

ΠΕΡΙΓΡΑΦΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Η Μαθηματική Ανάλυση είναι ένας από τους πιο θεμελιώδεις και συναρπαστικούς κλάδους των Μαθηματικών και μια βασική επαφή μαζί της είναι απαραίτητη για οποιονδήποτε ασχοληθεί με αντικείμενα όπως η Στατιστική και η Επιστήμη Δεδομένων, η Πληροφορική, η Αναλογιστική Επιστήμη και τα Χρηματοοικονομικά, τα Οικονομικά κλπ. Θα μπορούσε κανείς να πει χωρίς υπερβολή ότι η Ανάλυση σαν αντικείμενο διαμορφώθηκε αλλά και συνδιαμόρφωσε την σύγχρονη επιστήμη από τον 17^ο αιώνα μέχρι σήμερα.

Σαν αντικείμενο είναι ήδη σήμερα τεράστιο και περιλαμβάνει πολλούς ενδιαφέροντες και πολύ ζωντανούς ερευνητικά κλάδους όπως π.χ. η πραγματική και η μιγαδική ανάλυση, η αρμονική ανάλυση, η συναρτησιακή ανάλυση, η ανάλυση σε μετρικούς χώρους, η στοχαστική ανάλυση, η κυρτή ανάλυση και η βελτιστοποίηση, η αριθμητική ανάλυση κ.α. με τους διάφορους αυτούς κλάδους να χρησιμοποιούνται με ουσιαστικό και γόνιμο τρόπο και σε εφαρμοσμένες επιστήμες όπως π.χ. η ανάλυση εικόνας και σήματος, η επιστήμη δεδομένων και η μηχανική μάθηση, η βιολογία και η βιοπληροφορική, η μηχανική κ.α.

Σαν μάθημα που εντάσσεται στο ακαδημαϊκό πρόγραμμα του Τμήματος Στατιστικής επικεντρώνει σε θέματα της μαθηματικής ανάλυσης τα οποία είναι απαραίτητες γνώσεις για την επιστήμη της στατιστικής και τις πιθανότητες. Για τον λόγο αυτό και όλες οι εφαρμογές στο μάθημα επικεντρώνουν σε αυτή την κατεύθυνση.

Θα επικεντρώσουμε στην μελέτη ερωτημάτων όπως

- Ποια είναι η έννοια του απείρου? Ποια είναι η φύση των πραγματικών αριθμών?
- Τι σημαίνει ότι μια ακολουθία συγκλίνει και τι μπορώ να πω για την ασυμπτωτική τους συμπεριφορά όταν αυτές δεν συγκλίνουν ή αν δεν γνωρίζω τα όρια τους?
- Τι σημαίνει ότι μια συναρτηση είναι συνεχής και ποιες ποιοτικές ιδιότητες συνεπάγεται η συνέχεια. Πως συνδέεται αυτή με ιδιότητες όπως π.χ. η ύπαρξη μεγίστου και ελαχίστου για μια συνάρτηση? Πως συνδέεται με ιδιότητες όπως π.χ. η κυρτότητα? Ποιες είναι οι γενικές ιδιότητες ασυνεχών συναρτήσεων π.χ. ποια η μορφή και το πλήθος των ασυνεχειών?
- Πως θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε την έννοια του ολοκληρώματος για συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς ή ακόμα και για να ολοκληρώσουμε επάνω όχι στο dx αλλά επάνω στο df δηλ. να ολοκληρώσουμε επάνω σε μια γενικότερη (ενδεχομένως ασυνεχή) κατανομή. Αυτό μας οδηγεί στην μελέτη του ολοκληρώματος Stieltjes και τις συναρτήσεις πεπερασμένης μεταβολής, ένα μαθηματικό εργαλείο απαραίτητο για την κατασκευή της έννοιας της πιθανότητας και την κατανόηση της έννοιας των ροπών τυχαίων μεταβλητών.
- Τι μπορούμε να κάνουμε όταν τα αντικείμενα που θέλουμε να περιγράψουμε δεν μπορούν να περιγραφούν επαρκώς από ένα πραγματικό αριθμό? Είναι π.χ. διανύσματα, απεικονίσεις από ένα σύνολο σε κάποιο άλλο π.χ. συναρτήσεις,

πίνακες, γραφήματα, γεωμετρικά σχήματα, οικογένειες από τυχαίες μεταβλητές, πιθανοθεωρητικά υποδείγματα κ.α? Πως θα μπορούσαμε να ποσοτικοποιήσουμε το πόσο διαφέρουν δύο τέτοια αντικείμενα μεταξύ τους, και να γενικεύσουμε την έννοια της σύγκλισης ακολουθιών και όλα τα υπόλοιπα που έχουμε δει στον λογισμό και την ανάλυση ως τώρα σε τέτοιες περιπτώσεις? Αυτό μας οδηγεί στην μελέτη των μετρικών χώρων και των ιδιοτήτων τους. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα θα είναι ο χώρος συναρτήσεων και η σύγκλιση των ακολουθιών συναρτήσεων πολύ βασικό εργαλείο π.χ. στην κατανόηση της κατασκευής εκτιμητριών σε στατιστικά υποδείγματα, στην κατανόηση της διαδικασίας της προσομοίωσης, ή την προσέγγιση και την κατασκευή νέων συναρτήσεων από πιο απλές συναρτήσεις με την έννοια του ορίου κ.α.. Περιττό να πούμε ότι όλες οι συναρτήσεις που έχετε χρησιμοποιήσει ως τώρα π.χ. εκθετικό, λογάριθμος, τριγωνομετρικές συναρτήσεις αλλά και πολλές άλλες χρήσιμες συναρτήσεις σε μια σειρά από εφαρμογές κατασκευάζονται έτσι!

- Ποια από τα παραπάνω σύνολα (μετρικοί χώροι) έχουν μια γεωμετρία που προσομοιάζει με αυτή του Ευκλείδειου χώρου που έχουμε συνηθίσει. Στην μελέτη αυτού του ερωτήματος θα εισάγουμε του διανυσματικούς χώρους με νόρμα και θα επικεντρώσουμε στους χώρους εσωτερικού γινομένου και τις ιδιότητες τους. Θα δούμε με αυτό τον τρόπο με πολύ ενοποιημένη μορφή γενικές ιδιότητες τους που συμπεριλαμβάνουν σε ένα γενικό πλαίσιο και μας παρέχουν μια αυξημένη κατανόηση σε θέματα όπως π.χ. η έννοια της προβολής σε γενικότερα σύνολα από το επίπεδο και η σχέση της με προβλήματα και αλγόριθμους βελτιστοποίησης, η γεωμετρία της συνδιακύμανσης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών, η θεωρία προσεγγίσεων όπως π.χ η προσέγγιση Fourier κλπ.

Εφαρμοσμένα ερωτήματα που θα μπορούσαν να χρειαστούν τεχνικές και έννοιες από την ανάλυση είναι πάρα πολλά. Θα ξεκινήσω μία πολύ μικρή λίστα:

- Πως είμαι σίγουρος ότι μια συνάρτηση (π.χ. η συνάρτηση πιθανοφάνειας) εμφανίζει μέγιστο αν δεν μπορώ να υπολογίσω παραγώγους και να χρησιμοποιήσω τις συνθήκες που έμαθα στον λογισμό για να το υπολογίσω? Μπορώ να προσεγγίσω παρόλα αυτά την θέση του? Ερωτήματα αυτού του τύπου είναι σημαντικά στην στατιστική επιστήμη και την επιστήμη των δεδομένων αλλά όχι μόνο και απαιτούν μια καλή γνώση της έννοιας της συνέχειας από την ανάλυση.
- Πώς θα κατασκευάσω ένα αλγόριθμο που προσεγγίζει π.χ. την τιμή μιας άγνωστης συνάρτησης, ενός ολοκληρώματος, ή προσεγγίζει το μέγιστο μιας συνάρτησης ή λύνει ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με τρόπο που να μπορώ να **αποδείξω** ότι αυτός συγκλίνει στην επιθυμητή θεωρητική λύση? Ερωτήματα αυτού του τύπου σχετίζονται με την θεωρία των σταθερών σημείων στην ανάλυση.
- Πως μπορώ να ορίσω την έννοια της απόστασης για αντικείμενα που δεν περιγράφονται από έναν αριθμό ή από ένα πεπερασμένης διάστασης διάνυσμα? Π.χ. πως θα μπορούσα να ορίσω την απόσταση μεταξύ 2 πινάκων, 2 συναρτήσεων ή ακόμα και μεταξύ 2 στατιστικών υποδειγμάτων? Ερωτήματα της μορφής αυτής είναι πολύ σημαντικά για την επιλογή στατιστικών υποδειγμάτων π.χ. στην μηχανική μάθηση και απαιτούν μια καλή γνώση της έννοιας του μετρικού χώρου από την ανάλυση.

- Τι σημαίνει ότι η εκτιμήτρια για κάποιο φαινόμενο “συγκλίνει” καθώς το πλήθος των δεδομένων γίνεται μεγάλο? Ερωτήματα αυτής της μορφής είναι πολύ σημαντικά σε οποιονδήποτε κλάδο της στατιστικής και απαιτούν μια πολύ καλή γνώση της έννοιας της σύγκλισης ακολουθιών συναρτήσεων από την ανάλυση.
- Θα μπορούσα να έχω τυχαίες μεταβλητές οι οποίες δεν είναι απλά τυχαίοι αριθμοί? Θα μπορούσα π.χ. να μιλήσω για τυχαίους πίνακες, τυχαία γραφήματα, τυχαίες συναρτήσεις ή τυχαία γεωμετρικά αντικείμενα και να περιγράψω την πιθανότητα εμφάνισης κάποιων από αυτά ή να μιλήσω για την μέση τιμή τους και την κατανομή τους? Ερωτήματα της μορφής αυτής εμφανίζονται σε πληθώρα εφαρμογών που σχετίζονται με την αναγνώριση προτύπων, την μελέτη κοινωνικών δικτύων, την βιοπληροφορική και την βιοστατιστική, τα χρηματοοικονομικά και τα ασφαλιστικά κλπ.

Το μάθημα δεν έχει προαπαιτούμενα μαθήματα. Μάλιστα για όσους από εσάς δεν έχετε περάσει ακόμα τους Λογισμούς και τις Γραμμικές Άλγεβρες μπορεί να σας δώσει μια νέα οπτική αυτών των θεμάτων και να σας βοηθήσει στην πιο βαθιά κατανόηση τους.

Το μάθημα αποτελεί βασική γνώση για οποιονδήποτε επιθυμεί να ασχοληθεί πιο ουσιαστικά με τις πιθανότητες, την θεωρητική και υπολογιστική στατιστική, τις στοχαστικές διαδικασίες, τα χρηματοοικονομικά και αναλογιστικά, θεωρητική πληροφορική, αριθμητικές μεθόδους, ανάλυση εικόνας ή μηχανική μάθηση. Η ανάλυση είναι ένας θεμελιώδης τομέας των μαθηματικών ο οποίος είναι απαραίτητος παντού.

Περιλαμβάνει 4 ώρες διαλέξεις εβδομαδιαίως και 2 ώρες φροντιστηριακών ασκήσεων. Και τα 2 είναι απαραίτητα στοιχεία για την σωστή κατανόηση της ύλης του μαθήματος. Η σωστή ενασχόληση με το μάθημα προϋποθέτει την μελέτη και την κατανόηση της θεωρίας (η οποία αναλύεται διεξοδικά στις διαλέξεις) την μελέτη των παραδειγμάτων (τα οποία είναι προσεκτικά επιλεγμένα και αναλύονται διεξοδικά στις διαλέξεις) και κατόπιν την ενασχόληση με επιλεγμένες ασκήσεις τις οποίες καλό είναι να προσπαθείτε να αντιμετωπίσετε μόνοι σας πριν λυθούν στα φροντιστήρια. Η διδασκαλία υποστηρίζεται με σημειώσεις παραδόσεων του διδάσκοντα και συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Η αξιολόγηση του μαθήματος γίνεται με έναν συνδυασμό βαθμολογίας από ασκήσεις που παραδίδονται στην διάρκεια του εξαμήνου και με μια τελική εξέταση. Σκοπός μας είναι μέσω των ασκήσεων αυτών να κρατάτε μια επαφή με το μάθημα καθ' όλη την διάρκεια του εξαμήνου, και αυτή η ενασχόληση σας, εφόσον είναι ικανοποιητική αποφέρει ένα μεγάλο ποσοστό της τελικής βαθμολογίας. Οι ασκήσεις αυτές είναι προαιρετικές αλλά θα σας συμβουλευάμε να ασχολείστε με αυτές και να παραδίδετε όσες περισσότερες μπορείτε.

Τέλος, για τους φοιτητές /τριες που ενδιαφέρονται πολύ για το μάθημα, εκτός των ασκήσεων, θα υπάρχει **προαιρετικά** η δυνατότητα εκπόνησης πιο σύνθετων εργασιών σε θέματα που άπτονται του μαθήματος – είτε θεωρητικά, είτε υπολογιστικά, είτε εφαρμοσμένα. Η επιλογή των θεμάτων αλλά και η εκπόνηση της εργασίας θα γίνεται με την βοήθεια του διδάσκοντα ο οποίος θα είναι διαθέσιμος για συζήτηση και ανταλλαγή απόψεων καθ' όλη την διάρκεια του εξαμήνου (αλλά και μετά!) και θα σας μάθει να δουλεύετε ένα project μεγαλύτερης διάρκειας, να καταγράφετε τα ευρήματα σας και να τα

παρουσιάζετε στους συναδέλφους σας και τους διδάσκοντες σας. Η εργασία εφόσον επιλεγεί μπορεί να αποφέρει ένα σημαντικό βαθμολογικό bonus.

Όλες οι πληροφορίες για το μάθημα θα ανεβαίνουν στην σελίδα e-class του μαθήματος. Για οποιοσδήποτε απορίες θα είμαι διαθέσιμος είτε μέσω email είτε στις ώρες γραφείου.

Θα χαρώ να σας δω αυτό το εξάμηνο στο μάθημα.

A. Γιαννακόπουλος