Λογισμος II, Σύναρτησεις στον $\mathbb{R}^d$

Α. Ν. Γιαννακόπουλος
Τμήμα Στατιστικής

Ο.Π.Α

Εαρινό Εξάμηνο 2024

Συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^d$.

Θα θεωρησουμε το συνολο $\mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{R}^d = \{x = (x_1, \cdots, x_d) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \cdots, d\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{d \text{ φορές}}$$

εφοδιασμένο με την ευκλειδια απόσταση

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2},$$

και το συνολο $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \cdots, n\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ φορές}}$$

εφοδιασμένο με την ευκλειδια απόσταση

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

Ορισμός

Μια συναρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ *ειναι μια απεικόνιση*

$$(x_1, \cdots, x_d) \mapsto (y_1, \cdots, y_n).$$

Η f μπορεί να κατανοηθεί σαν ένα 'μαυρο κουτί' στο οποίο έχουμε μια εισοδο που περιγράφεται απο d αριθμούς $(x_1, \cdots, x_d)$ και μας επιστρέφει μια έξοδο απο n αριθμούς $(y_1, \cdots, y_n)$.

Μπορούμε επίσης να γράφουμε

$$y_i = y_i(x_1, \cdots, x_d), \;\; i = 1, 2, \cdots, n.$$

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι έχετε ενα στατιστικό υπόδειγμα στο οποίο αν ξέρετε την ηλικία των γονέων ενός παιδιού, το βάρος τους και το ύψος τους μπορειτε να προβλέψετε το ύψος και το βάρος ενός παιδιού όταν αυτό φτάσει στην ηλικία των 17 ετών.

Το υπόδειγμα σας ειναι μια συναρτηση $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι έχετε ενα υπόδειγμα στο οποίο αν ξέρετε την θέση ενός οποιοδηποτε σημειου στο δωμάτιο μπορείτε να υπολογίσετε την θερμοκρασία σε αυτό το σημειο.

Το υπόδειγμα σας ειναι μια συναρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Μια συναρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *πολλές φορές αναφέρεται σαν μια (υπερ)-επιφάνεια στον χώρο* $\mathbb{R}^d$.

Παράδειγμα

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ *ονομάζεται μια καμπύλη στον* $\mathbb{R}^d$.

Σημεια συσσώρευσης

Τις περισσότερες φορές δεν οριζεται μια συναρτηση σε όλο το $\mathbb{R}^d$ αλλά σε κάποιο υποσυνολο του, $U \subseteq \mathbb{R}^d$.

Ορισμός

Ένα σημείο $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ *ονομαζεται σημείο συσσώρευσης του* U *αν υπάρχει ακολουθια* $\{x_n\} \subset U$ *τέτοια ώστε* $x_n \to x$ *στον* $\mathbb{R}^d$.

Ένα σημείο συσσώρευσης του U δεν ανήκει απαραιτητα στο U!

Η έννοια του ορίου

Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ μια συνάρτηση, και $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ένα σημείο συσσώρευσης του U.

Ορισμός

Θα λέμε οτι το όριο της f καθώς το x τεινει στο x_0 είναι $y_0 \in \mathbb{R}^n$ και θα συμβολίζουμε με $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, αν

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \textit{τέτοιο ώστε} \;\; d(f(x), y_0) < \epsilon$$
$$\forall x \in U, \;\; \textit{τέτοια ώστε} \;\; d(x, x_0) < \delta,$$

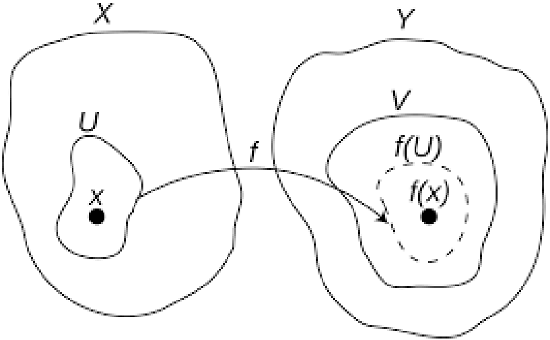
ή ισοδύναμα,

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \textit{τέτοιο ώστε} \;\; \|f(x) - y_0\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon$$
$$\forall x \in U, \;\; \textit{τέτοια ώστε} \;\; \|x, x_0\|_{\mathbb{R}^d} < \delta,$$

Καθώς το x πλησιάζει το x_0 το $f(x)$ πλησιάζει το y_0!

Γεωμετρική έννοια του ορίου

Για κάθε ανοιχτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ με κέντρο y_0 (και ακτίνα $\epsilon > 0$) $B(y_0, \epsilon)$ υπάρχει μια ανοιχτή μπάλα του $\mathbb{R}^d$ με κέντρο x_0 και ακτινα $\delta > 0$, $B(x_0, \delta)$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in B(x_0, \delta)$ να ισχύει οτι $f(x) \in B(y_0, \epsilon)$.



Θεώρημα

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ *αν και μόνο αν* *για κάθε* *ακολουθία* $x_n \to x_0$ *στον* $\mathbb{R}^d$ *ισχύει ότι* $f(x_n) \to y_0$ *στον* $\mathbb{R}^n$.

Με όποιο τρόπο $\{x_n\}$ και αν πλησιάσω το σημείο x_0 οι εικόνες $\{f(x_n)\}$ θα πλησιάζουν το ιδιο σημειο y_0.

Αν μπορείτε να βρείτε έστω και ενα ζεύγος ακολουθιών $\{x_n\}$ και $\{x_n'\}$ τέτοιες ωστε ενώ

$$x_n \to x_0 \ \text{ στον } \ \mathbb{R}^d,$$
$$x_n' \to x_0 \ \text{ στον } \ \mathbb{R}^d,$$

να ισχυει

$$f(x_n) \to y_0, \ \text{ στον } \ \mathbb{R}^n,$$
$$f(x_n') \to y_0' \ \text{ στον } \ \mathbb{R}^n,$$

με $y_0 \neq y_0'$ τότε το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει!

Θεώρημα (Ιδιότητες του ορίου)

1. *Το όριο αν υπάρχει είναι μοναδικό.*
2. *Αν* $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = y_1$ *και* $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = y_2$, *τότε*
$$\lim_{x \to x_0} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2(x)) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$
3. *Αν* $n = 1$ *και* $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = y_1$ *και* $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = y_2$, *τότε*
$$\lim_{x \to x_0} (f_1 f_2)(x) = y_1 y_2.$$
4. *Αν* $n = 1$ *και* $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = y_1$ *και* $y_1 \neq 0$, *τότε*
$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f_1}\right)(x) = \frac{1}{y_1}.$$

Συνέχεια

Ορισμός

Θα λέμε οτι η μια συναρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0 \in U$ *αν το όριο* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *υπάρχει και*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

Ορισμός

Θα λέμε οτι η μια συναρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ *είναι συνεχής στο* U *αν είναι συνεχής σε κάθε* $x_0 \in U$.

Ισοδύναμοι ορισμοί για την συνέχεια

Ορισμός

Θα λέμε οτι η μια συναρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0 \in U$ *αν*

$$\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ \textit{τέτοιο ώστε} \ \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$$
$$\forall \ x \ \textit{τέτοια ώστε} \ \|x - x_0\| < \delta.$$

Ορισμός

Θα λέμε οτι η μια συναρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0 \in U$ *αν για κάθε ακολουθια* $x_n \to x_0$ *στο* $\mathbb{R}^d$*, ισχυει ότι* $f(x_n) \to f(x_0)$ *στο* $\mathbb{R}^n$*.*

Μια συναρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής στο σημειο $x_0 \in U$ αν μικρές μεταβολές του x γύρω απο το x_0 οδηγούν σε μικρές μεταβολές στην τιμή της συνάρτησης.

Η συνέχεια ειναι μια επιθυμητή ιδιότητα για πολλά μαθηματικά μοντέλα.

Θεώρημα

1. Αν $f_1, f_2 : U \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ συνεχείς συναρτήσεις στο x_0 τότε και η συνάρτηση $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ είναι συνεχής στο x_0 για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
2. Αν $n = 1$ και $f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο x_0 τότε $f_1 f_2$ συνεχης στο x_0.
3. Αν $n = 1$ και $f_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ συνεχης στο x_0 με $f(x_0) \neq 0$ τότε και η $\frac{1}{f_1}$ είναι συνεχής στο x_0.
4. Αν $f_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ και $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με f_1 συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}^d$ και f_2 συνεχής στο $f_1(x_0) \in \mathbb{R}^n$, τότε και η σύνθεση $f_1 \circ f_2$ είναι συνεχης στο x_0.

Παράδειγμα

Βρείτε το οριο της συναρτησης $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *με γενικό τύπο*

$$f(x_1, \cdots, x_d) = \frac{\sin(x_1^2 + \cdots + x_d^2)}{x_1^2 + \cdots + x_d^2},$$

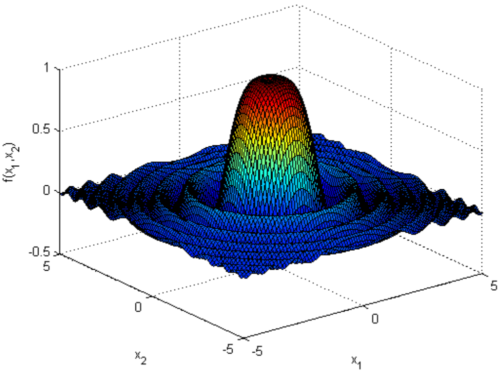
καθως $x = (x_1, \cdots, x_d) \to 0 = (0, \cdots, 0)$.

Υπόδειξη Θυμηθείτε ότι αν $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\phi(s) = \frac{\sin(s)}{s}$, τότε $\lim_{s \to 0} \phi(s) = 1$.

Εφόσον $x = (x_1, \cdots, x_d) \to 0 = (0, \cdots, 0)$ τότε $s = x_1^2 + \cdots + x_d^2 \to 0$ στο $\mathbb{R}$.

Συνεπώς, απο την υπόδειξη θα έχουμε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x_1^2+\cdots+x_d^2)}{x_1^2+\cdots+x_d^2} = 1$.

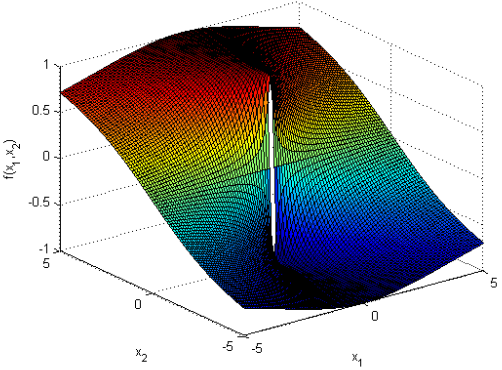
Προσπαθείστε αυτή την διαισθητικη απόδειξη να την μεταφέρετε σε μια αυστηρή απόδειξη χρησιμοποιώντας τον ορισμο.



Παράδειγμα

Δείξτε οτι

$$\lim_{x\to 0} \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_d^2}} = 0.$$



Παρατηρείστε ότι

$$0 \leq \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}} \leq \frac{x_1^2 + \cdots + x_d^2}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$$

Συνεπώς αν $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2} < \epsilon$ τότε και $\frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}} \leq \epsilon$.

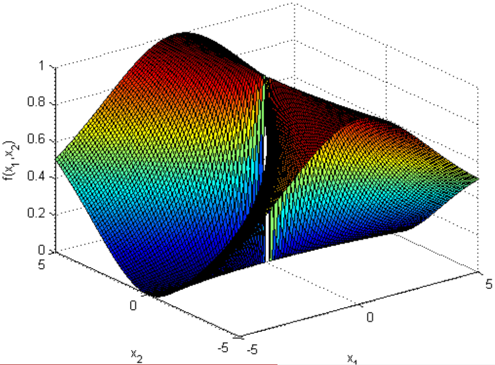
Αρα μπορούμε να αποδείξουμε το ζητούμενο απο τον ορισμό για $\delta = \epsilon$.

Παράδειγμα

Υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{x_1^2}{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$$

Δικαιολογείστε την απάντηση σας.



Οι ακολουθίες $x_n = (1/n, 0, \cdots, 0)$ και $x'_n = (0, \frac{1}{n}, 0, \cdots, 0)$ ικανοποιούν την ιδιότητα

$$x_n \to 0 = (0, \cdots, 0),$$
$$x'_n \to 0 = (0, \cdots, 0).$$

Ας παρουμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = f(x_1, \cdots, x_d) = \frac{x_1^2}{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$ και ας εξετάσουμε τις ακολουθιες

$$f(x_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + 0} = 1 \to 1,$$
$$f(x'_n) = \frac{0}{\frac{1}{n^2} + 0} = 0 \to 0,$$

Αρα το όριο δεν υπάρχει.