Ανάλυση
Φυλλάδιο ασκήσεων 1

Οι ασκήσεις με $\star$ είναι πιο δύσκολες και αν δεν μπορείτε να τις λύσετε μην απογοητευτείτε!
Καλή επιτυχία!

1. Δείξτε ότι αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$, τότε $a_n b_n \to ab$.

2. Δείξτε ότι μια συγκλίνουσα ακολουθία (δηλ. σε πεπερασμένο πραγματικό αριθμό) είναι φραγμένη.

3. Δείξτε ότι μια ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη. Ισχύει πάντοτε το αντίστροφο;

4. $\star$ Δίνεται μια ακολουθία για την οποία ισχύει ότι $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq C\,|a_{n+1} - a_n|$ για $C < 1$. Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει. (Υποδειξη: Προσπαθείστε να δείξετε ότι μια τέτοια ακολουθία έχει την ιδιότητα Cauchy.)

5. Δείξτε ότι εν γένει για μια ακολουθία ισχύει $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. Τι συμβαίνει αν το άνω και κάτω όριο είναι ίσα;

6. Δείξτε ότι $\limsup(-a_n) = -\liminf(a_n)$

7. Χρησιμοποιείστε παραδείγματα για να καταλάβετε την άλγεβρα του άνω και του κάτω ορίου.

8. $\star$ Δείξτε ότι $\limsup(a_n + b_n) = \limsup(a_n) + \limsup(b_n)$ αν τουλάχιστον μια απο τις δύο ακολουθίες συγκλίνει. Προσπαθείστε να δείτε τι συμβαίνει με το κάτω όριο.

9. Δείξτε ότι υπάρχει παντοτε μια υποακολουθία που συγκλίνει στο κάτω όριο μιας ακολουθίας.

10. Δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ συγκλίνει στο 0.

11. $\star$ Δείξτε ότι αν $\limsup a_n = a$ τότε για κάθε ϵ, υπάρχει μόνο πεπερασμένο το πλήθος όροι της ακολουθίας για τους οποίους ισχύει $a_n > a + \epsilon$ καί άπειροι το πληθος όροι για τους οποίους ισχύει $a_n > c - \epsilon$. Επίσης δείξτε ότι $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$.

12. Αν $\mu := \inf(A)$ για κάποιο $A \subset \mathbb{R}$, δείξτε οτι μπορείτε να κατασκευάσετε μια ακολουθία $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subset A$ τέτοια ώστε $x_n \to \mu$.

13. Δείξτε οτι αν (x_n) φραγμένη ακολουθία τέτοια κάθε συγκλίνουσα υποακολουθία να έχει το ίδιο όριο x τότε όλη η ακολουθία $x_n \to x$.

14. Βρείτε το $\limsup$ και το $\liminf$ της ακολουθίας $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$

15. Δίνεται η ακολουθία (x_n) με $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \frac{1}{3+x_n}$, $n \geq 1$. Δείξτε οτι είναι συγκλίνουσα και βρείτε το όριο

16. Δίνεται η ακολουθία $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$, με $x_1 > 0$ και $a > 0$. Δείξτε οτι συγκλίνει στο $\sqrt{a}$.