Ανάλυση
Φυλλάδιο ασκήσεων 8

1. Δείξτε ότι ενας μετρικός χώρος εφοδιασμένος με την διακριτή μετρική είναι παντοτε πλήρης.
2. Εστω ο μετρικός χώρος $(X, ||)$ με $X = (a, b)$. Είναι πλήρης;
3. Δείξτε ότι ο $\mathbb{R}^d$ εφοδιασμένος με την $d(x, y) = \max_j |x_j - y_j|$ είναι πλήρης
4. Εστω (X_1, d_1), (X_2, d_2) μετρικοί χώροι. Δίνονται οι μετρικοί χώροι

$$(X_1 \times X_2, d_a),\ \ d_a(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2),$$
$$(X_1 \times X_2, d_b),\ \ d_b(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2},$$
$$(X_1 \times X_2, d_c),\ \ d_c(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}.$$

   Δείξτε ότι οι τρείς αυτοί χώροι εχουν τις ίδιες ακολουθίες Cauchy.

5. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δειξτε οτι και ο $(X, \bar{d})$ με $\bar{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ είναι επίσης μετρικός χώρος. Δείξτε επίσης οτι ο X είναι φραγμένος στην μετρική $\bar{d}$.
6. Έστω $A \subset (X, d)$. Μπορούμε να ορίσουμε την διάμετρο του συνόλου A ως $\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y)$. Δείξτε ότι αν $A \subset B$ τότε $\delta(A) \leq \delta(B)$.
7. Δείξτε ότι $\delta(A) = 0$ αν και μόνο αν $A = \{x\}$.
8. Η αποσταση μεταξύ δύο συνόλων ορίζεται ως $D(A, B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a, b)$. Δείξτε ότι η D δεν ορίζει μετρική στον 2^X (το σύνολο των υποσυνόλων του X).
9. Αν $A \cap B \neq \emptyset$ τότε $D(A \cap B) = 0$. Ισχύει το αντίστροφο;
10. Χαρακτηρίστε την ανοιχτή μπάλα $B(f_0, \epsilon)$ στον $C([a, b])$.
11. Αν $f_0 \in C([0, 2\pi])$ με $f_0(t) = \sin(t)$, βρείτε το μικρότερο r έτσι ώστε η f με $f(t) = \cos(t)$ να ανήκει στην μπάλα $\bar{B}(f_0, r)$.
12. Δείξτε το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach σε ένα πλήρη μετρικό χώρο.
13. Σχεδιάστε τα συνορα των μπαλών στον $\mathbb{R}^2$, με τις μετρικές ℓ_p, $p = 1, 2, \infty$.
14. Δείξτε ότι αν η d είναι μετρική τότε η $\phi(d)$ για ϕ μονότονη γνησίως αύξουσα και κοίλη με $\phi(0) = 0$ είναι επίσης μετρική