

## Ανάλυση Φυλλάδιο ασκήσεων 2

1. Δείξτε ότι αν  $x_n$  ικανοποιεί  $y_n \leq x_n \leq z_n$  και  $y_n \rightarrow x$ ,  $z_n \rightarrow x$ , τότε  $x_n \rightarrow x$
2. Δείξτε ότι  $n^{1/n} \rightarrow 1$ , χρησιμοποιώντας το κριτήριο της σύγκρισης και το διωνυμικό ανάπτυγμα.
3. Δείξτε ότι  $a^{1/n} \rightarrow 1$  για  $a > 1$ , χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh$$

4. Δίνεται μια ακολουθία ακεραίων αριθμών  $(x_n)$  με  $0 \leq x_n \leq 9$ . Δείξτε ότι η σειρά  $\sum_n \frac{x_n}{10^n}$  συγκλίνει (η δεκαδική αναπαράσταση πραγματικών αριθμών στο  $[0, 1]$ ).
5. Δείξτε ότι το περιοδικό δεκαδικό ανάπτυγμα  $0.0863636363\dots$  αντιστοιχεί σε ρητό αριθμό.
6. Δείξτε ότι η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{2^n}$  συγκλίνει απόλυτα για κάθε  $\theta \in \mathbb{R}$ .
7. Το άθροισμα Cesaro για μια σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  ορίζεται ως

$$C = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$$

όπου  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ . Δείξτε ότι αν η αρχική σειρά συγκλίνει τότε και το άθροισμα Cesaro συγκλίνει στην ίδια τιμή.

8. Μια αποκλίνουσα σειρά μπορεί να έχει καλά ορισμένο άθροισμα Cesaro. Δείξτε ότι η σειρά  $\sum_n (-1)^{n+1}$  δεν συγκλίνει και υπολογίστε το άθροισμα Cesaro για αυτή.
9. Δίνεται μια ακολουθία  $(x_n)$ . Δείξτε ότι αν η σειράς  $\sum_n x_{2n}$  και  $\sum_n x_{2n+1}$  συγκλίνουν τότε συγκλίνει και η σειρά  $\sum_n x_n$  και μάλιστα  $\sum_n x_n = \sum_n x_{2n} + \sum_n x_{2n+1}$ .
10. Βάσει του παραπάνω υπολογίστε την σειρά  $\sum_n (3 + (-1)^n)^{-n}$ .
11. Δείξτε ότι μια σειρά  $\sum_n x_n$  με θετικούς όρους συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών άθροισμάτων είναι ανω φραγμένη.
12. Μία σειρά ονομάζεται τηλεσκοπική αν είναι της μορφής  $\sum_n (x_n - x_{n+1})$ . Κάτω από ποιές συνθήκες η σειρά αυτή συγκλίνει;
13. Δείξτε ότι  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$
14. Δείξτε ότι  $0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{n} \times \frac{1}{n!}$  και βάσει αυτού δείξτε ότι ο  $e$  είναι άρρητος.
15. Δείξτε ότι αν  $\sum_n x_n$  απόλυτα συγκλίνουσα σειρά τότε οποιαδήποτε αναδιάταξη της συγκλίνει απόλυτα στο ίδιο όριο.