Ανάλυση
Φυλλάδιο ασκήσεων 5

1. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής και επί συνάρτηση $f : [0,1] \to (0,1)$.
2. Δείξτε ότι αν f συνεχής τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x) = \lambda x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(q + \frac{1}{n}) = f(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε οτι η f είναι η σταθερή συνάρτηση.
4. Δείξτε ότι η εξίσωση $\sin x = x^2 - 1$ έχει τουλάχιστον μια θετική λύση.
5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο
$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
Για ποιές τιμές των a, b είναι η συνάρτηση αυτή συνεχής;
6. Μελετήστε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ x & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$
7. Δείξτε ότι αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ συνεχής τότε f σταθερή.
8. Δείξτε οτι αν η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) > 0$ και $f(1) < 1$ τότε υπάρχει $z \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(z) = z$.
9. Δείξτε ότι η συναρτηση f είναι συνεχής τοτε απεικονίζει διαστήματα σε διαστήματα.
10. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής.
11. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής τότε και η $|f|$ είναι συνεχής.
12. Δείξτε ότι αν f, g συνεχείς το ιδιο ισχύει και για την $\max(f, g)$.
13. Δείξτε ότι αν f, g συνεχείς το ίδιο ισχύει και για την $\min(f, g)$.
14. Δείξτε οτι αν η f είναι ΄ανω ημισυνεχής και ορισμένη σε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ επιτυγχάνει το μέγιστο της.
15. Δείξτε οτι αν μια συνάρτηση f είναι ταυτόχρονα ανω και κάτω ημισυνεχής σε ένα σημείο x_0 τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.