμβάνεται είναι $1/(1+r)$ η αξία του δεύτερου Euro που λαμβάνεται είναι $1/(1+r)^2$ και ούτω καθεξής ώσπου η αξία του τελευταίου Euro που λαμβάνεται θα είναι $1/(1+r)^N$.

Η σημερινή λοιπόν αξία της ροής εισοδήματος που παράγεται από το παραπάνω θα είναι

$$PV = \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^N} = \sum_{t=1}^N \frac{1}{(1+r)^t}$$

Το παραπάνω μπορεί και να γενικευθεί και στην περίπτωση που οι πληρωμές δεν είναι σταθερές στο τέλος της κάθε περιόδου αλλά λαμβάνουμε ένα ποσό A_t .

Η παρούσα αξία στην περίπτωση αυτή θα είναι

$$PV = \sum_{t=1}^N \frac{A_t}{(1+r)^t}$$

Η έννοια της παρούσας αξίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για παράδειγμα και για την αποτίμηση κάποιας επένδυσης.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε ότι μία εταιρεία σκέπτεται να επενδύσει σε κάποιο περιουσιακό στοιχείο το οποίο θα της παρέχει το ποσό των 10,000 Euro ανα έτος για τα επόμενα 10 έτη.

Ας υποθέσουμε ότι το επιτόκιο είναι 12% και το κόστος της επένδυσης είναι 30,000 Euro.

Η μεικτή παρούσα αξία της επένδυσης θα είναι ίση προς

$$GPV = \sum_{t=1}^{10} \frac{10,000}{1.12^t} = 56,502$$

ενώ η καθαρή παρούσα αξία θα είναι ίση προς

$$NPV = GPV - C = 56,502 - 30,000 = 26,502 \text{ Euro} > 0!$$

Παράδειγμα

Αν θεωρήσουμε ότι η συχνότητα του ανατοκισμού είναι πολύ μεγάλη τότε ο τύπος του ανατοκισμού για N περιόδους μπορεί να πάρει την εξής εναλλακτική μορφή.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο ανατοκισμός λαμβάνει χώρα m φορές ανα έτος με ετήσιο επιτόκιο r ή διαφορετικά με επιτόκιο $\frac{r}{m}$ ανά ανατοκισμό.

Η παρούσα αξία των A Euro που θα ληφθεί N περιόδους από σήμερα θα είναι

$$PV = \frac{A}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mN}}$$

Στο όριο όπου $m \rightarrow \infty$ η σχέση αυτή γίνεται

$$PV = A \exp(-rN)$$

Παράδειγμα

Perpetuities Υπάρχουν ορισμένα ομόλογα τα οποία δεν έχουν ουσιαστικά ημερομηνία λήξης. Σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε το ομόλογο *Consol* το οποίο εξέδιδε το Βρετανικό Δημόσιο Ταμείο και το οποίο εξασφάλιζε στον φέροντα ένα σταθερό εισόδημα ουσιαστικά για πάντα.

Αν A είναι το ποσό αυτό τότε η παρούσα αξία του ομολόγου αυτού που μπορεί να θεωρηθεί και ότι είναι η τιμή του στην αγορά θα είναι ίση προς

$$PV = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{A}{(1+r)^t}$$

Μία απλή εφαρμογή της θεωρίας των γεωμετρικών σειρών μας δείχνει ότι

$$PV = A \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} - 1 = \frac{A}{r}$$

Παράδειγμα (Η αξία μίας μετοχής)

Η ροή των αποδοχών από μία μετοχή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι προέρχεται από τα μερίσματα και από το κέρδος ή την απώλεια κεφαλαίου από την τιμή της μετοχής.

Η τιμή της μετοχής σήμερα θα εξαρτάται από τα κεφαλαιοποιημένα μελλοντικά εισοδήματα αρκεί φυσικά να συνεχίσει να υπάρχει η εταιρεία η οποία εξέδωσε την μετοχή.

Αν D_t είναι το αναμενόμενο μέρισμα από την μετοχή την χρονική περίοδο t , και αν η εταιρεία συνεχίσει να υπάρχει για N χρονικές περιόδους, η παρούσα αξία της μετοχής θα είναι

$$PV = \sum_{t=1}^N \frac{D_t}{(1+r)^t}$$

Δεν έχουμε λάβει υπόψη την έννοια της αβεβαιότητας.

Αβεβαιότητα και αξία

- Η έννοια της αβεβαιότητας, που σχετίζεται με την έννοια του κινδύνου είναι θεμελιώδης για την αποτίμηση των περιουσιακών στοιχείων.
- Για παράδειγμα αν ένας επενδυτής αποστρέφεται τον κίνδυνο, θα ζητήσει μεγαλύτερη τιμή για ένα περιουσιακό στοιχείο που περιέχει υψηλό βαθμό κινδύνου (ασφάλιστρο κινδυνου - risk premium).
- Ένα περιουσιακό στοιχείο που περιέχει κίνδυνο θα πρέπει να έχει μεγαλύτερη απόδοση από κάποιο άλλο έτσι ώστε να προτιμηθεί.
- Για την σωστή μελέτη της αποτίμησης λοιπόν είναι αναγκαίο να βρούμε κάποιο τρόπο ώστε να μπορούμε να **ποσοτικοποιήσουμε την έννοια του κινδύνου**.

- Για να μοντελοποιήσουμε την έννοια της αβεβαιότητας αρκεί να θεωρήσουμε ότι υπάρχουν ορισμένες καταστάσεις της οικονομίας και **δεν είναι γνωστό από την αρχή ποιά κατάσταση από αυτές θα πραγματοποιηθεί.**
- Οι αποδόσεις των διαφόρων περιουσιακών στοιχείων εξαρτώνται από την κατάσταση της οικονομίας που θα πραγματοποιηθεί.
- Για την μαθηματική μοντελοποίηση αυτής της κατάστασης θα πρέπει να ορίσουμε έναν κατάλληλα επιλεγμένο χώρο πιθανοτήτων και επάνω σε αυτό μία κατανομή πιθανοτήτων η οποία θα μας καθορίζει πόσο πιθανή είναι κάποια από τις καταστάσεις της οικονομίας.

- Εναλλακτικά μπορεί κανείς να παράγει (είτε εμπειρικά είτε με θεωρητικά μοντέλα) τις κατανομές πιθανότητας των αποδόσεων των διαφόρων περιουσιακών στοιχείων.
- Έχοντας αυτή την κατανομή πιθανότητας μπορούμε να βρούμε την αναμενόμενη απόδοση ως την μέση τιμή των αποδόσεων επάνω στην κατανομή πιθανότητας που αυτές ακολουθούνε.
- Όταν αναφερόμαστε στην αναμενόμενη απόδοση εννοούμε κατά την *ex ante* έννοια δηλαδή βάσει της γνώσης που έχουμε πριν το γεγονός συμβεί.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν μικροπωλητή που εμπορεύεται 4 διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία, ομπρέλες, γυαλιά ηλίου, ζεστά ποτά και αναψυκτικά και ο οποίος αντιμετωπίζει αβεβαιότητα ως προς τον αυριανό καιρό



Ας ονομάσουμε τα περιουσιακά στοιχεία αυτά A , B , C και D .

Οι καταστάσεις του κόσμου στην παρούσα περίπτωση σχετίζονται με τον καιρό ο οποίος μπορεί να είναι ηλιόλουστος, συννεφιασμένος ή βροχερός.

Ας συμβολίσουμε τις καταστάσεις αυτές με $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ αντιστοιχως.

Η μετεωρολογική υπηρεσία δίνει πιθανότητα 20% να είναι ο καιρός ηλιόλουστος, 30% να είναι ο καιρός συννεφιασμένος και 50% να είναι ο καιρός βροχερός.

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται ο απολαβές για το κάθε περιουσιακό στοιχείο σε κάθε κατάσταση του κόσμου

ΚΑΤ/ΣΗ	.ΠΙΘ/ΤΗΤΑ	R_A	R_B	R_C	R_D
$\omega_1(H)$	0.2	0	1000	30	150
$\omega_2(\Sigma)$	0.3	0	0	50	50
$\omega_3(B)$	0.5	400	0	150	10

Η μέση απόλαβή απο το A θα είναι

$$E[R_A] = \sum_{\omega} P(\omega)R_A(\omega) = 0 \times 0.2 + 0 \times 0.3 + 400 \times 0.5 = 200$$

Όμοια με τις απολαβές των άλλων περιουσιακών στοιχείων.

Η αναμενόμενη απολαβή θεωρείται ότι είναι η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη σχετικά με το ποιά θα είναι η μελλοντική πραγματική απολαβή.

Θα πάμε τώρα στο θέμα της μέτρησης του κινδύνου.

Η βασική ιδέα πίσω από την μέτρηση του κινδύνου είναι το πόσο μπορεί να μεταβάλλεται η πραγματική απολαβή από την αναμενόμενη απολαβή.

Από την στοιχειώδη στατιστική γνωρίζουμε ότι η πληροφορία αυτή μας δίνεται από την ποσότητα της διακύμανσης και της τυπικής απόκλισης.

Η διακύμανση θα δίνεται από την σχέση

$$\text{Var}(R) = \sigma^2 = E[(R - E[R])^2]$$

όπου σ είναι η τυπική απόκλιση.

Παράδειγμα

5 καταστάσεις ω_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$

3 περιουσιακά στοιχεία A , B , και C .

ΚΑΤ/ΣΗ	ΠΙΘ/ΤΗΤΑ	R_A	R_B	R_C
ω_1	0.1	5,500	3,000	13,000
ω_2	0.2	6,000	5,000	11,000
ω_3	0.4	7,000	7,000	9,000
ω_4	0.2	8,000	9,000	7,000
ω_5	0.1	8,500	11,000	5,000

Π.Σ.	$E[R]$	$Var[R]$	σ
A	7,000	850,000	922
B	7,000	4,800,000	2,191
C	9,000	4,800,000	2,191

Με βάση τον συνδυασμό της μέσης απόδοσης και της διακύμανσης μπορεί ένας επενδυτής ανάλογα με τις προτιμήσεις του ως προς την απόδοση και τον κίνδυνο να επιλέξει τα περιουσιακά στοιχεία ή την επιλογή περιουσιακών στοιχείων (χαρτοφυλάκιο) που τον ικανοποιεί.

Η έννοια της προσωπικής προτίμησης εκφράζεται στα οικονομικά με την έννοια της συνάρτησης ωφελιμότητας και των καμπύλων αδιαφορίας που εδώ θα είναι καμπύλες στον χώρο που παράγεται από την μέση απόδοση και την διακύμανση.

Μπορούμε επίσης να ασχοληθούμε και με την σχέση μεταξύ περιουσιακών στοιχείων που θα μας δώσει μία ιδέα πως οι μεταβολές των αποδόσεων των περιουσιακών αυτών στοιχείων σχετίζονται.

Αυτό δίνεται από τον συντελεστή συσχέτισης των αποδόσεων ο οποίος με την σειρά του σχετίζεται με την συνδιακύμανση.

Η συνδιακύμανση των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων A και B δίνεται από τον τύπο

$$\sigma_{A,B}^2 = E[(R_A - E[R_A])(R_B - E[R_B])]$$

Σε αντίθεση με την διακύμανση, η συνδιακύμανση μπορεί να είναι και αρνητική.

Ο συντελεστής συσχέτισεως των περιουσιακών στοιχείων ορίζεται από την σχέση

$$\rho_{A,B} = \frac{\sigma_{A,B}^2}{\sigma_A \sigma_B}$$

Ο συντελεστής συσχέτισεως παίρνει τιμές από -1 έως $+1$.

Μεγάλος συντελεστής συσχέτισης και θετικός δείχνει ισχυρή και θετική συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων των δύο περιουσιακών στοιχείων κλπ.

Χαρτοφυλάκια

Πολλές φορές θα χρειαστεί να έχουμε μία συλλογή από περιουσιακά στοιχεία τα οποία ονομάζονται χαρτοφυλάκιο.

Μπορούμε να ορίσουμε με παρόμοιο τρόπο την απόδοση και τον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου.

Σαν παράδειγμα φέρνουμε την περίπτωση όπου έχουμε $x\%$ του ολικού πλούτου στο περιουσιακό στοιχείο A και $(1 - x)\%$ του συνολικού πλούτου στο περιουσιακό στοιχείο B .

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου αυτού θα είναι

$$R_p = xR_A + (1 - x)R_B$$

Η αναμενόμενη λοιπόν απόδοση του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$E[R_p] = xE[R_A] + (1 - x)E[R_B]$$

ενώ η διακύμανση που θα μας δίνει μία ιδέα για τον κίνδυνο θα δίνεται από την σχέση

$$\sigma_{R_p}^2 = E[(R_p - E[R_p])^2] = x^2\sigma_{R_A}^2 + (1 - x)^2\sigma_{R_B}^2 + 2x(1 - x)\rho_{A,B}\sigma_{R_A}\sigma_{R_B}$$

Ανάλογα με το πως θα επιλεγεί το x μπορούμε να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκια με διαφορετικές σχέσεις απόδοσης και κινδύνου.

Ένα μεγάλο μέρος της θεωρία χαρτοφυλακίου σχετίζεται με τις ιδέες αυτές.

Arbitrage

- Η έννοια του arbitrage παίζει κεντρικό ρόλο στην αποτίμηση των περιουσιακών στοιχείων.
- Το arbitrage είναι μία στρατηγική επενδυτή ο οποίος συναλλάσσεται κατά τρόπο ώστε να εκμεταλευτεί τις αποκλίσεις από τις τιμές ισορροπίας των διαφόρων περιουσιακών στοιχείων με σκοπό την απόκτηση κέρδους χωρίς κίνδυνο.
- Αν και το arbitrage είναι το όνειρο του κάθε επενδυτή, η θεωρία των χρηματοοικονομικών κατά μεγάλο μέρος της βασίζεται στην αποδοχή ότι δεν μπορεί να υπάρξει ευκαιρία arbitrage



- Η αποδοχή της απουσίας του arbitrage έχει σαφή μαθηματική περιγραφή με την χρήση των ιδιοτήτων των martingale για κατάλληλα προεξόφλημένες τιμές των περιουσιακών στοιχείων.
- Επίσης σχετίζεται με τον νόμο της μοναδικής τιμής, κατά τον οποίο το ίδιο περιουσιακό στοιχείο συναλλάσσεται για μία μοναδική τιμή σε κάποια δεδομένη θέση και σε κάποιο δεδομένο χρόνο.
- Τέλος τα θεμελιώδη θεωρήματα σχετικά με την αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων σχετίζονται με την απουσία arbitrage σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε το τύπο των Black και Scholes για την αποτίμηση παραγώγων συμβολαίων ή τα θεωρήματα Modigliani-Miller την χρηματοοικονομική των επιχειρήσεων (corporate finance).

Παράδειγμα (Παράδειγμα arbitrage στην αγορά συναλλάγματος)

Ας υποθέσουμε τους ακόλουθους λόγους ανταλλαγής μεταξύ του yen, της στερλίνας και του δολλαρίου

$$1 \text{ pound} = 1.50 \text{ dollars}$$

$$150 \text{ yen} = 1 \text{ pound}$$

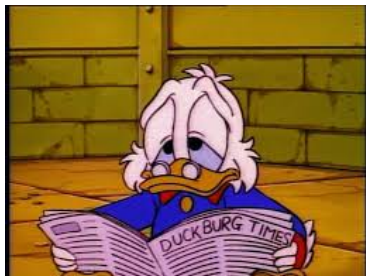
$$1 \text{ dollar} = 120 \text{ yen}$$

Με τους λόγους αυτούς, κάποιος θα μπορούσε να πουλήσει 1 στερλίνα για 1.50 δολάρια, με το ποσό αυτό να αγοράσει 180 yen, και μετά να ξοδέψει 150 yen για να αγοράσει 1 στερλίνα.

Συνεπώς πήρε πίσω το αρχικό ποσό που έδωσε (την 1 στερλίνα) αλλά έχει και κέρδος 30 yen.

Αν συνεχίσει την στρατηγική αυτή θα συνεχίσει να έχει βέβαιο κέρδος 30 yen κάθε φορά οπότε θα καταλήξει με βέβαιο κέρδος.

Αν δεν υπάρχουν ατέλειες στην αγορά, οι διαφορές αυτές των τιμών που δημιουργούν το arbitrage γρήγορα θα εξαλειφθούν και η αγορά θα έλθει σε ισορροπία.



Προσπαθείστε να βρείτε για ποιό λόγο ανταλλαγής θα εξαλείφονταν αυτή η ευκαιρία για arbitrage.

Παράδειγμα (Τιμολόγηση ενός ομολόγου)

Ας θεωρήσουμε ένα ομόλογο που υπόσχεται να πληρώσει ένα ποσό u μία χρονική περίοδο από σήμερα. Αν το επιτόκιο είναι r ποιά θα είναι η τιμή του ομολόγου σήμερα;

Η απουσία arbitrage επιβάλλει να ισχύει ότι ο ρυθμός απόδοσης του ομολόγου θα πρέπει να είναι ίσος με το τραπεζικό επιτόκιο r .

Αν δεν συνέβαινε αυτό, και για παράδειγμα ο ρυθμός απόδοσης του ομολόγου ήταν μεγαλύτερος από το τραπεζικό επιτόκιο r , ένας επενδυτής θα μπορούσε να δανείζεται από την τράπεζα, να επενδύει σε ομόλογα, να χρησιμοποιεί τις αποδόσεις του ομολόγου για να αποπληρώνει το δάνειο και να του περισσεύει και βέβαιο κέρδος.

Αυτό θα μπορούσε να το επαναλαμβάνει κάθε χρονική περίοδο.

Έτσι θα υπάρχει μία ευκαιρία arbitrage.

Συνεπώς η απουσία arbitrage επιβάλλει

$$r = \frac{u - p}{p}$$

όπου p είναι η τιμή του ομολόγου.

Ετσι, η 'δίκαιη' τιμή του ομολόγου είναι

$$p = \frac{1}{1 + r} u$$

Η απλή αυτή λογική μπορεί να γενικευθεί και στις περιπτώσεις όπου έχουμε πολλές χρονικές περιόδους και αβεβαιότητα.

Η γενίκευσή αυτή αποτελεί ένα από τα αντικείμενα που θα παρουσιαστούν στα πλαίσια του μαθήματος αυτού.

Ατέλειες των αγορών

Στις πραγματικές αγορές υπάρχουν μία σειρά από ατέλειες:

- **Το κόστος των συναλλαγών:** Στο κόστος των συναλλαγών μπορούμε να συμπεριλάβουμε τα διάφορα μεσιτικά έξοδα, τους φόρους κ.α. Ένα φαινόμενο που μπορεί να συμπεριληφθεί στο κόστος των συναλλαγών είναι η διαφορά της τιμής στην οποία πωλούνται μετοχές σε ένα χρηματιστηριακό γραφείο (bid price) και της τιμής πώλησης των μετοχών στους επενδυτές (ask price) .
- **Διάφοροι περιορισμοί** Οι περιορισμοί αυτοί μπορεί να έχουν την μορφή θεσμοθετημένων κανονισμών, ή συνθηκών που θα πρέπει να τηρούνται. Ένα παράδειγμα μπορεί να είναι ο περιορισμός του short selling κλπ.

Αποτελεσματικότητα

Υπάρχουν διάφορες έννοιες της αποτελεσματικότητας στα χρηματοοικονομικά που αναφέρονται σε διαφορετικά πράγματα.

- Αποτελεσματικότητα ως προς την διανομή των πόρων (Pareto)

Αυτή είναι βασική έννοια των οικονομικών γενικότερα. Μια διανομή είναι αποτελεσματική κατά Pareto αν οποιαδήποτε άλλη επαναδιανομή των πόρων κάνει κάποιον να βρίσκεται σε καλύτερη θέση από προηγουμένως θα κάνει κάποιον άλλον να βρίσκεται σε χειρότερη θέση από προηγουμένως.

Όπως θα δούμε σύντομα παρακάτω, η έννοια της αποτελεσματικότητας κατά Pareto σχετίζεται με την θεωρία της γενικής ισορροπίας στην μικροοικονομική και την έννοια της πληρότητας ή όχι των αγορών.

- Πληροφοριακή αποτελεσματικότητα. Η έννοια αυτή αναφέρεται στο πόσο οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων αντικατοπτρίζουν την πληροφορία που είναι διαθέσιμη στους επενδυτές.

Μία αγορά θα λέγεται αποτελεσματική αν οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων πλήρως αντικατοπτρίζουν την πληροφορία που είναι διαθέσιμη στους επενδυτές.

Θα δούμε παρακάτω τον μαθηματικό φορμαλισμό της υπόθεσης της αποτελεσματικότητας των αγορών, χρησιμοποιώντας την γλώσσα των στοχαστικών διαδικασιών και συγκεκριμένα την έννοια της υπό συνθήκη μέσης τιμής και της έννοια των martingale.

- Αποτελεσματικότητα χαρτοφυλακίου. Η έννοια αυτή αναφέρεται στην επιλογή του χαρτοφυλακίου κατά τρόπο ώστε να πληρεί κάποιες συνθήκες όπως π.χ. την ελαχιστοποίηση του κινδύνου και την μεγιστοποίηση της απόδοσης.

Σύνοψη και Σχόλια

- Στην εισαγωγή αυτή προσπαθήσαμε να δώσουμε μερικές βασικές πληροφορίες για την επιστήμη των χρηματοοικονομικών, όσον αφορά τα προβλήματα με τα οποία ασχολούνται και τα βασικά πλαίσια στα οποία κινούνται.
- Έτσι συζητήθηκαν βασικές έννοιες όπως π.χ. η έννοια του επιτοκίου, η έννοια της παρούσης και της μελλοντικής τιμής κάποιου περιουσιακού στοιχείου, η έννοια του arbitrage και η έννοια της αποτελεσματικότητας κλπ.
- Ο σκοπός του μαθήματος απο εδώ και πέρα είναι να μεταφράσει τις έννοιες αυτές σε μαθηματικές έννοιες και χρησιμοποιώντας αυτές να κατασκευάσει μοντέλλα τα οποία μπορεί να δώσουν λύσεις στα πρακτικά προβλήματα που απασχολούν τα χρηματοοικονομικά.