Λογισμος ΙΙ, Ολοκλήρωση συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^d$

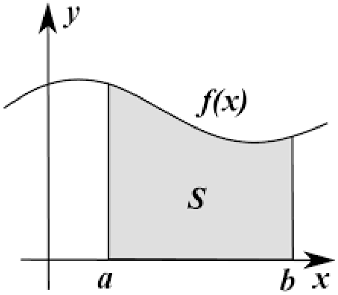
Α. Ν. Γιαννακόπουλος
Τμήμα Στατιστικής

Ο.Π.Α

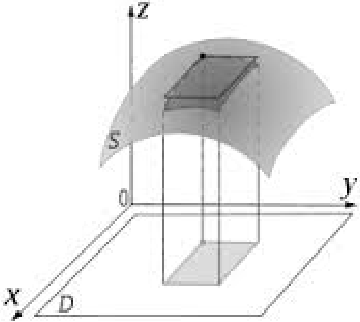
Εαρινό Εξάμηνο 2024

Εισαγωγη

Αν πάρουμε μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ αυτή μπορούμε να την οπτικοποιήσουμε σαν μια καμπύλη, και το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ μας δίνει το εμβαδό του διδιάστατου σχήματος που περικλείεται μεταξύ απο την καμπύλη αυτή και του άξονα των x.



Με την ίδια λογική, εφόσον αν $U \subset \mathbb{R}^2$, μια συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$ μπορεί να θεωρηθει ότι ορίζει μια επιφάνεια 2 διαστάσεων, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μεταξύ του επιπέδου $x_1 - x_2$ και της επιφάνειας αυτής ορίζεται ενα στερεό του οποίου θα θέλαμε να υπολογίσουμε τον όγκο.



Με πόσους διαφορετικούς τροπους μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο;

Η αρχη αυτή ονομάζεται αρχή του Cavalieri (1598-1647) αν και ήταν γνωστή και σε αλλους μαθηματικούς παλαιότερα.

Παραλληλεπίπεδα στον $\mathbb{R}^d$.

Θα θεωρησουμε το συνολο $\mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{R}^d = \{x = (x_1, \cdots, x_d) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \cdots, d\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{d \text{ φορές}}$$

και υποσυνολα του, της μορφής

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d],$$

για

$$a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \cdots, d.$$

Ορισμός

Υποσύνολα του $A \subset \mathbb{R}^d$ της παραπάνω μορφής ονομάζονται παραλλήλεπίπεδα του $\mathbb{R}^d$.

Έστω $A \subset \mathbb{R}^d$ ένα παραλληλεπίπεδο και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.

Μπορούμε να ορίσουμε περισσότερα απο ένα ολοκληρώματα για την συνάρτηση αυτή.

- Το d-διαστατο ολοκλήρωμα (d-iplo !) της f επάνω στο A,

$$\int_A f(x_1, \cdots, x_d) dx_1 \cdots, dx_d$$

- Τα επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα της f επάνω στο A τα οποία ειναι d επαναληπτικά ολοκληρώματα μιας μεταβλητής που κάθε φορά ολοκληρώνουμε ως προς μια απο τις μεταβλητές κρατώντας τις υπόλοιπες ως σταθερές παραμέτρους.

Το d-διάστατο ολοκλήρωμα

Χωρίζουμε το διαστήμα $I_1 = [a_1, b_1]$ σε $n+1$ μικρότερα κομματια παίρνοντας τα σημεία

$$x_{1,j_1} = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{n} j_1, \quad j_1 = 0, \cdots, n.$$

Χωρίζουμε το διαστήμα $I_2 = [a_2, b_2]$ σε $n+1$ μικρότερα κομματια παίρνοντας τα σημεία

$$x_{2,j_2} = a_2 + \frac{b_2 - a_2}{n} j_2, \quad j_2 = 0, \cdots, n.$$

και γενικά

Χωρίζουμε το διαστήμα $I_i = [a_i, b_i]$ σε $n+1$ μικρότερα κομματια παίρνοντας τα σημεία

$$x_{i,j_i} = a_i + \frac{b_i - a_i}{n} j_i, \;\; j_i = 0, \cdots, n.$$

για κάθε $i = 1, \cdots, d$.

Με τον τρόπο έχουμε

- χωρίσει το I_1 σε n διαστήματα $I_{1,k_1} = [x_{1,k_1}, x_{1,k_1+1}$, $k_1 = 0, \cdots, n-1$.
- χωρίσει το I_2 σε n διαστήματα $I_{2,k_2} = [x_{2,k_2}, x_{2,k_2+1}$, $k_2 = 0, \cdots, n-1$.
- $\cdots$
- χωρίσει το I_i σε n διαστήματα $I_{i,k_i} = [x_{i,k_i}, x_{i,k_i+1}$, $k_i = 0, \cdots, n-1$.
- όμοια για κάθε $i = 1, \cdots, d$.

Έχοντας χωρίσει κάθε I_i σε n διαστηματα I_{i,k_i}, $k_i = 0, \cdots, n-1$ έχουμε χωρίσει το A σε n^d μικρότερα παραλληλεπίδεδα

$$A_m = I_{1,k_1} \times I_{2,k_2} \times \cdots I_{d,k_d}, \qquad \begin{aligned} k_1 &= 0, 1, \cdots, n-1, \\ k_2 &= 0, 1, \cdots, n-1, \\ &\cdots \\ k_d &= 0, 1, \cdots, n-1, \end{aligned}$$

όπου ο δεικτης m μετράει όλες τις πιθανεςd-άδες $(k_1, \cdots, k_d)$ που μπορούμε να φτιάξουμε.

Το κάθε παραλληλεπίπεδο A_m έχει 'όγκο '

$$V_m = \frac{1}{n^d}(b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) = \frac{1}{n^d} V,$$

οπου V είναι ο όγκος του A.

Σε κάθε ένα τέτοιο παραλληλεπίπεδο A_m επιλέγουμε ένα σημείο $x_m = (x_{1,m}, \cdots, x_{d,m}) \in A_m$ και υπολογίζουμε την συνάρτηση f στο σημείο αυτό, $f(x_m) = f((x_{1,m}, \cdots, x_{d,m})$.

Παίρνουμε τώρα το άθροισμα

$$\mathbb{I}_n := \sum_{m=1}^{n^d} f(x_m) V_m$$

το οποίο φυσικά εξαρτάται απο το n.

Επαναλαμβάνουμε τώρα την διαδικασία χωρίζοντας τα διαστηματα και συνεπώς και το παραλληλεπίπεδο σε όλο και μικρότερα κομμάτια

Αυτό πρακτικα σημαινει οτι παιρνουμε το οριο $n \to \infty$ στα αθροίσματα $\mathbb{I}_n$.

Ορισμός

Το όριο της ακολουθίας $\mathbb{I}_n$ αν υπάρχει ορίζεται σαν το d-διάστατο ολοκλήρωμα της f στο παραλληλεπίπεδο A,

$$\int_A f(x_1, \cdots, x_d) dx_1 \cdots dx_d = \lim_{n \to \infty} \mathbb{I}_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{n^d} f(x_m) V_m$$

Θεώρημα

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε το οριο αυτό υπάρχει και είναι ανεξαρτητο απο την επιλογή των παραλληλεπιπέδων A_m και απο την επιλογή των σημείων $x_m \in A_m$.

Ιδιότητες του d-διάστατου ολοκληρώματος

Θεώρημα

1. *Αν* $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in A$ *τότε* $\int_A f(x)dx_1 \cdots x_d \geq 0$.
2. *Αν* $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμες τότε και η* $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 : A \to \mathbb{R}$ *είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_A (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)dx_1 \cdots dx_d = \lambda_1 \int_A f_1(x)dx_1 \cdots dx_d + \lambda_2 \int_A f_2(x)dx_1 \cdots$$

3. *Αν* $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^d$ *παραλληλεπίπεδα τέτοια ώστε* $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ *και* $B_1 \cup B_2 = A$,

$$\int_A f(x)dx_1 \cdots dx_d = \int_{B_1} f(x)dx_1 \cdots dx_d + \int_{B_2} f(x)dx_1 \cdots dx_d$$

Επαναληπτικά ολοκληρώματα

Σταθεροποιούμε τις συντεταγμένες $x_2, \cdots, x_d$ και παίρνουμε την συνάρτηση $\phi_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ με

$$\phi_1(x_1) = f(x_1, x_2, \cdots, x_d).$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{a_1}^{b_1} \phi_1(x_1) dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \cdots, x_d) dx_1,$$

το οποίο προφανώς εξαρτάται απο την επιλογή των υπόλοιπων $d-1$ συντεταγμενων $x_2, \cdots, x_d$.

Με αυτό τον τρόπο ορίσαμε μια συνάρτηση $I_1 : [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d] \to \mathbb{R}$ ορισμένη ως

$$I_1(x_2, \cdots, x_d) := \int_{a_1}^{b_1} \phi_1(x_1) dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \cdots, x_d) dx_1$$

Στην συνάρτηση I_1 σταθεροποιούμε τις συντεταγμενες $x_3, \cdots, x_d$ και παίρνουμε της συνάρτηση $\psi_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ ορισμένη ως

$$\psi_2(x_2) = I_1(x_2, x_3, \cdots, x_d).$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_{a_2}^{b_2} \psi_2(x_2) dx_2 &= \int_{a_2}^{b_2} I_1(x_2, x_3, \cdots, x_d) dx_2 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_d) dx_1 \right] dx_2\end{aligned}$$

το οποίο προφανώς εξαρτάται απο την επιλογή των υπόλοιπων $d-2$ συντεταγμενων $x_3, \cdots, x_d$.

Με αυτό τον τρόπο ορίσαμε μια συνάρτηση $I_2 : [a_3, b_3] \times \cdots \times [a_d, b_d] \to \mathbb{R}$ ορισμένη ως

$$I_2(x_3, \cdots, x_d) := \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_d) dx_1 \right] dx_2$$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή στην I_2 σταθεροποιούμε τις συντεταγμένες $x_4, \cdots, x_d$ και παίρνουμε μια συνάρτηση 1 μεταβλητής $\psi_3 : [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$, την οποία και ολοκληρώνουμε στο $[a_3, b_3]$ και εφόσον το ολοκλήρωμα εξαρτάται απο τις $d-3$ παραμέτρους $x_4, \cdots, x_d$, έχουμε φτιάξει μέσω του ολοκλήρώματος μια συναρτηση $I_3 : [a_4, b_4] \times [a_d, b_d] \to \mathbb{R}$ ορισμενη ως

$$I_3(x_4, \cdots, x_d) := \int_{a_3}^{b_3} I_2(x_3, \cdots, x_d) dx_3$$

$$\int_{a_3}^{b_3} \left\{ \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_d) dx_1 \right] dx_2 \right\} dx_3$$

Μπορούμε να συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρις ότου τελειώσουν όλες οι μεταβλητές.

Τότε θα έχουμε πάρει το επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα

$$I^{(1)} := \int_{a_d}^{b_d} \left[\int_{a_{d-1}}^{b_{d-1}} \cdots \int_{a_3}^{b_3} \left\{ \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_d) dx_1 \right] dx_2 \right\} dx_3 \cdots dx_{d-1} \right] dx_d$$

Θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει αυτή την διαδικασία με διαφορετική σειρά, π.χ.

1. Να σταθεροποιήσουμε όλες τις μεταβλητές $x_1, \cdots, x_{d-1}$ και να θεωρήσουμε την συναρτηση f ως μια συνάρτηση μιάς μεταβλητής της x_d, $\psi_d : [a_d, b_d] \to \mathbb{R}$ και την οποία ολοκλήρώνουμε επάνω στο $[a_d, b_d]$, παίρνοντας ένα αποτέλεσμα που εξαρτάται απο τις $x_1, \cdots, x_{d-1}$,

$$\int_{a_d}^{b_d} f(x_1, x_2, \cdots, x_{d-1}, x_d) dx_d.$$

2 Στην συνάρτηση αυτή που προκύπτει σταθεροποιούμε όλες τις μεταβλητές $x_1, \cdots, x_{d-2}$, την θεωρούμε σαν μια συνάρτηση μιας μεταβλητής, της x_{d-1} και την ολοκλήρώνουμε στο $[a_{d-1}, b_{d-1}]$ και παίρνουμε το

$$\int_{a_{d-1}}^{b_{d-1}} \left[\int_{a_d}^{b_d} f(x_1, x_2, \cdots, x_{d-1}, x_d) dx_d \right] dx_{d-1},$$

το οποίο φυσικά εξαρτάται απο τις $x_1, \cdots, x_{d-2}$, οπότε και μπορει να θεωρηθεί σαν μια συνάρτηση $d-2$ μεταβλητών.

3 Σταθεροποιούμε στην συνάρτηση αυτή τις μεταβλητές $x_1, \cdots, x_{d-3}$ την θεωρούμε σαν μια συνάρτηση μιας μεταβλητής, της x_{d-2} και την ολοκλήρώνουμε στο $[a_{d-2}, b_{d-2}]$ και παίρνουμε το

$$\int_{a_{d-2}}^{b_{d-2}} \left[\int_{a_{d-1}}^{b_{d-1}} \left[\int_{a_d}^{b_d} f(x_1, x_2, \cdots, x_{d-1}, x_d) dx_d \right] dx_{d-1} \right] dx_{d-2},$$

4 Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο και μετά απο d επαναλήψεις παίρνουμε το επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα $I^{(2)}$

$$\int_{a_1}^{b_1}\left[\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_{d-2}}^{b_{d-2}}\left[\int_{a_{d-1}}^{b_{d-1}}\left[\int_{a_d}^{b_d} f(x_1,x_2,\cdots,x_{d-1},x_d)dx_d\right]dx_{d-1}\right]dx_{d-2}\cdots dx_2\right]dx_1$$

Δεν έχουμε κανένα *a priori λόγο να πιστεύουμε ότι* $I^{(1)} = I^{(2)}$*!*

Ακόμα χειρότερα, υπάρχουν περισσότεροι των 2 τρόπων να ορίσουμε επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα!

’σκηση: Πόσα διαφορετικα επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα μπορούμε να κατασκευάσουμε;

Ορισμός

Έστω $A = [a_1, b_1] \times \cdots [a_d, b_d]$ *ένα παραλληλεπίπεδο του* $\mathbb{R}^d$ *και* $f : A \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση.*

Έστω $I^{(1)}, \cdots, I^{(r)}$ *όλα τα επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα τα οποία μπορούμε να ορίσουμε για την συνάρτηση αυτή.*

Αν $I^{(1)} = \cdots = I^{(r)}$ *τότε λέμε οτι η συνάρτηση* f *είναι ολοκληρώσιμη επάνω στο* A *και η κοινή τους τιμή ορίζεται ως το πολλαπλό ολοκλήρωμα της* f *επάνω στο* A

$$\int_A f(x_1, \cdots, x_d) dx_1 \cdots dx_d := I^{(1)} = \cdots = I^{(r)}$$

Με άλλα λόγια το πολλαπλό ολοκλήρωμα της f επάνω στο παραλληλεπίπεδο A είναι η κοινή τιμή όλων των επαναλαμβανόμενων ολοκληρωμάτων!

$$\int_A f(x_1, \cdots, x_d)dx_1 \cdots dx_d :=$$

$$\int_{a_d}^{b_d} \left[\int_{a_{d-1}}^{b_{d-1}} \cdots \int_{a_3}^{b_3} \left\{ \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_d) dx_1 \right] dx_2 \right\} dx_3 \cdots dx_{d-1} \right] dx_d$$

$$= \cdots =$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_{d-2}}^{b_{d-2}} \left[\int_{a_{d-1}}^{b_{d-1}} \left[\int_{a_d}^{b_d} f(x_1, x_2, \cdots, x_{d-1}, x_d) dx_d \right] dx_{d-1} \right] dx_{d-2} \cdots dx_2 \right] dx_1$$

Προφανώς χρειαζόμαστε μια συνθήκε σχετικά με το πότε όλα τα επαναλαμβονόμενα ολοκληρώματα μιας συναρτησης $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι ίσα.

Θεώρημα (Fubini)

Αν η συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε όλα τα επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα είναι ισα

$$I^{(1)} = \cdots = I^{(r)} = I$$

και συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο A,

$$\int_A f(x_1, \cdots, x_d) dx_1 \cdots dx_d = I.$$

Απόδειξη

Θα κάνουμε την απόδειξη για $d = 2$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε 2 διαφορετικα επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα,

$$I^{(1)} = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1,$$
$$I^{(2)} = \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_2$$

Ας πάρουμε την διαμεριση του I_2

$$x_{2,j_2} = a_2 + \frac{b_2 - a_2}{n} j_2, \;\; j_2 = 0, \cdots, n.$$

και για σταθερό x_1 μπορούμε να γράψουμε

$$F_1(x_1) := \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_{2,k}}^{x_{2,k+1}} f(x_1, x_2) dx_2,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αθροιστικη ιδιότητα του ολοκληρώματος Riemann .

Για καθέ ένα απο τα (μονοδιάστατα) ολοκληρώματα $\int_{x_{2,k}}^{x_{2,k+1}} f(x_1, x_2)dx_2$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της μέσης τιμής σύμφωνα με το οποίο για κάθε k υπάρχει $\bar{x}_{2,k} \in [x_{2,k}, x_{2,k+1}]$ τέτοιο ώστε

$$\int_{x_{2,k}}^{x_{2,k+1}} f(x_1, x_2)dx_2 = f(x_1, \bar{x}_{2,k})(x_{2,k+1} - x_{2,k}).$$

Έτσι παίρνουμε οτι

$$F_1(x_1) = \sum_{k=0}^{n} f(x_1, \bar{x}_{2,k})(x_{2,k+1} - x_{2,k}),$$

Προσεγγίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα

$$\int_{a_1}^{b_1} F_1(x_1)dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)dx_2\right] dx_1 = I^{(1)},$$

απο τα αθροίσματα Riemann .

Εφόσον γνωρίζουμε ότι η προσέγγιση αυτή καθέαυτη δεν παίζει ρόλο θα πάρουμε μια διακριτοποίηση του $[a_1, b_1]$ χρησιμοποιώντας τα σημεία

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{n}k, \quad k = 0, \cdots, n,$$

και θα επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $\bar{x}_{1,k} \in [x_{1,k}, x_{1,k+1}]$.

Συνεπώς

$$
\begin{aligned}
I^{(1)} = \int_{a_1}^{b_1} I_1(x_1)dx_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{n} F_1(\bar{x}_{1,\ell})(x_{1,\ell+1} - x_{1,\ell}) \\
= \lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} f(\bar{x}_{1.\ell}, \bar{x}_{2,k})(x_{1,\ell+1} - x_{1,\ell})(x_{2,k+1} - x_{2,k}) \\
= \int_A f(x_1, x_2)dx_1 dx_2,
\end{aligned}
$$

εφόσον τα σημεία $\bar{x}_m = (\bar{x}_{1,\ell}, \bar{x}_{2,k})$, $m = (\ell, k)$ είναι σημεία $\bar{x}_m \in A_m$ και μετά χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος.

Με παρόμοιο τροπο μπορούμε να πάροουμε τώρα την διαμέριση του I_1

$$x_{1,j_1} = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{n} j_1, \ \ j_1 = 0, \cdots, n.$$

και για σταθερό x_2 μπορούμε να γράψουμε

$$F_2(x_2) := \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_{1,k}}^{x_{1,k+1}} f(x_1, x_2) dx_1,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αθροιστικη ιδιότητα του ολοκληρώματος Riemann .

Για καθέ ένα απο τα (μονοδιάστατα) ολοκληρώματα $\int_{x_{1,k}}^{x_{1,k+1}} f(x_1, x_2)dx_1$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της μέσης τιμής σύμφωνα με το οποίο για κάθε k υπάρχει $\bar{x}_{1,k} \in [x_{1,k}, x_{1,k+1}]$ τέτοιο ώστε

$$\int_{x_{1,k}}^{x_{1,k+1}} f(x_1, x_2)dx_1 = f(\bar{x}_{1,k}, x_2)(x_{1,k+1} - x_{1,k}).$$

Έτσι παίρνουμε οτι

$$F_2(x_2) = \sum_{k=0}^{n} f(\bar{x}_{1,k}, x_2)(x_{1,k+1} - x_{1,k}),$$

Προσεγγίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα

$$\int_{a_2}^{b_2} F_2(x_2)dx_2 = \int_{a_2}^{b_2}\left[\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2)dx_1\right]dx_2 = I^{(2)},$$

απο τα αθροίσματα Riemann .

Εφόσον γνωρίζουμε ότι η προσέγγιση αυτή καθέαυτη δεν παίζει ρόλο θα πάρουμε μια διακριτοποίηση του $[a_2, b_2]$ χρησιμοποιώντας τα σημεία

$$x_{2,k} = a_2 + \frac{b_2 - a_2}{n}k, \quad k = 0, \cdots, n,$$

και θα επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $\bar{x}_{2,k} \in [x_{2,k}, x_{2,k+1}]$.

Συνεπώς

$$I^{(2)} = \int_{a_2}^{b_2} I_2(x_2)dx_2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=0}^{n} F_2(\bar{x}_{2,\ell})(x_{2,\ell+1} - x_{2,\ell})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} f(\bar{x}_{1.\ell}, \bar{x}_{2,k})(x_{1,\ell+1} - x_{1,\ell})(x_{2,k+1} - x_{2,k})$$

$$= \int_A f(x_1, x_2)dx_1 dx_2,$$

εφόσον τα σημεία $\bar{x}_m = (\bar{x}_{1,\ell}, \bar{x}_{2,k})$, $m = (\ell, k)$ είναι σημεία $\bar{x}_m \in A_m$ και μετά χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος.

’ρα,

$$I^{(1)} = \int_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = I^{(2)}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Η αποδειξη γενικεύεται εύκολα σε οποιαδήποτε διάσταση d.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαιτερα σημαντικό γιατί μας επιτρέπει τον υπολογισμο d-διάστατων ολοκληρωμάτων σαν επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα που μπορούμε να υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας τους κανόνες του λογισμού!

Guido Fubini

Παράδειγμα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συναρτησης $f : [0,1] \times [1,2] \times [0,3] \to \mathbb{R}$ *με τυπο*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 + x_1\, x_2\, x_3$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συναρτησης $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ *με τύπο*

$$f(x_1, \cdots, x_d) = \sum_{i=1}^{d} c_i x_i.$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συναρτησης $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ *με τύπο*

$$f(x_1, \cdots, x_d) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_i x_j .$$

Παράδειγμα

Αν $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *με* $f(x_1, x_2, \cdots, x_d) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_d(x_d)$ *με* $f_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, d$ *συνεχείς συναρτήσεις, τότε*

$$\int_A f(x_1, \cdots, x_d) dx_1 \cdots dx_d$$

$$= \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \right) \left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(x_2) dx_2 \right) \cdots \left(\int_{a_d}^{b_d} f_d(x_d) dx_d \right)$$

Πότε είναι ολοκληρώσιμη μία συναρτηση;

Απο την εμπειρία μας σχετικα με τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, γνωρίζουμε ότι μπορεί να ειναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann ακόμα και αν είναι ασυνεχείς σε ορισμένα σημεία, αρκεία αυτά να είναι πεπερασμένα το πλήθος;

Θα μπορούσαμε λοιπόν να χαλαρώσουμε λιγάκι την υπόθεση της συνέχειας για μια συναρτηση $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ και να συνεχίσουμε να έχουμε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις;

Η απάντηση είναι ναι αλλά πρέπει πρώτα να σκεφτούμε λιγάκι τι ακριβώς σημαίνει ασυνέχεια για συναρτήσεις περισσοτερων μεταβλητών της μίας.

Μας ενδιαφέρει λοιπόν η μορφή του συνόλου

$$D := \{x \in A \subset \mathbb{R}^d \ : \ \lim_{z \to x} f(z) \neq f(x)\}$$

Ο χαρακτηρισμός του συνόλου των ασυνεχειών D είναι γενικα αρκετά δύσκολη δουλειά.

Στις 2 διαστάσεις $d = 2$ το σύνολο αυτό θα μπορούσε να είναι είτε μια συλλογή απο μεμονωμένα σημεία ειτε να βρισκονται σε μια μονοδιάστατη καμπύλη, είτε να είναι μαζεμένα σε γειτονιές του $\mathbb{R}^2$ (που δεν βρίσκονται σε μονοδιάστατες καμπύλες).

Η τελευταια περίπτωση είναι η χειρότερη δυνατή όσον αφορά στην ολοκληρωσιμότητα της f.

Θεώρημα

Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *μια φραγμένη συνάρτηση και έστω ότι το σύνολο των ασυνεχειών της* D *μπορεί να γραφεί σαν μία πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Τότε η* f *ειναι ολοκληρώσιμη στο* A*.*

Θεώρημα

Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *μια φραγμένη συνάρτηση και έστω ότι το σύνολο των ασυνεχειών της* D *μπορεί να γραφεί σαν μία πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συναρτήσεων μιας μεταβλητής.*

1. *Αν το ολοκλήρωμα* $\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)dx_2$ *είναι καλά ορισμενο για κάθε* $x_1 \in [a_1, b_1]$ *τότε η συνάρτηση* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* A *και*

$$\int_A f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)dx_2 \right] dx_1$$

2. *Αν το ολοκλήρωμα* $\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)dx_1$ *είναι καλά ορισμενο για κάθε* $x_2 \in [a_2, b_2]$ *τότε η συνάρτηση* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* A *και*

$$\int_A f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)dx_1 \right] dx_2$$

3. *Αν ισχυουν ταυτόχρονα τα 1 και 2 τότε*

$$\int_A f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)dx_2 \right] dx_1 = \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)dx_1 \right] dx_2$$

Ολοκληρώματα επάνω σε γενικότερες περιοχές

Ας υποθέσουμε τώρα οτι η συναρτηση f δεν είναι ορισμένη σε ένα παραλληλεπίπεδο A αλλά σε μία γενικότερη περιοχή $U \subset \mathbb{R}^d$.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ορίσουμε το d-διάστατο ολοκλήρωμα $\int_U f(x_1, \cdots, x_d) dx_1 \cdots dx_d$ ως εξής,

1. Παίρνουμε ενα παραλληλεπίπεδο A τέτοιο ώστε $U \subset A$.
2. Επεκτείνουμε την f στο A, ορίζοντας την $\bar{f} : A \to \mathbb{R}$ ως

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν} \quad x \in U, \\ 0 & \text{αν} \quad x \in A \setminus U. \end{cases}$$

Τι έχετε να πείτε για την συνέχεια της $\bar{f}$;

Ορισμός

Το ολοκλήρωμα της f επάνω στο U ορίζεται ως

$$\int_U f(x_1, \cdots, x_d) dx_1 \cdots dx_d := \int_A \bar{f}(x_1, \cdots, x_d) dx_1 \cdots dx_d$$

Ολοκλήρωση σε γενικότερες περιοχές για $d = 2$

Ορισμός (Περιοχές τύπου I)

Μια περιοχή $U \subset \mathbb{R}^2$ ονομάζεται περιοχή τύπου I αν υπάρχουν δύο συνεχείς συναρτήσεις $\phi_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ και $\phi_2 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \in [a_1, b_1], \ \phi_1(x_1) \le x_2 \le \phi_2(x_1)\}$$

Αν U είναι τυπου I τότε

$$\int_U f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{\phi_1(x_1)}^{\phi_2(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1$$

Ορισμός (Περιοχές τύπου II)

Μια περιοχή $U \subset \mathbb{R}^2$ ονομάζεται περιοχή τύπου II αν υπάρχουν δύο συνεχείς συναρτήσεις $\psi_1 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ και $\psi_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 \in [a_2, b_2], \ \psi_1(x_2) \leq x_1 \leq \psi_2(x_2)\}$$

Αν U είναι τυπου II τότε

$$\int_U f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{\psi_1(x_2)}^{\psi_2(x_2)} f(x_1, x_2) dx_1 \right] dx_2$$

Ορισμός (Περιοχές τύπου *III*)

Μια περιοχή $U \subset \mathbb{R}^2$ ονομάζεται περιοχή τύπου III αν είναι ταυτόχρονα και τύπου I και τύπου II.

Αν U είναι τυπου I τότε

$$\int_U f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{\phi_1(x_1)}^{\phi_2(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1$$
$$= \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{\psi_1(x_2)}^{\psi_2(x_2)} f(x_1, x_2) dx_1 \right] dx_2$$

Αλλαγή μεταβλητων

Ας πάρουμε δύο περιοχές U^* και U στον $\mathbb{R}^d$ και μια συναρτηση $T : U^* \to U$.

Αν θεωρήσουμε οτι η συναρτηση T είναι 1-1 και επί τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η T απεικονίζει την περιοχή U^* στην περιοχή U.

- Η T ειναι 1-1 στο U^* αν $T(x) = T(x')$ εξασφαλίζει ότι $x = x'$.
- Η Tείναι επί στο U αν για κάθε $x \in U$ υπάρχει $x^* \in U^*$ τέτοιο ώστε $T(x^*) = x$, και τότε μπορούμε να γράψουμε

$$U = T(U^*) \text{ η } U^* = T^{-1}(U)$$

Παράδειγμα

Αν $U^* = [0,1] \times [0,2\pi]$ *και*

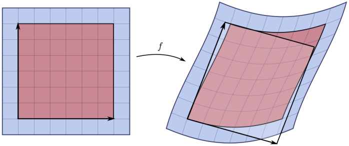
$$T(x_1^*, x_2^*) = (x_1, x_2) = (x_1^* \cos(x_2^*), x_1^* \sin(x_2^*))$$

τότε η T *απεικονίζει ένα ορθογώνιο σε ένα δίσκο.*

Μια ιδέα σχετικά με το τι συμβαίνει για $d = 2$

Ας υποθέσουμε ότι ο μετασχηματισμος T είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμος,

$$T(x^*) = A\,x^*, \;\; \forall\, x^* \in U^* \subset \mathbb{R}^2.$$



Ας πάρουμε τώρα το παραλληλεπίπεδο D^* το οποίο ορίζεται απο τα διανύσματα $e_1^* = (1,0)$ και $e_2^* = (1,0)$ στο U^*.

Το διάνυσμα e_1^* απεικονίζεται στο $a_1 = Ae_1^* \in U$ και το διάνυσμα e_2^* απεικονίζεται στο $a_2 = Ae_2^* \in U$.

Κατά συνεπεια, το παραλληλεπίπεδο D^* απεικονίζεται στο D που ειναι το παραλληλόγραμμο που ορίζεται απο τα διανύσματα a_1 και a_2.

Το εμβαδό του D γνωρίζουμε ότι ειναι ίσο με $V(D) = \|a_1 \times a_2\|$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα

Ορισμός

Αν $T : U^* \to U$ μια C^1 συνάρτηση, η Ιακωβιανή ορίζουσα του μεταχηματισμού σε οποιοδήποτε σημείο $x^* \in U^*$ είναι η

$$J(x^*) = |\, det(DT(x^*))\, |$$

Ας υποθέσουμε ότι η $T : U^* \to U$ είναι C^1 και ας χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $x = T(x^*)$ ή σε συντεταγμενες

$$\begin{aligned} x_1 &= T_1(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_d^*), \\ x_2 &= T_2(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_d^*), \\ &\cdots \\ x_d &= T_d(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_d^*). \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα $x^* = T^{-1}(x) =: H(x)$ και σε συντεταγμενες

$$\begin{aligned} x_1^* &= H_1(x_1, x_2, \cdots, x_d), \\ x_2^* &= H_2(x_1, x_2, \cdots, x_d), \\ &\cdots \\ x_d^* &= H_d(x_1, x_2, \cdots, x_d). \end{aligned}$$

Έστω J η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού αυτού,

$$J(x^*) = det(DT(x^*))$$

Θεώρημα

Αν $U = T(U^*)$ *και* $f : U \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε*

$$\int_U f(x_1, x_2, \cdots, x_d) dx_1 dx_2 \cdots dx_d$$

$$= \int_{U^*} f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_d^*) J(x_1^*, \cdots, x_d^*) dx_1^* dx_2^*, \cdots dx_d^*,$$

όπου $f(x^*) = f(T(x^*))$ *ή σε συντεταγμενες*

$$f(x_1^*, \cdots, x_d^*) = f(x_1(x_1^*, \cdots, x_d^*), \cdots, x_d(x_1^*, \cdots, x_d^*)).$$

Πολλές φορές το ένα απο τα δύο ολοκληρώματα είναι πολύ ευκολο στον υπολογισμο.

Ένας εύκολος τρόπος να θυμόμαστε τον τυπο της αλλαγής μεταβλητών είναι να τον γράψουμε ως εξής

Αν $x^* \in U^* \mapsto x = T(x^*) \in U$ και $T : U^* \to U$ είναι C^1, τότε

$$\int_U f(x)dx = \int_{T^{-1}(U)} (f \circ T)(x^*) \left| det(DT(x^*)) \right| dx^*$$

Μην ξεχάσετε ποτέ αυτο τον τύπο!

Το μονοδιάστατο ανάλογο

Θυμηθειτε τον τυπο αλλαγής μεταβλητών για το μονοδιάστατο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x^*))g'(x^*)dx^*.$$

Αυτό προκύπτει απο την αλλαγή μεταβλητών $x = g(x^*)$

Η αλλαγή μεταβλητών αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν ο μετασχηματισμος του $U^* = [g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ στο $U = [a, b]$, όπου $T(x^*) = g(x^*)$.

Στην μονοδιάστατη περίπτωση $DT(x^*) = g'(x^*)$ και δεν χρειάζεται να πάρουμε την απόλυτη τιμή λόγω της συμβασης

$$\int_c^d \phi(x^*)dx^* = -\int_d^c \phi(x^*)dx^*.$$

Παράδειγμα

Δίνεται δύο περιοχές $U^*, U \subset \mathbb{R}^d$ *και ο* C^1 *μετασχηματισμός* $T : U^* \to U$ *τέτοιος ώστε*

$$T(U^*) = U$$

και

$$T^{-1}(U) = U^*)$$

Αν

$$J_T(x^*) = |Det(DT(x^*))|$$

είναι η Jacobian ορίζουσα του μετασχηματισμού T *ποιά θα είναι η Jacobian ορίζουσα του αντίστροφου μετασχηματισμού* T^{-1},

$$J_{T^{-1}}(x) = |Det(DT^{-1}(x))|?$$

Έστω $Id^* : U^* \to U^*$ ο ταυτοτικός μετασχηματισμός στο U^* δηλαδή ο μετασχηματισμος $x^* = Id^*(x^*)$ για κάθε $x^* \in U^*$.

Πρέπει να σας είναι προφανές ότι $J_{Id^*} = 1$.

Πρέπει επίσης να σας είναι προφανες ότι $Id^* = T^{-1} \circ T$

Εφόσον

$$Id^*(x^*) = (T^{-1} \circ T)(x^*), \ \forall x^* \in U^*,$$

έχουμε ότι

$$D\, Id^*(x^*) = D(T^{-1} \circ T)(x^*), \ \forall x^* \in U^*,$$

και απο τον κανόνα της αλυσίδας,

$$D(T^{-1} \circ T)(x^*) = DT^{-1}(T(x^*))\, DT(x^*).$$

συνεπώς

$$D\, Id^*(x^*) = DT^{-1}(T(x^*))\, DT(x^*)$$

Θυμηθειτε απο την γραμμική άλγεβρα οτι αν για $A, B, C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ισχύει $A = B\,C$ τότε $det(A) = det(B)det(C)$.

Εφαρμόστε την σχέση αυτή για την επιλογή

$$A = D\,Id^*(x^*),\quad B = DT^{-1}(T(x^*)),\quad C = DT(x^*),$$

για να καταλήξετε στο συμπέρασμα

$$1 = J_T(x^*)J_{T^{-1}}(x),\quad x = T(x^*).$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το εμβαδό του μοναδιαίου δίσκου, γράφοντας το σαν ενα διπλο ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών.

Παράδειγμα

Υπολογίστε τον όγκο της σφαίρας ακτίνας R στις 3 διαστάσεις γράφοντας την σαν ένα τριπλό ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητών σε σφαιρικες συντεταγμενες

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^* \sin(x_3^*) \cos(x_2^*), \\ x_2 &= x_1^* \sin(x_3^*) \sin(x_2^*), \\ x_3 &= x_1^* \cos(x_3^*) \end{aligned}$$

όπου $x_1^* \in [0, R]$, $x_2^* \in [0, 2\pi]$ *και* $x_3^* \in [0, \pi]$.

Παράδειγμα

Το υποσύνολο $B_d(0,R) \subset \mathbb{R}^d$,

$$B_d(0,R) := \{x = (x_1, \cdots, x_d) \ : \ x_1^2 + \cdots + x_d^2 \leq R^2\}$$

ονομαζεται μπάλα (ή σφαιρα) με ακτίνα R *στον* $\mathbb{R}^d$.

Υπολογίστε τον όγκο της $B_d(0,R)$ *και δείξτε ότι*

$$V(B_d(0,R)) = \int_{B_d(0,R)} 1 \, dx_1 \cdots dx_d = C\, R^d,$$

όπου $C = V(B_d(0,1))$ *ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας.*

Ας ορίσουμε $U = B_d(0, R)$ και $U^* = B_d(0, 1)$.

Ο μετασχηματισμός $T : U^* \to U$,

$$T(x^*) = Rx^*,$$

μετασχηματίζει την μοναδιαία μπάλα στην μπάλα ακτίνας R.

Προσπαθείστε να πείσετε τον εαυτό σας οτι

$$J_T(x^*) = |det(DT(x^*))| = R^d, \ \ \forall x^* \in U^* = B_d(0,1)$$

Ο τύπος αλλαγής μεταβλητών μας δίνει

$$V(U) = \int_U 1\, dx = \int_{T^{-1}(U)} 1\, |det(DT(x^*))| dx^* = \int_{U^*} 1\, R^d\, dx^*$$
$$= R^d \int_{U^*} 1\, dx^* = R^d\, V(U^*).$$

Παράδειγμα (Σφαιρικές συντεταγμένες στις d-διαστάσεις Δύσκολο)

Θεωρείστε την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών,

$$x^* = (x_1^*, \cdots, x_d^*) \mapsto x = (x_1, \cdots, x_d),$$

όπου

$$x^* \in U^* := [0, R] \times [0, \pi] \times \cdots \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

με

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^* \cos(x_2^*), \\ x_2 &= x_1^* \sin(x_2^*) \cos(x_3^*), \\ &\cdots \\ x_{d-1} &= x_1^* \sin(x_2^*) \sin(x_3^*) \cdots \sin(x_{d-1}^*) \cos(x_d^*), \\ x_d &= x_1^* \sin(x_2^*) \sin(x_3^*) \cdots \sin(x_{d-1}^*) \sin(x_d^*) \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια ...)

1 *Δείξτε οτι ο μετασχηματισμός* $x^* \mapsto T(x)$ *που ορίσαμε απεικονίζει το* U^* *στο* $U = B_d(0, R)$.

2 *Δείξτε οτι ο πίνακας* $A := DT(x^*)$ *έχει την ιδιότητα* $a_{ij} = 0$, *για* $j > i + 1$, *για κάθε* x^*, $i = 1, \cdots, d$ *και δείξτε οτι η ορίζουσα του είναι ίση με*

$$|Det(DT(x^*))| = (x_1^*)^{d-1}(\sin x_2^*)^{d-2}(\sin x_3^*)^{d-3} \cdots (\sin x_{d-1}^*)^1$$

3 *Υπολογίστε με την βοήθεια αυτού του μετασχηματισμού τον όγκο του* $B_d(0, 1)$ *και δείξτε οτι*

$$V(B(0,1)) = \frac{2\pi}{d}\left[\int_0^\pi \sin^{d-2}(x_2^*)dx_2^*\right]\left[\int_0^\pi \sin^{d-3}(x_3^*)dx_3^*\right] \cdots \left[\int_0^\pi \sin(x_{d-1}^*)dx_{d-1}^*\right]$$

Αν δεν μπορείτε να δείξετε την (2) για την οποία πρέπει να χρησιμοποιείσετε επαγωγή, πάρτε την σαν δεδομένη και προσπαθείστε να δειξετε την (3)!