Λογισμος ΙΙ, Σύγκλιση στον $\mathbb{R}^d$

Α. Ν. Γιαννακόπουλος
Τμήμα Στατιστικής

Ο.Π.Α

Εαρινό Εξάμηνο 2024

Το $\mathbb{R}^d$.

Θα θεωρησουμε το συνολο $\mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{R}^d = \{x = (x_1, \cdots, x_d) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \cdots, d\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{d \text{ φορές}}$$

εφοδιασμένο με την ευκλειδια απόσταση

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}$$

Ακολουθίες του $\mathbb{R}^d$

Έστω $x_n = (x_{1,n}, \cdots, x_{d,n})$, $n \in \mathbb{N}$ μια ακολουθια στο $\mathbb{R}^d$

Γεωμετρικα, μια ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ είναι μια άπειρη συλλογή απο σημεία του $\mathbb{R}^d$.

Την ακολουθία αυτή μπορεί να την κατανοήσουμε και ως μια συλλογή απο d ακολουθίες $\{x_{i,m}\}$ στο $\mathbb{R}$, για $i = 1, \cdots, d$, $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα

Τρεις φίλοι ξεκινούν απ την αιθουσα Α32 που είναι στο σημειο $(0, 0)$ και θέλουν να πάνε στο εργαστήριο στατιστικής που είναι στο σημείο (1,1).

Ο Α ακολουθει την εξής πορεία $(x_{1,n} = 1 - \frac{1}{n}, x_{2,n} = 1 - \frac{1}{n})$

Ο Β ακολουθεί την εξής πορεία $(x_{1,n} = 1 - \frac{1}{n^2}, x_{2,n} = 1 - \frac{1}{n^2})$

Ο Γ ακολουθεί την πορεια $(x_{1,n} = 1 - \frac{1}{n}, x_{2,n} = 1 - \frac{1}{n^2})$.

Θα φτάσουν και οι 3 στο εργαστήριο και αν ναι ποιός πιστεύετε οτι θα φτάσει πρώτος;

Σύγκλιση ακολουθιών του $\mathbb{R}^d$

Μας ενδιαφέρει η ερώτηση κατά πόσον καθώς το $n \to \infty$ υπάρχει κάποιο σημείο $x \in \mathbb{R}^d$ το οποίο να πλησιάζουν τα σημεια x_n απο κάποιο N και μετά.

Η έννοια της εγγύτητας (πλησιάζω) ποσοτικοποιείται μεσω της ευκλειδιας απόστασης $d(x, y)$.

Το ερώτημα μας μπορεί να μεταγραφεί ως:

> *Υπάρχει κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$ τέτοιο ωστε για κάθε $\epsilon > 0$ να ισχύει οτι $d(x_n, x) < \epsilon$ για κάθε n μεγαλύτερο απο κάποιο κατάλληλα επιλεγμενο N;*

Ορισμός

Θα λέμε οτι η ακολουθία $\{x_n\}$ *συγκλίνει στο* $x \in \mathbb{R}^d$, *και θα συμβολίζουμε με* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ή απλά* $x_n \to x$, *αν*

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \textit{τέτοιο ώστε} \;\; d(x_n, x) < \epsilon \;\; \forall\, n \geq N.$$

Παράδειγμα

Η ακολουθία $x_n = (x_{1,n}, x_{2,n})$ με $x_{1,n} = 1 - \frac{1}{n}$, $x_{2,n} = 1 - \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει στο $x = (1,1)$.

Ας υπολογίσουμε

$$d(x_n, x) = \sqrt{(x_{1,n} - 1)^2 + (x_{2,n} - 1)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \to 0.$$

Γεωμετρική έννοια του ορίου

Ορισμός (Ανοιχτή μπάλα του $\mathbb{R}^d$)

Το σύνολο

$$\begin{aligned} B(x,\epsilon) &= \{y \in \mathbb{R}^d \ : \ d(x,y) < \epsilon\} \\ &= \{y = (y_1, \cdots, y_d) \in \mathbb{R}^d \ : \{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2\}^{1/2} < \epsilon\}, \end{aligned}$$

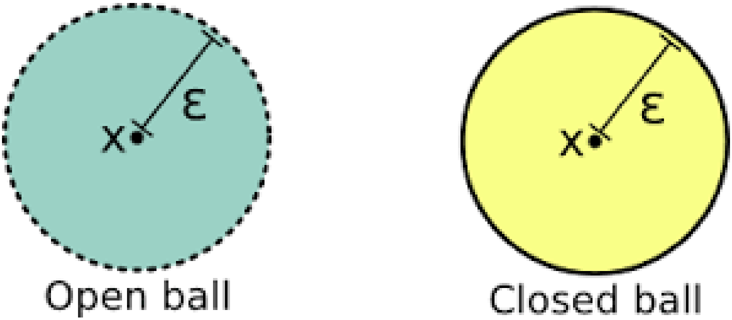
ονομαζεται ανοιχτή μπάλα του $\mathbb{R}^d$ με κέντρο το σημείο $x \in \mathbb{R}^d$ και ακτίνα $\epsilon > 0$.

Ορισμός (Κλειστή μπάλα του $\mathbb{R}^d$)

Το σύνολο

$$\begin{aligned}\overline{B(x,\epsilon)} &= \{y \in \mathbb{R}^d \ : \ d(x,y) \leq \epsilon\} \\ &= \{y = (y_1, \cdots, y_d) \in \mathbb{R}^d \ : \{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2\}^{1/2} \leq \epsilon\},\end{aligned}$$

ονομαζεται κλειστή μπάλα του $\mathbb{R}^d$ *με κέντρο το σημείο* $x \in \mathbb{R}^d$ *και ακτίνα* $\epsilon > 0$.


x
ε
Open ball
x
ε
Closed ball

Ο ορισμος για το όριο

Ορισμός

Θα λέμε οτι η ακολουθία $\{x_n\}$ *συγκλίνει στο* $x \in \mathbb{R}^d$, *και θα συμβολίζουμε με* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ή απλά* $x_n \to x$, *αν*

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \textit{τέτοιο ώστε} \ d(x_n, x) < \epsilon \ \forall\, n \geq N.$$

μπορεί να μεταφραστεί ισοδύναμα ως

Ορισμός

Θα λέμε οτι η ακολουθία $\{x_n\}$ *συγκλίνει στο* $x \in \mathbb{R}^d$, *και θα συμβολίζουμε με* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ή απλά* $x_n \to x$, *αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπαρχει μια ανοιχτή μπάλα με κέντρο το* x *και ακτίνα* $\epsilon > 0$, $B(x, \epsilon)$, *τέτοια ώστε να μαζεύει όλους τους όρους της ακολουθίας εκτός απο πεπέρασμενο πλήθος.*

Ιδιότητες του ορίου

1. Το οριο αν υπάρχει είναι μοναδικό
2. Αν $\{x_n\}, \{y_n\}$ δυο ακολουθίες με

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

τότε

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y.$$

3. Αν $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ τότε $\lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda x$
4. Αν $\{x_n\}, \{y_n\}$ δυο ακολουθίες με

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

τότε

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$$

Όπως είπαμε προηγουμένως μια ακολουθία $\{x_n \subset \mathbb{R}^d$ μπορεί να κατανοηθεί σαν μια συλλογή απο d ακολουθίες $\{x_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Ας υποθέσουμε οτι για κάθε μία απο αυτές τις πραγματικες ακολουθίες υπάρχει κάποιο $x_i \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i, \quad i = 1, \cdots, d.$$

Ας φτιάξουμε τώρα το διάνυσμα $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Ας υποθέσουμε επίσης οτι υπάρχει κάποιο x' τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ στον $\mathbb{R}^d$.

Πώς νομίζετε ότι θα συνδέονται τα x και x';

Θεώρημα

Δίνεται η ακολουθια $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(x_{1,n}, x_{2,n}, \cdots, x_{d,n})\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ *και το διάνυσμα* $x = (x_1, \cdots, x_d) \subset \mathbb{R}^d$.

$lim_{n\to\infty} x_n = x$ *αν και μόνο αν* $\lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$ *για κάθε* $i = 1, 2, \cdots, d$.

Αν $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ τότε $\|x_n - x\| \to 0$ οπότε

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_{i,n} - x_i|} \to 0$$

δηλ. για $n > N$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_{i,n} - x_i|} < \epsilon$$

Όμως

$$|x_{j,n} - x_j| \leq \epsilon \ \forall\, j = 1, \cdots, n$$

άρα

$$x_{j,n} \to x_j \ \ j = 1, \cdots, n$$

Αν $\lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$ για κάθε $i = 1, \cdots, n$ τότε για κάθε ϵ_i υπάρχει N_i τέτοιο ώστε

$$-\epsilon_i \leq x_{i,n} - x_i \leq \epsilon_i, \quad n > N_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

Συνεπώς

$$|x_{i,n} - x - i|^2 \leq \epsilon_i^2, \quad n > N_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

Παιρνοντας $n > max(N_1, \cdots, N_n)$ οι παραπάνω ισχύουν για κάθε i οπότε αθροίζοντας

$$\sum_{i=1}^{n} |x_{i,n} - x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2$$

οπότε επιλέγοντας $\epsilon_i = \epsilon/\sqrt{n}$ για $\epsilon > 0$ αυθαίρετα μικρό,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_{i,n} - x_i|^2 \leq \epsilon^2$$

οπότε $\|x_n - x\| \leq \epsilon$.

Παράδειγμα

Βρείτε το όριο της ακολουθιας

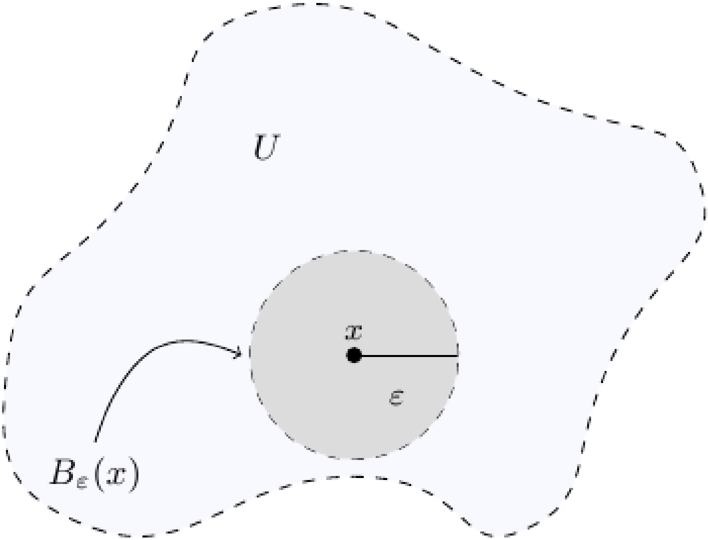
$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(2+\frac{2}{n^2}, 1-\frac{5}{n^2}, -\frac{1}{n^2}, -3+\frac{7}{n^2})\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^4.$$

Ανοιχτά σύνολα

Ορισμός

Ένα υποσύνολο $U \subset \mathbb{R}^d$ *ονομαζεται ανοιχτό αν για κάθε* $x \in U$ *υπάρχει μια ανοιχτή μπάλα που να περιέχεται εξ ολοκλήρου στο* U

$$\forall x \in U \;\; \exists \epsilon > 0 \;\; \textit{τέτοιο ώστε} \;\; B(x, \epsilon) \subset U.$$


U
x
ε
$B_\varepsilon(x)$

Παράδειγμα

Το συνολο $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^d$, $r > 0$ *είναι ανοιχτό σύνολο.*

Έστω οποιοδήποτε $x \in B(x_0, r)$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \epsilon) \subset B(x_0, r)$.

Ισχυρίζομαι οτι μπορώ να επιλέξω $\epsilon = r - \|x - x_0\|$.

Πράγματι, εφόσον $x \in B(x_0, r)$, ισχύει $\|x - x_0\| < r$ (συνεπώς $\epsilon > 0$).

Έστω τώρα οποιοδηποτε $y \in B(x, \epsilon)$, δηλαδή $\|y - x\| < \epsilon$.

Τότε

$$\begin{aligned} \|y - x_0\| = \|y - x + x - x_0\| &\leq \|y - x\| + \|x - x_0\| \\ &< \epsilon + \|x - x_0\| = r \end{aligned}$$

συνεπώς, $y \in B(x_0, r)$.

Παράδειγμα

Το σύνολο $A = \{(x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \;\; : \;\; x_1 > 0\}$ *είναι ένα ανοιχτό σύνολο.*

Ας πάρουμε οποιοδήποτε $x \in A$: Αρκεί να δείξουμε την ύπαρξη μιας ανοιχτής μπάλας $B(x, \epsilon) \subset A$.

Εφόσον $x \in A$ ισχύει ότι $x_1 > 0$. Ισχυρίζομαι οτι η ανοιχτή μπάλα $B(x, x_1) \subset A$.

Πράγματι, εστω οποιοδήποτε $y = (y_1, y_2, \cdots, y_d) \in B(x, x_1)$.

Αυτό σημαίνει ότι

$$|x_1 - y_1| \leq \|x - y\| < x_1,$$

το οποίο ισοδύναμα δινει ότι

$$-x_1 < x_1 - y_1 < x_1,$$

άρα $y_1 > 0$ συνεπώς $y \in A$.

Γειτονιές και συνοριακά σημεία

Ορισμός

Οποιοδηποτε ανοιχτό συνολο το οποίο περιέχει ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^d$ *ονομάζεται* ***γειτονιά*** *του* x.

Ορισμός

Έστω $A \subset \mathbb{R}^d$. Ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^d$ ονομαζεται συνοριακό σημείο του A αν κάθε γειτονιά του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο στο A και ένα σημείο εκτός του A.

Ένα συνοριακό σημείο x του A μπορεί να περιέχεται στο A μπορεί όμως και να μην περιέχεται στο A.

Ορισμός

Έστω $A \subset \mathbb{R}^d$. Ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^d$ ονομαζεται συνοριακό σημείο του A αν κάθε γειτονιά του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο στο A και ένα σημείο εκτός του A.

Ένα συνοριακό σημείο x του A μπορεί να περιέχεται στο A μπορεί όμως και να μην περιέχεται στο A.

Αν $x \in A$ τότε το x είναι συνοριακό σημείο αν κάθε γειτονιά του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο όχι στο A

Ορισμός

Έστω $A \subset \mathbb{R}^d$. Ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^d$ ονομαζεται συνοριακό σημείο του A αν κάθε γειτονιά του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο στο A και ένα σημείο εκτός του A.

Ένα συνοριακό σημείο x του A μπορεί να περιέχεται στο A μπορεί όμως και να μην περιέχεται στο A.
Αν $x \in A$ τότε το x είναι συνοριακό σημείο αν κάθε γειτονιά του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο όχι στο A
Αν το $x \notin A$ ειναι συνοριακό σημείο αν κάθε γειτονιά του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A.

Ορισμός

Έστω $A \subset \mathbb{R}^d$. Ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^d$ ονομαζεται συνοριακό σημείο του A αν κάθε γειτονιά του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο στο A και ένα σημείο εκτός του A.

Ένα συνοριακό σημείο x του A μπορεί να περιέχεται στο A μπορεί όμως και να μην περιέχεται στο A.
Αν $x \in A$ τότε το x είναι συνοριακό σημείο αν κάθε γειτονιά του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο όχι στο A
Αν το $x \notin A$ ειναι συνοριακό σημείο αν κάθε γειτονιά του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A.
Αν το A ειναι ανοιχτό, κανένα σημειο του δεν μπορεί να ειναι συνοριακό σημείο.

Ορισμός

Έστω $A \subset \mathbb{R}^d$. Ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^d$ ονομαζεται συνοριακό σημείο του A αν κάθε γειτονιά του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο στο A και ένα σημείο εκτός του A.

Ένα συνοριακό σημείο x του A μπορεί να περιέχεται στο A μπορεί όμως και να μην περιέχεται στο A.
Αν $x \in A$ τότε το x είναι συνοριακό σημείο αν κάθε γειτονιά του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο όχι στο A
Αν το $x \notin A$ ειναι συνοριακό σημείο αν κάθε γειτονιά του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A.
Αν το A ειναι ανοιχτό, κανένα σημειο του δεν μπορεί να ειναι συνοριακό σημείο.
Ένα σημείο x ειναι συνοριακό σημειο ενός ανοιχτου συνόλου A αν και μόνο αν $x \notin A$ και κάθε γειτονιά του x έχει κοινά σημεία τομής με το A.

Παράδειγμα

Έστω $A = B(x,r) \subset \mathbb{R}^d$. *Το σύνορο του* A *είναι το σύνολο*

$$\{y = (y_1, \cdots, y_d) \ : \ \|x - y\| = r\}$$

Παράδειγμα

Έστω $A = \{x = (x_1, \cdots, x_d) \ : \ x_1 > 0\}$. *Το σύνορο του* A *είναι το σύνολο*

$$\{x = (0, x_2, \ x_d) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \cdots, d\}.$$

Σημεία συσσώρευσης

Ορισμός

Εστω ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^d$. *Ένα σημείο* $x \in \mathbb{R}^d$ *ονομαζεται* ***σημείο συσσώρευσης*** *του* A *αν υπάρχει μια ακολουθία σημείων* $\{x_n\} \subset A$ *τέτοια ωστε* $x_n \to x$.

Κλειστά σύνολα

Ορισμός

Ενα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^d$ ονομάζεται **κλειστό** *αν περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσης του.*

Θεώρημα

Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν A^c ανοιχτό.
Το A είναι ανοιχτό αν και μόνο αν A^c κλειστό.

Ακολουθίες Cauchy στον $\mathbb{R}^d$

Ορισμός

Μια ακολουθια $\{x_n\}$ *ονομαζεται Cauchy στον* $\mathbb{R}^d$ *αν για κάθε* $\epsilon > 0$, *υπάρχει* $N \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ *για* $n, m > N$.

Θεώρημα (Πληρότητα του $\mathbb{R}^d$)

Μια ακολουθία $\{x_n\} \in \mathbb{R}^d$ *συγκλίνει αν και μόνο αν είναι Cauchy* .