Ανάλυση
Φυλλάδιο ασκήσεων 3

1. Έχει η συνάρτηση $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ όριο στο $x \to 0$ και αν ναι ποιο είναι αυτό;

2. Βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{x}{[x]}$.

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)(2 - f(x)) \to 1$ όταν $x \to \infty$. Μπορείτε να βρείτε το $\lim_{x\to\infty}$ εφόσον αυτό υπάρχει;

4. Θεωρούμε την συνάρτηση
$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad x > 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \\ -1 & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases} \tag{1}$$
Τι έχετε να πείτε για το $\lim_{x\to 0} f(x)$;

5. Δείξτε ότι αν $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι φραγμένη στο σύνολο $E = \{x \in A \ : \ 0 < |x - x_0| < \delta\}$.

6. Δείξτε ότι το φραγμένο είναι αναγκαία και όχι ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του ορίου χρησιμοποιώντας 2 παραδείγματα

7. Υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ για την $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \cos(1/x)$;

8. Δείξτε οτι αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x\to\infty} xf(x) = L \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

9. Δείξτε ότι αν η f είναι περιττή συνάρτηση και $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ τότε $L = 0$.

10. Δείξτε ότι αν $A \subset \mathbb{R}$ κλειστό και φραγμένο τότε έχει min και max, δηλ. το inf και το sup επιτυγχάνονται (είναι στοιχεία του συνόλου).

11. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής σε οποιοδήποτε $x_0 \in (0, \infty)$. Τι γίνεται στο $x_0 = 0$;

12. Δείξτε ότι η συνάρτηση Dirichlet
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{2}$$
είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

13. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ με $a_0 < 0$ και $a_n > 0$. Δείξτε οτι το P έχει τουλάχιστον 2 διαφορετικές ρίζες.

14. Δείξτε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής αν η f^{-1} απεικονίζει καθε ανοιχτό διάστημα σε ενα ανοιχτό διάστημα. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί και σαν ένας εναλλακτικός ορισμός της συνέχειας.

15. Δείξτε ότι αν $f : [a, b] \to [a, b]$ τέτοια ώστε $|f(x) - f)y)| \le |x - y|$ για κάθε $x, y \in [a, b]$ και ορίσουμε την ακολουθία $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$, $x_1 \in [a, b]$, τότε η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε ένα σταθερό σημείο της f, δηλ. σε μια λύση της $x = f(x)$.